Introduction au sujet de recherche: Calcul d'asymptotiques et localisation p.s. pour le modèle parabolique d'Anderson

Un travail encadré par Peter Mörters, Professeur à l'Université de Bath

Hubert Lacoin

25 mars 2008

Table des matières

1 Le modèle

Le but du présent mémoire est d'étudier certaines propriétés de la solution au problème de Cauchy suivant, sur $\mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,z) &= \Delta u(t,z) + \xi(z)u(t,z), && (t,z) \in (0,\infty) \times \mathbb{Z}^d, \\ u(0,z) &= \mathbb{1}_0(z), && z \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

où Δ désigne le Laplacien discret de $\mathbb{Z}^d$.

$$(\Delta f)(z) = \sum_{y \sim z} [f(y) - f(z)], \qquad z \in \mathbb{Z}^d,\ f\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}\ ,$$

et où $\{\xi(z)\colon z \in \mathbb{Z}^d\}$ est une famille de variable aléatoire *i.i.d.*, non-bornées par en haut (on notera E et P les espérances et probabilités associées), on note F la fonction de distribution de $\xi(0)$.
Il est démontré (voir [GM90]) que si la loi de $\xi(0)$ vérifie certaines conditions (qui seront toujours vérifiées par la suite) , l'unique solution de (1) est donnée par la formule de Feynman-Kac :

$$u(z,t) = \mathbb{E}_0 \left[\exp\left\{ \int_0^t \xi(X_s) \mathrm{d}s \right\} \mathbb{1}\left\{X_t = z\right\} \right], \tag{2}$$

où $(X_s)_{s\geq 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ à temps continu ($\mathbb{E}$ et $\mathbb{P}$ sont les espérances et probabilités associées à cette marche). (1) est l'équation qui régit la diffusion de particules dans un potentiel

aléatoire.
Considérons une particule partant de l'origine au temps 0, qui effectue une marche aléatoire et à chaque instant dt passé sur un site où le potentiel vaut $\xi(X_t)$:

- La particule se sépare en deux particules ayant des mouvements indépendants avec probabilité $\xi(X_t)\mathrm{d}t$ si $\xi(X_t)$ est positif.
- La particule meurt avec probabilité $-\xi(X_t)\mathrm{d}t$ si $\xi(X_t)$ est négatif.

$u(z,t)$ est l'espérance du nombre de particules présente sur le site z à l'instant t.
On note $U(t)$ la masse totale de la solution,

$$U(t) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} u(z,t) = \mathbb{E}_0\left[\exp\left\{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s\right\}\right]. \tag{3}$$

L'équation (1) est souvent désignée comme le *Problème parabolic d'Anderson*. La version elliptique de problème est issu des travaux du physicien P.W. Anderson sur la capture d'électrons dans des cristaux présentants des impuretés (voir [And58]). La version parabolique du problème apparaît en dynamique des populations et en cinétique chimique. L'interêt des mathématiciens pour le sujet est plus récent et de nombreuses questions restent encore non–résolues.

2 Présentation des travaux précédents sur le phénomène de localisation et les asymptotiques de la masse totale

Il à été conjecturé assez tôt que pour ce modèle on observe un phénomène de localisation, i.e. que la masse totale de la solution va essentiellement se situer sur des petits ilots aux voisinages des endroits où le potentiel ξ prend des valeurs importantes (pics de potentiel). Ces iles sont très espacées les unes des autres. Le premier résultat confirmant cette hypothèse apparait dans [GM90] sous le nom d'intermittence. Le modèle est dit intermittent si

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(E[U(t)^p]\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(E[U(t)^q]\right)^{\frac{1}{q}}} = 0, \quad \text{lorsque } 0 < p < q.$$

Il est alors démontré que le modèle est intermittent dès que la loi $\xi(0)$ est non dégénéré et possède des moments exponentiels de tout ordre (c'est une hypothèse minimale pour que le modèle soit non–trivial et que $U(t)$ possède des moments de tout ordre). Le résultat est qualitativement interessant mais ne donne pas d'approche quantitative du phénomène. On n'a pas d'indication sur la taille des ilots ni leur nombre.
Un travail est effectué dans le même article pour savoir où vont se situer ces iles par rapport à l'origine (Section 4). Si l'on considèe uniquement les cas où la fonction de distribution F de $\xi(0)$ est suffisament régulière, on peut distinguer quatres cas, selon la croissance de $M_r = \max_{z\leq r}\xi(z)$.

(i) Le cas où F est de type polynomial i.e. $F(x) \sim 1 - x^\alpha$ $\alpha > d$, $M_r \sim r^{\frac{d}{\alpha}}$. Dans ce cas, au temps t, la masse se situe sur les maxima locaux de potentiels dans la région $r \sim t^{\frac{1}{1-d/\alpha}}$. On est dans le domaine des très grandes déviations pour la marche aléatoire.

(ii) Le cas où F est de type "exponentiel fractionnel" i.e. $F(x) = 1 - e^{-x^\gamma}$, $\gamma > 0$, $M_r \sim (\log r)^{\frac{1}{\alpha}}$. Dans ce cas, au temps t, la masse se retrouve les maxima locaux de potentiel dans la zone de grandes déviations $r \sim t$.

(iii) Le cas où F est de type "doublement exponentiel" i.e. $F(x) = 1 - e^{-e^{\frac{x}{\rho}}}$, $M_r \sim (\log\log r)$. Dans ce cas il suffit de prendre en compte les pics de potentiels dans la région $r \sim r^\beta$, $\beta \leq 1$ pour avoir des asymptotique satisfaisante. De plus dans ce cas, la masse ne se concentre pas autour des pics les plus hauts, mais autour de pics un peu plus bas mais entourés de pics de hauteur comparable. A cause de son statut "intermédaire", cette classe de potentiel d'abord été la plus étudiée (cf. [GM98], [KGMar]), et fut considérée comme la plus interessante du point de vue de la localisation.

(iv) Dans les cas ou la queue de distribution de $\xi(0)$ est encore plus légère, les iles ou se trouvent la masse sont de grand plateaux ou le potentiel est presque constant.

En 1998, de nouveaux résultats sont publié dans [GM98]. Ils concernent plus particulièrement le cas ou les potentiels ont des queues doublement–exponentielle. Des asymptotiques précises sont calculées pour la masse totale de la solution. La résolution d'un problème variationnel nous permet alors de déterminer la forme des pics de potentiels autour desquels la masse va être concentrée. Cette forme n'est pas aléatoire.

En 2006, un travail technique important ([KGMar]) a permis d'obtenir un résultat très quantitatif pour le cas où $\xi(0)$ possède une queue de distribution double–exponentielle en exploitant les résultats de [GM98]. On connait dans ce cas précisément la taille des îles ainsi que leurs nombre. Ce résultat met également en valeur le fait que le phénomène de localisation est plus accentué quand la queue de distribution de $\xi(0)$ devient plus lourde. (En effet dans ce cas les îles de potentiels sont des points isolés).

En 2006 également, des recherches ont été menées pour étudier les cas où les queues de distributions du potentiel sont plus lourdes (cas (i) et (ii)) : queue exponentielle, queue exponentielle–serrée, queue polynomiale. Ce type de distribution n'a pas été traité au départ, probablement parce que le résultat d'intermittence de [GM90] n'est pas valable dans ce cas. Cette étude est motivée par le fait que le phénomène de localisation doit être bien plus marqué.

Une étude à d'abord été menée sur le comportement asymptotique de la masse totale de la solution ([vdHMS06]). Les résultats obtenus sont très différents de ceux obtenus dans [GM98]. On observe d'importantes fluctuations aléatoires dues aux queues de potentiel plus lourdes. On doit effectuer une étude approfondie des fluctuations asymptotiques de $M_r = \max_{|z|\leq r} \xi(z)$. Par commodité, on prend la notation $L_t = 1/t \log U(t)$ pour décrire les résultats de cet article.

Théorème 2.1 (Asymptotiques p.s. de la masse dans le cas exponentiel–serré et exponentiel)**.** *Lorsque $\xi(0)$ à pour distribution $F(x) = 1 - e^{-x^\gamma}$, avec $\gamma < 1$ (cas exponentiel-serré) ou $\gamma = 1$ (cas exponentiel) alors,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{L_t - d^{\frac{1}{\gamma}}(\log t)^{\frac{1}{\gamma}}}{(\log t)^{\frac{1}{\gamma}-1}\log\log t} = \Big(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\Big)d^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma}d^{\frac{1}{\gamma}-1}$$
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{L_t - d^{\frac{1}{\gamma}}(\log t)^{\frac{1}{\gamma}}}{(\log t)^{\frac{1}{\gamma}-1}\log\log t} = \Big(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\Big)d^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Théorème 2.2 (Asymptotique en loi de la masse totale dans le cas exponentiel–serré)**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour distribution $F(x) = 1 - e^{-x^\lambda}$, avec $\gamma < 1$ alors lorsque $t \to \infty$,*

$$\frac{L_t - d^{\frac{1}{\lambda}}(\log t)^{\frac{1}{\gamma}} + \big(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\lambda^2}\big)d^{\frac{1}{\gamma}}(\log t)^{\frac{1}{\gamma}-1}\log\log t + \frac{1}{\gamma}d^{\frac{1}{\gamma}}(\log t)^{\frac{1}{\gamma}-1}\log\log\log t}{(\log t)^{\frac{1}{\gamma}-1}} \Rightarrow X,$$

où X a pour distribution,

$$P(X \leq x) = \exp\big\{ - 2^d d^{d(\frac{1}{\gamma}-1)} \exp\big\{ - x\gamma d^{1-\frac{1}{\gamma}}\big\}\big\}$$

Théorème 2.3 (Asymptotique p.s. de la masse totale dans le cas polynomial)**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour distribution $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, avec $\alpha > d$ alors,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(L_t) - \frac{d}{d-\alpha}\log(t)}{\log\log t} = \frac{1-d}{\alpha - d}, \liminf_{t\to\infty} \frac{\log(L_t) - \frac{d}{d-\alpha}\log(t)}{\log\log t} = \frac{-d}{\alpha - d},$$

Théorème 2.4 (Asymptotique en loi de la masse totale dans le cas polynomial)**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour distribution $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, avec $\alpha > d$ alors lorsque $t \to \infty$,*

$$L_t \left(\frac{t}{\log t} \right)^{-\frac{d}{\alpha - d}} \Rightarrow X,$$

où X est a pour distribution $P(X \leq x) = \exp\left\{\mu x^{d-\alpha}\right\}$,

$$\mu = \frac{(\alpha - d)^d 2^d B(\alpha - d, d)}{d^d (d-1)!}.$$

Les résultats de convergence en loi donnent le comportement "normal" de la masse. Les résultats d'encadrement asymptotique p.s. permettent de connaître l'ampleur des fluctuations exceptionnelles qui ont lieu de manière épisodique. On observe ici que l'on a des fluctuations de grande ampleur au dessus de la limite en loi, mais que les théorèmes ne permettent pas de différencier le comportement $\liminf$ de la convergence en loi. En effet quand $\tau \to \infty$, dans le premier cas (exponentiel serré), on a

$$\frac{L_t - d^{\frac{1}{\gamma}} \log(t)^{\frac{1}{\gamma}}}{\log(t)^{\frac{1}{\gamma}-1} \log\log t} \Rightarrow (\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}) d^{\frac{1}{\gamma}},$$

et dans le second (cas polynomial)

$$\frac{\log(L_t) - \frac{d}{d-\alpha}\log(t)}{\log\log t} \Rightarrow \frac{-d}{\alpha - d}.$$

L'idée principale utilisée par les auteurs pour démontrer ces résultats est la suivante :

– Les trajectoires de la marche aléatoire qui contribuent de manière significative à l'espérance de (3) sont celles qui atteignent rapidement un site (éloigné) où le potentiel est important et qui restent ensuite sur ce site jusqu'au temps t.On peut dériver une borne inférieure simple pour de cette idée.
– Pour obtenir une borne supérieure. On décompose (3) selon le nombre J_t de sauts effectués par $(X_t)_{t \geq 0}$ avant l'instant t. On majore ensuite $\big(\xi(X_s)\big)_{0 \leq s \leq t}$ par $M_{J_t} = \max_{|z| \leq J_t} \xi(z)$.

Cela permet de réduire le problème à l'études de formules plus simple que (3).

Ces résultats ont un double intérêt dans la quête de résultats de localisation :

– Ils donnent des bornes précises sur la masse totale qui pourront être utilisés.
– La méthode de démonstration donne d'autres informations sur les points qui portent le plus de masse.

L'idée apportée est que la masse de la solution sera principalement portée par les points qui maximisent l'expression,

$$\psi_t z = \xi(z) - \frac{|z|}{t} \log \frac{|z|}{2det} \tag{4}$$

Le premier terme ($\xi(z)$) traduit le bénéfice de rester longtemps au point z, et le second ($\frac{|z|}{t} \log \frac{|z|}{2det}$) est une approximation du coût (en terme de probabilité) du déplacement pour aller jusqu' à z à l'instant t.

Pour les potentiels polynomiaux (ou potentiels à loi de Pareto), ces nouvelles idées ont permis d'obtenir un résultat très net de localisation. Il est en effet démontré dans [KMS06] que dans ce cas, la masse totale de la solution se concentre asymptotiquement en un point de la manière suivante :

Théorème 2.5. *Lorsque $\xi(0)$ à pour distribution $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, avec $\alpha > d$, alors il existe un processus $\left(Z_t\right)_{t\geq 0}$ tel que, lorsque $t \to \infty$,*

$$\frac{u\left(Z_t, t\right)}{U(t)} \Rightarrow 1$$

Z_t est défini par

$$\psi_t(Z_t) = \max_{z\in\mathbb{Z}^d} \psi(z).$$

Ce résultat peut être considéré comme un progrès considérable, car c'est un cas extrême de localisation appelé localisation complête. C'est la première fois qu'un tel résultat a pu être démontré pour un modèle aussi complexe.

Ce résultat a été obtenu en adaptant les idées de [KGMar] et de [vdHMS06]. On montre d'abord que toute les trajectoires de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ ne passants pas par Z_t ne contribuent pas de mainère significative à la masse totale (3). On élimine également les trajectoires trop longues . Cela permet de réduire le problème à la résolution de l'équation (1) sur un compact puis d'appliquer les résultats d'analyse fonctionelle adéquats pour ce problème simplifié (comme dans [KGMar]).

3 Présentation du travail

3.1 Asymptotiques en loi

Le travail qui m'a été confié lors de mon stage fut d'améliorer les résultas cités précédemment. Les résultats sur les asymptotiques de la masse totale (Théorèmes 2.1 et 2.3) n'ont pas exhibés de fluctuation de la masse en dessous de ce que donne le résultat de convergence en loi. Il se peut que ces fluctuations existent mais qu'il faille regarder à une autre échelle pour les observer.
De plus, on n'a pas de résultat de convergence en loi pour les potentiels à queue exponentielle, uniquement pour des raisons techniques.
Il a fallu optimiser les démonstrations de [vdHMS06] pour pouvoir en tirer des résultats plus précis. Les résultats trouvés sont détaillés ci-dessous (seul le cas exponentiel est développé dans le mémoire de M2 qui suit mais les autres résultats peuvent se démontrer de la même manière).

Théorème 3.1 (Asymptotique en loi de la masse totale dans le cas exponentiel)**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour fonction de distribution $F(x) = 1 - e^{-x}$,*

$$L_t - d\log t + d\log\log\log t \Rightarrow X,$$

où X est une variable aléatoire de loi

$$P(X \leq x) = \exp\left\{-2^d \exp\left\{-x + 2d\right\}\right\}.$$

Théorème 3.2 (Nouvelle lim inf (cas exponentiel et exponentiel serré))**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour fonction de distribution $F(x) = 1 - e^{-x^\gamma}$, $\gamma \leq 1$, alors*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{L_t - d^{\frac{1}{\gamma}} \log t^{\frac{1}{\gamma}} - d^{\frac{1}{\gamma}} \log t^{\frac{1}{\gamma}} (\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma}) \log\log t}{\log t^{\frac{1}{\gamma}-1} \log\log\log t} = -\frac{1}{\gamma} d^{\frac{1}{\gamma}-1}(d+1).$$

Théorème 3.3 (Nouvelle lim inf (cas polynomial))**.** *Lorsque $\xi(0)$ a pour fonction de distribution $F(x) = 1 - x^\alpha$, $\alpha > d$, alors*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log L_t - \frac{d}{\alpha-d}\log t + \frac{d}{\alpha-d}\log\log t}{\log\log\log t} = -\frac{1}{\alpha-d}.$$

Les fluctuations de L_t en dessous du comportement moyen sont d'amplitude bien inférieure à celle qu'on observe pour les fluctuations au dessus. L'apparition du $-2d$ dans l'asymptotique en loi du cas exponentiel est le résultat de l'action "lissante" et diffusive du Laplacien qui rentre en compétition avec l'effet localisateur du potentiel ξ. Cela confirme que le cas exponentiel est bien un cas limite entre les queues lourdes étudiées dans [vdHMS06] et les queues plus légères [KGMar].

Pour trouver ces résultats (surtout dans le cas exponentiel) il a fallu affiner la majoration de (3) fait dans [vdHMS06]. A cette fin, il a fallu utiliser des méthodes combinatoires et démontrer de nouveaux résultats asymptotiques plus précis pour le modèle.

3.2 Localisation p.s.

La seconde tâche a été de trouver une amélioration du Théorème 2.5, en démontrant un résultat de localisation p.s. au lieu d'avoir une simple convergence en loi. Pour des raisons de continuité de la solution, il est impossible d'avoir une concentration p.s. de la masse en un point. En effet quand $\left(Z_t\right)_{t\geq 0}$ effectue un saut, il ne peut y avoir de transfert de masse instantané d'un point à l'autre. Une hypothèse raisonnable (et la plus optimiste), est de considérer que lorsque $\left(Z_t\right)_{t\geq 0}$ effectue un saut, la masse de la solution est transférée d'un point à l'autre de manière relativement rapide, et que lors des temps éloignés des sauts de $\left(Z_t\right)_{t\geq 0}$ la masse se situe toujours sur $\left(Z_t\right)_{t\geq 0}$. Si cette conjecture est la bonne, il faudrait donc deux points seulement pour concentrer la masse de manière presque sûre.

J'ai finament réussi à démontrer ce résultat, qui constitue la majeure partie du mémoire.

Theorem 3.1 (Localisation p.s. de la solution dans le cas polynomial)**.** *On peut exhiber deux processus $\left(Z_t^{(1)}\right)_{t\geq 0}$ et $\left(Z_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{Z}^d$, tels que*

$$\frac{u(Z_t^{(1)},t)+u(Z_t^{(2)},t)}{U(t)} = 1 \quad \textit{presque sûrement.}$$

Ce résultat a été particulièrement difficile à démontrer pour plusieurs raisons :

- Dans tout les articles écrits auparavant sur le sujet, toute les approximations faites considéraient que le caractère anisotrope de la diffusion dans $\mathbb{Z}^d$ pouvait être négligé. Or ces approximations ce sont révélées insuffisantes pour démontrer une convergence p.s. , il a donc fallut démontrer de nouvelles approximations (tant en majoration qu'en minoration) plus précises, mais bien plus difficile à manipuler.
- Ces modifications ont entraînées des complications techniques qui rendent la démonstration bien plus longue que dans [KMS06].

La modification principale est de considérer que $\psi_t(z)$ (décrite par (4)) n'est plus la bonne fonction à maximiser pour trouver les points portant le plus de masse, et qu'il faut considérer

$$\psi_t^*(z) = \xi(z) + \frac{\log(N(z))}{t} - \frac{|z|}{t}\log\xi(z)$$

où

$$N(z) = \#\left\{\text{ chemins de longueur } |z| \text{ qui relient } z \text{ à l'origine}\right\}.$$

L'apparition du terme en $\log(N(z))$ matérialise le fait qu'un point concentrera plus de masse si il existe plus de manière différente de l'atteindre. Cela se traduit par le fait que les points où la masse se concentre ont plus de chance de se situer loin des axes de $\mathbb{Z}^d$. Il n'était pas nécessaire de considérer ce phénomène pour obtenir une simple convergence en loi, mais certains évènements dont la probabilité tend vers 0 se produisent néanmoins p.s. une infinité de fois (il suffit d'observer les théorèmes précédents sur les asymptotiques pour s'en rendre compte) et obligent à être beaucoup plus précis dans nos approximations . L'apparition de $\log \xi(z)$ est moins surprenante. Il s'agit juste d'une correction de l'approximation faite pour obtenir ψ.

Cela complexifie serieusement les calculs effectués, car le comportement de $N(z)$ est difficile à contrôler. Mais cette modification souligne une phénomène important et qui apparaît pour la première fois : Le caractère anisotrope de la diffusion dans $\mathbb{Z}^d$ ne peut pas toujours être négligé pour etudier les phénomènes de localisation, et joue un rôle dans le choix des site où la masse se trouve concentrée.

Ce théorème donne une information en quelque plus précise sur la répartition de la masse au cours du temps que le Théorème 3.1, qui est un résultat bien plus abstrait.

Ce qui m'a plu dans ce domaine de recherche fut le caractère très intuitif des démonstrations, qui font appel à une logique combinatoire, et qui réduisent l'étude d'une équation différentielle à celle d'une marche aléatoire qui cherche à aller vers les endroits les plus profitables (régions où potentiels est élevé) et qui répugne à parcourir de trop longue distances.

Références

[And58] P.W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 1958.

[GM90] Jürgen Gärtner and Stanislav Molchanov. Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics. *Commun. Math. Phys.*, 132 :613–655, 1990.

[GM98] Jürgen Gärtner and Stanislav Molchanov. Parabolic problems for the Anderson model. II. Intermittency and related topics. *Commun. Math. Phys.*, 132 :613–655, 1998.

[KGMar] Wolfgang König, Jürgen Gärtner, and Stanislav Molchanov. Geometric characterisation of intermittency in the parabolic Anderson model. *Ann. Probab.*, to appear.

[KMS06] Wolfgang König, Peter Mörters, and Nadia Sidorova. Complete localisation in the parabolic Anderson model with Pareto-distributed potential. *http ://arxiv.org/abs/math/0608544*, 2006.

[vdHMS06] Remco van der Hofstad, Peter Mörters, and Nadia Sidorova. Weak and almost sure limits for the parabolic Anderson model with heavy tailed potentials. *http ://arxiv.org/abs/math/0606527*, 2006.