MÉMOIRE DE MAGISTÈRE

2001-2004

INTRODUCTION AU THÈME DE RECHERCHE

Les Mathématiques Financières

Catherine LAGNEAU

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les idées de base de la finance moderne et les apports de la théorie des probabilités et des processus stochastiques : en particulier, je développerai de manière assez détaillée le modèle de base des mathématiques financières, le modèle dit de Black-Scholes (l'usage veut qu'on oublie Merton, qui a pourtant empoché le prix Nobel aux côtés de Scholes pour ce même modèle —Black est mort avant d'avoir eu cet honneur), dont dérivent beaucoup de modèles plus sophistiqués utilisés dans le marché. On sait l'ampleur que les marchés financiers ont pris dans le paysage économique, on imagine les enjeux qui se cachent derrière la modélisation mathématique. Au cours de mon travail en DEA, j'ai pu observé que la modélisation en finance a principalement trois objectifs :

- donner des prix à des produits financiers ("**pricer**" des produits) et établir des stratégies qui permettent de **couvrir** une position : si je vends un produit, je n'ai pas envie de perdre de l'argent : il s'agit de savoir comment, au vu des données du marché, me positionner au mieux pour livrer le produit sans perdre de l'argent (le but des modèles mathématiques n'est pas de savoir comment gagner de l'argent mais surtout comment ne pas en perdre). En fait, les deux points de vues se rejoignent : le prix d'un produit est celui de sa couverture ;

- donner l'**allocation optimale** des titres dans un portefeuille selon une certaine utilité qui précise les préférences du gestionnaire. Par exemple, un gestionnaire veut en général optimiser son portefeuille selon un critère moyenne-variance, c'est-à-dire qu'il est prêt à prendre plus de risques seulement si cela rapporte plus en moyenne. Souvent on modélise ses préférences à l'aide d'une seule fonction, dite **fonction d'utilité** dont on maximise l'espérance à une date future de gestion. J'ai eu l'occasion de travailler sur ces questions lors de mon stage de DEA.

- estimer le risque de faillite d'une entreprise : typiquement, si je prête de l'argent à une entreprise, je veux savoir quel risque je prends ; je ne prête pas au même taux à une compagnie aérienne, par exemple, qu'à une entreprise issue d'un secteur stable. Ainsi est résumée la problématique du **risque de crédit**. C'est sur ces questions que s'est notamment orienté mon stage de DEA.

J'ai choisi pour cette introduction aux mathématiques financières de ne pas m'interesser aux deux derniers points. La raison en est simple : la question du pricing et de la couverture a été la première dont les mathématiciens se sont occupés et reste le champ favori de leurs investigations : elle rassemble les fondements et les idées clés des mathématiques financières. Les deux autres points ne sont pas l'objet de théories satisfaisantes, c'est pourquoi on notera qu'elles ont toutes deux inspiré le sujet de mon stage de DEA.

Dans la première partie de ce chapitre est introduit le vocabulaire minimal nécessaire à la compréhension du jargon financier : ce qu'est le marché et ce que sont les produits dérivés auxquels s'interessent particulièrement les mathématiciens. Un glossaire à la fin de ce chapitre regroupe quelques définitions, nécessaires pour la lecture de cette introduction ou celle des autres chapitres consacrés à mes travaux dans ce domaine.
Une perspective historique, à travers la description des personnages qui ont fait les mathématiques financières, est donnée dans une deuxième partie.
J'ai choisi de mettre dans une section distincte les concepts fondamentaux de tout modèle en finance, avant de décrire plus longuement dans une quatrième partie le modèle de Black-Scholes et aboutir à la notion d'évaluation risque-neutre.

2 Un peu de vocabulaire financier

Plusieurs types de marchés doivent être distingués :

• **le marché primaire :** en contrepartie des capitaux recueillis, les entreprises et les administrations émettent des titres représentatifs des droits reconnus aux bailleurs de fonds. Cette rencontre entre les agents qui émettent des titres nouveaux et ceux qui les achètent constitue le marché primaire (qui n'est en général pas localisé). **Le marché primaire constitue une source importante de financement de l'activité économique.** Pour assurer leur croissance et leur modernisation, les entreprises établies sous forme de société de capitaux y trouvent un complément à leurs fonds propres en émettant des **actions** ; elles peuvent également y emprunter des capitaux à long terme en plaçant des **obligations**, tout comme les administrations qui couvrent ainsi leur besoin de financement.

• **le marché secondaire :** après émission, les valeurs mobilières, qui portent sur le long terme, doivent pouvoir être vendues rapidement sur un marché de l'occasion, dit **marché secondaire**. Si les transactions sont fréquentes, mettant en jeu des volumes importants, sans coûts de transactions, on dit que le marché financier est **liquide**.

• **les marchés dérivés :** ce sont des marchés à terme sur lesquels sont négociés des **produits dérivés**. Il s'agit de contrats dont la valeur dépend du prix d'un autre actif (financier ou corporel) que l'on appelle un **sous-jacent**. On distingue les marchés :

– de **contrats à terme** : le contrat à terme fixe aujourd'hui le prix auquel j'achète ou je vends à une contrepartie le sous-jacent à l'échéance (typiquement, dans 3 mois ou 1 an) ; le prix du contrat est nul initialement, mais l'accord doit être impérativement respecté à l'échéance ; puis, le contrat peut être revendu sur le marché de contrats à terme et son prix fluctue selon la tendance que prend le marché. Ce type de vente ou d'achat à terme est pratiqué depuis l'Antiquité sur les produits agricoles. Les marchés à terme sur produits financiers sont apparus dans les années 70 aux États-Unis.

– d'**options** : le développement des marchés d'options négociables date des années 70. À la différence des contrats à terme, les options ne sont pas des engagements fermes et définitifs. L'achat d'une option confère des droits et non des obligations. Une option d'achat s'appelle un **call** et de vente, un **put**. L'option, elle-même, a un prix, appelé la **prime**. Par exemple, j'achète le droit d'acheter un produit dans 3 mois à un prix de K euros (on dit alors que j'achète un **call européen** de **strike** K, de **maturité** $T = 3$ mois, sur tel **sous-jacent**). Si le prix, trois mois plus tard est inférieur au strike de l'option, je n'exerce pas mon droit.
Pour couvrir des expositions spécifiques, des contrats plus complexes sont proposés : les **options exotiques**. Elles sont **"path dependent"**, ou dépendant d'un grand nombre de sous-jacents. Certaines options laissent à l'acheteur le choix de la date d'exercice : ce sont les **options américaines**. Autre exemple : une **option barrière** est activée seulement si le sous-jacent passe sous (sur) un seuil décrit par contrat, pendant la vie de l'option. L'imagination du marché est sans limite : c'est une bonne nouvelle pour les mathématiciens, puisque leur travail est de donner un prix à toutes ces options, mais moins bonne pour la santé des marchés financiers....

3 Les grands noms des mathématiques financières

FIG. 1 – Louis Bachelier (1870-1946)

Dès 1900, Louis Bachelier (1870-1946) dans sa thèse remarquable, soutenue à la Sorbonne, intitulée "Théorie de la speculation" (1900, *Annales de l'Ecole normale supérieure*) pose les bases de la finance moderne. La question centrale dans la gestion des risques financiers est évidemment celle du prix sur lequel les deux parties du contrat doivent pouvoir se mettre d'accord. Bachelier insiste sur le fait que ce point est loin d'être évident à cause de la dyssymétrie des risques qui rend l'existence même des contrats d'options problématique : l'acheteur a un risque réduit à la prime, le vendeur est beaucoup plus exposé en cas de fort tendance de marché. Mais l'incertitude à long terme est la résultante de petits mouvements plus facilement contrôlables. C'est ainsi qu'il anticipe une grande partie de ce qui deviendront les outils fondamentaux de la théorie financière : les marches aléatoires sur le marché financier, les martingales et le mouvement brownien, dont il eut le premier l'intuition pour répondre aux questions qu'il se pose sur le prix des produits dérivés. Mais sa thèse ne fut guère appréciée de ses contemporains et tomba dans l'oubli jusque dans les années 60. Bachelier est aujourd'hui considéré comme le pionnier des mathématiques financières et fait désormais partie de la légende.

FIG. 2 – Myron Scholes (1941-) et Fisher Black (1938-1995)

Black, Scholes et Merton en 1973 introduisent la même idée quant à l'importance des petites mouvements quotidiens ou intraday et définissent le prix d'un produit dérivé comme le prix de sa "couverture". Cette théorie, révolutionnaire du point de vue de l'économie classique, leur a valu le prix Nobel d'économie en 1997. Mais elle n'a pas empéché la faillite du "hedge fund" Long Terme Capital Market en 1998, dont ils étaient des membres actifs. Le fond a joué notamment sur ce qu'on appelle l'effet de levier des produits dérivés : comme l'acheteur d'une option d'achat supporte un risque limité à la prime de l'option, il peut espérer gagner beaucoup s'il estime que le marché devrait monter plus que ce que le prix de l'option révèle. Il peut donc "spéculer" sur l'évolution du cours.

FIG. 3 – Robert Merton (1944-)

Comme le souligne Robert Merton dans son introduction au Congrès Mondial Bachelier de Paris (2000), l'industrie du risque financier n'aurait pu se developper sans l'apport à la fois de la théorie économique et des mathématiques. Louis Bachelier est le premier à avoir montré la nécessité de posséder des outils mathématiques appropriés. Plus généralement, il est remarquable d'observer que sans les outils du calcul stochastique, le business de l'assurance des risques financiers n'aurait pu se développer comme il l'a fait, et les marchés financiers n'auraient pu prendre l'importance qu'on leur connait maintenant.

4 Les principaux concepts de la modélisation financière et leurs premières conséquences

4.1 L'hypothèse fondamentale de la modélisation financière : le principe de non-arbitrage

Il est clair que les prix de différents produits dérivés ne sont pas quelconques et qu'il existe une forte cohérence entre les prix des options sur un même sous-jacent. Elle est due à ce qu'on peut appeler la Loi fondamentale de la Finance de marché :

> **Dans un marché très liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.**

En effet, dans les marchés financiers, il existe des **arbitrageurs**, qui sont des intervenants dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte-tenu des autres prix du marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans prendre de risque. Leur intervention est statique, au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future. Ils contraignent les prix à vérifier certaines relations, comme nous le verrons sur certains exemples. Il s'agit surtout d'une règle qui conduit à l'unicité des prix des produits dérivés, au sens où

> **Deux stratégies qui donnent le même flux à l'horizon de gestion dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire.**

Exemples d'application : incidence sur les prix de l'absence d'arbitrage

Il existe quelques produits financiers dont on peut déduire le prix en appliquant cette règle, sans référence à aucun modèle, ce qui est évidemment un point important dans le marché.

Prix d'un contrat à terme Nous désignons par $F_t(S;T)$, le prix fixé par contrat à la date t auquel sera négocié le titre S à la date T. C'est le prix à terme, ou le prix forward de S en T. Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix de ce contrat au cours de S à la date t. Pour se garantir le fait de détenir S en T, nous avons deux possibilités.

1) La première consiste à acheter le titre S aujourd'hui, et à le garder jusqu'en T.
2) La deuxième consiste à acheter le contrat forward.

Pour pouvoir le payer en T, il faut placer à la banque un montant qui nous garantit $F_t(S;T)$ en T. L'instrument financier adapté à ce genre de situation est, par définition, le **zéro-coupon** de maturité T, dont le prix $B(t;T)$ est celui qu'il faut payer pour recevoir à coup sûr 1 Euro en T (si le taux d'intérêt de la banque est constant, égal à r, on a $B(t;T) = e^{-r(T-t)}$). Il faut donc placer à la banque $B(t;T)F_t(S;T)$ euros pour garantir le paiement du contrat. Par absence d'arbitrage, nous avons

$$\boxed{F_t(S;T) = S_t B(t;T)}$$

> **Preuve :** supposons que $S_t < F_t(S;T)B(t;T)$. J'achete S_t actions aujourd'hui et je les revends grâce à un contrat forward pour un prix fixé $F_t(S;T)$ en T. J'emprunte aujourd'hui S_t, que je rembourse en T. Le flux est nul en t, tandis qu'en T, j'empoche : $F_t(S;T) - S_t/B(t,T)$. Nous avons ainsi réalisé un arbitrage statique, puisque le bilan en T est toujours positif. Un raisonnement similaire peut être fait si $S_t < F_t(S;T)B(t;T)$. Les prix sont donc nécessairement égaux.

Parité Call -Put Un raisonnement analogue nous montre que la détention d'un **Call** et la vente d'un **Put** de mêmes caractéristiques, nous garantissent à l'échéance d'être détenteur de la valeur de l'action et la vente du prix d'exercice (le strike) K. Mais ce portefeuille peut aussi être obtenu en achetant l'action en t et en remboursant $KB(t;T)$ en t.

$$\boxed{Call_t(T;K) - Put_t(T;K) = S_t - KB(t;T)}$$

> **Preuve :** Supposons que $Call_t(T;K) - Put_t(T;K) > S_t - KB(t;T)$ et notons la différence des deux termes de cette inégalité Y_t. Le portefeuille constitué de la vente d'un Call, de l'achat d'un Put, de l'achat d'une action, de placement de $Y_t - KB(t;T)$ à la banque pour l'horizon T, est de valeur initiale nulle. Mais à l'horizon T, il garantit un flux de $-(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ + S_T - K + YtB(t;T)^{-1} = Y_tB(t;T)^{-1}$, qui est > 0. Cette stratégie est donc un arbitrage.

4.2 Prix et portefeuille de couverture

Prenons, pour fixer les idées, un exemple : un call européen, d'échéance T, de strike K, sur une action dont le cours à la date t est donné par S_t. Il est clair que si, à l'échéance T, le prix d'exercice K est supérieur au cours S_T, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer. Par contre, si $S_T > K$, l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à $S_T - K$, en achetant l'action au prix K et en la revendant immédiatement sur le marché au cours S_T. On voit qu'à l'échéance, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix K, et, par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à $(S_T - K)_+$. Au moment de la vente de l'action, en t, le cours S_T est inconnu et deux questions se posent :

1. Combien faut-il faire payer à l'acheteur de l'option, autrement dit, comment évaluer à l'instant t une richesse $(S_T - K)_+$ disponible en T ? C'est le problème de l'évaluation ou du "**pricing**".

2. Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant t, parviendra-t-il à produire la richesse $(S_T - K)_+$ à la date T ? C'est le problème de la **couverture**.

L'absence d'arbitrage permet de faire le lien entre pricing et couverture. En effet, si le vendeur a une stratégie de gestion qui lui permet de fournir p.s. exactement la richesse $(S_T - K)_+$ à l'échéance T, alors, l'argent initial qui lui est nécessaire pour établir cette stratégie est précisement le prix de l'option. Sinon, un arbitrage dynamique serait possible. Le meilleur "portefeuille" ainsi trouvé est appelé le **portefeuille de couverture**. C'est cette idée que **le prix d'une option est le prix de sa couverture** (gérée de façon infinitésimale) qui valut à Scholes et Merton leur prix Nobel d'économie.

5 Modélisation mathématique : le monde de Black, Scholes et Merton

5.1 Modélisation de la dynamique du sous-jacent : le mouvement brownien géométrique

L'incertain est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. En général, on suppose que ce sont des fonctions continues (ω_t), définies sur $\mathbb{R}_+$. Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs financiers, Bachelier les modèlise à l'aide d'un mouvement brownien avec tendance. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Aussi, Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements (logarithmiques), plutôt que pour les cours eux-mêmes.

5.1.1 Définition et Propriétés

Depuis Samuelson en 1960, la dynamique des actions est modélisée comme suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$S_t = f(t; W_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

où
- S_t est le prix de l'action au temps t ;
- μ est le rendement par unité de temps ;
- σ est la **volatilité** de l'action ;
- W_t est un mouvement brownien.

5.1.2 Interprétation

• S'il n'y a pas de bruit, $(\sigma = 0)$, μ représente le rendement annualisé du titre. Un simple argument d'arbitrage montre qu'en absence d'alea sur le titre, son rendement doit être le même que celui d'un placement à la banque, dont le taux sera désigné ici par r. Un ordre de grandeur de ce taux est $[2\%, 12\%]$.

• Lorsque le titre est risqué, μ représente le rendement annualisé du titre espéré par unité de temps. Le marché le compare en général à celui d'un placement sans risque. Le paramètre $\mu - r$ est donc en général un paramètre de référence.

• Il sera utile d'écrire

$$dS_t = S_t[rdt + \sigma(dW_t + \lambda dt)]$$

avec $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$, appelé **prime de risque**. Dans cette représentation, nous voyons apparaître l'importance du paramètre clé, la volatilité σ, dans la caractérisation des titres financiers. L'ordre de grandeur de ce paramètre dépend énormément de la nature du titre support : dans les marchés d'action il varie entre 30 et 70%, dans les marchés de change entre 10 et 30%, dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30%.

5.1.3 Limites de la modélisation

Dans le monde de Black et Scholes, tous les paramètres sont supposés constants et même déterministes. Il est clair que ce n'est pas très réaliste. Mandelbrot (1963) avait dejà montré que les rendements des actifs financiers à un jour, ou une semaine n'étaient clairement pas statistiquement gaussiens, en particulier que la probabilité de grands mouvements de ces rendements était plus grande que celle que le monde gaussien quantifiait. Cette question "des queues épaisses" des distributions des rendements et de son implication dans la mesure des risques et la couverture des produits financiers est au coeur de la recherche actuelle.

Notons par ailleurs que dans leur papier de 1973, Black et Scholes ne cherchent pas tant à modéliser avec exactitude la dynamique du sous-jacent qu'à essayer de voir si le point de vue très nouveau qu'ils proposent dans le domaine des options est prometteur, quitte à revenir sur les questions de modélisation dans la suite.

Mais, bien qu'imparfait, le modèle de Black et Scholes est encore très efficace et très utilisé dans toutes les salles de marché.

5.2 Modélisation d'un portefeuille dynamique

Après avoir modélisé la dynamique du sous-jacent, nous avons à formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur liquidative d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinançante, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de renégociation.

5.2.1 Portefeuille autofinançant écrit sur un sous-jacent risqué

Nous supposons ici que nous ne pouvons investir que dans un seul titre risqué appelé souvent l'action, et dans du cash, c'est à dire en plaçant ou empruntant de l'argent à la banque. Nous désignons par S_t le prix à la date t de l'action, par r le taux d'intérêt pour un placement entre $[t; t+dt]$ à la banque.

Une **stratégie de portefeuille autofinançante** est une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'actions et de prêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait de cash.

Soit V_t la valeur de marché, ou encore valeur liquidative, ou encore Mark to Market (MtM) du portefeuille à la date t. Après renégociation, le nombre d'actions du portefeuille δ_t (positif ou négatif suivant qu'on est acheteur (long) ou vendeur (court) en action) est constant jusqu'à la prochaine date de gestion. Nous supposons pour le moment que le gestionnaire ne prend en compte dans sa règle de décision la valeur du cours du sous-jacent au moment de renégocier. Dans un temps très court, la variation de valeur du portefeuille n'est due qu'à la variation de la valeur de l'action et à l'intérêt versé par la banque sur le cash, soit, puisque le montant investi dans le cash est $V_t - \delta_t S_t$:

$$dV_t = \delta_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t) r dt = r V_t dt + \delta_t (dS_t - r S_t dt).$$

5.2.2 Formulation mathématique du risque nul

Comme nous l'avons vu dans la section 4.2, la question du prix des options est étroitement liée à celle de leur couverture, parfaite si possible. Mathématiquement, le problème se pose donc de la façon suivante : il s'agit de trouver une stratégie de portefeuille autofinançant qui réplique le flux terminal $h(S_T)$. Pour des raisons opérationnelles, on souhaite que la seule information à prendre en compte dans cette gestion dynamique soit la valeur du cours. Cette hypothèse repose sur la notion en économie d'efficience des marchés qui exprime que le prix d'un actif à un instant donné incorpore toute l'information passée ainsi que les anticipations des agents sur ce titre.

Plus précisément, le problème est donc de trouver un couple de fonctions $v(t;x);\delta(t;x)$ "régulières" telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} dv(t;S_t) & = & v(t;S_t)rdt+\delta(t;S_t)(dS_t - rS_tdt) \\ v(T;S_T) & = & h(S_T) \end{array}\right.$$

On dit alors que $\delta(t;S_t)$ est le portefeuille de couverture du produit dérivé $h(S_T)$.

L'existence d'une solution à un tel problème n'a a priori rien d'intuitif. Par contre, l'unicité est une conséquence de l'absence d'arbitrage dans le marché, satisfaite par des portefeuilles vérifiant certaines conditions d'intégrabilité.

Par absence d'arbitrage, la valeur du portefeuille $v(t;St)$ est le prix auquel devrait être vendu l'option, si elle était émise à la date t, quand les conditions de marché sont $S_t(\omega)$.

5.3 Evaluation par équation aux dérivées partielles

Nous allons voir maintenant que le problème se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

5.3.1 L'EDP d'évaluation

Nous recherchons la valeur du prix de l'option sous la forme d'une fonction à laquelle on peut appliquer le calcul différentiel d'Itô, par exemble de classe $C_b^{1;2}$ par rapport à $\ln x$, et à croissance linéaire, pour que le processus $v(t;S_t)$ satisfasse de bonnes propriétés d'intégrabilité.

Théorème 1 *Soit h une fonction continue, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t;x)$ sur l'ouvert $]0;T]\times]0;+\infty[$:*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)+rx\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)-rv(t,x)=0 \\ v(T;x)=h(x) \end{array}\right.$$

Le flux $h(S_T)$ est duplicable par un portefeuille, dont la valeur à la date t est $v(t;S_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta(t;S_t)=\frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t)$.

La preuve du théorème se déduit de la formule d'Itô appliquée à $v(t,S_t)$ et par comparaison des termes avec ceux de l'équation d'un portefeuille autofinançant (unicité de la décomposition en partie brownienne et partie à variation finie).

5.3.2 Interprétation financière de l'EDP d'évaluation

L'une des conséquences essentielles de cette méthodologie est que le prix de l'option ne dépend pas du rendement μ du titre risqué, c'est-à-dire de la tendance du marché à la hausse ou à la baisse, puisque ce coefficient n'apparait pas dans l'EDP d'évaluation du théorème 1.
Ceci peut sembler vraiment surprenant, puisque la première motivation de ces produits dérivés commes les Calls ou les Puts est de se couvrir contre ces mouvements. En fait, la stratégie de couverture dynamique permet au vendeur d'option d'être couvert contre les mouvements défavorables du marché. Il a annulé le risque dû à la tendance du marché. **Que le marché soit haussier, ou baissier le prix de l'option d'achat sera le même.**
Le risque dû aux fluctuations est toujours présent et influe significativement sur le prix de l'option par l'intermédiaire du paramètre de volatilité. C'est la gestion de ce paramètre qui va décrire le savoir-faire du trader.

5.3.3 Résolution de l'EDP

On utilise les solutions de l'EDP de la chaleur pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit h une fonction à croissance linéaire. Le prix d'un produit dérivé de flux terminal $h(S_T^x)$, où S_T^x est le prix d'un actif qui vaut x en 0 est donné par la valeur en 0 de la solution de l'EDP d'évaluation qui admet la représentation intégrale :*

$$v(0;x) = e^{-rT} \int h\left(x \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma y\right)\right) g(T,y)dy$$

où $g(T,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-\frac{y^2}{2T})$ est la densité gaussienne de variance T.
La même représentation est valable en t en remplaçant T par $T - t$.

La règle d'évaluation que nous avons dégagée montre que pour estimer le prix d'un produit dérivé, les agents font comme si le marché dans lequel se font les transactions était risque-neutre, i.e. la prime de risque est nulle (dit encore autrement : $\mu = r$). Mathématiquement, cela revient à considérer que dans l'estimation du prix d'un produit dérivé, le marché fait un calcul d'espérance avec des poids différents de ceux induits par la probabilité historique.

C'est ainsi qu'on est conduit à introduire une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ dite **probabilité risque neutre** (on dit encore mesure martingale) telle que, sous $\mathbb{Q}$, le processus $(\tilde{W}_t)_{0 \le t \le T}$ défini par $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$ soit un brownien. On sait, par le théorème de Girsanov, que la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à la probabilité historique $\mathbb{P}$ s'écrit alors :

$$L_t = \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right).$$

On retiendra, pour les options dont le flux terminal h est suffisamment régulier (positivité et $h(S_T)$ mesurable sous $\mathbb{Q}$ suffisent) que la valeur du portefeuille de couverture (et donc le prix de l'option) est, à tout instant t, donnée par la formule :

$$\boxed{v(t) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h(S_T)|\mathcal{F}_t\right]}$$

On en déduit par exemple le prix d'un **call européen** de strike K, de maturité T, portant sur une action de volatilité σ et de valeur initiale S_0 :

$$Call(S_0, K, T, r, \sigma) = S_0\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}D\mathcal{N}(d_2)$$

où

$$\begin{aligned}
d_1 &= d_1(S_0, K, T, r, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T\right) \\
d_2 &= d_2(S_0, D, T, r, \sigma) = d_1(S_0, K, T, r, \sigma) - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}$$

et $\mathcal{N}(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
La parité call-put de la section 4.1 permet de trouver une formule analogue pour le prix d'un put.

6 Conclusion

On a réussi à écrire une formule fermée satisfaisante qui donne le prix d'un call ou d'un put européen. Évidemment, cela n'est pas aussi simple pour les options américaines et encore moins pour les options exotiques. Une flopée de méthodes numériques est utilisée pour répondre au problème : des méthodes aux différences ou aux éléments finis pour estimer la solution de l'EDP de Black-Scholes ou des méthodes de Monte-Carlo. Les produits proposés par le marché se complexifient sans cesse et nécessitent de nouvelles méthodes de pricing.

En outre, un autre grand problème des mathématiques financières est la calibration (ou l'estimation) des paramètres des modèles. Le modèle de Black-Scholes est simple, mais est statistiquement faux. Des modèles plus sophistiqués (modèles à volatilité stochastique par exemple) sont certes plus réalistes mais posent de plus en plus de problèmes de calibration.

Sans cesse les outils utilisés par les mathématiciens doivent évolués pour s'adapter aux exigences et aux comportement erratique des marchés financiers ; la principale contrainte est peut-être celle du temps : quelque soit le modèle, pour qu'il soit adopté par des gestionnaires ou des traders, il ne doit pas être trop complexe pour pouvoir donner très rapidement des résultats.

J'ai présenté dans l'introduction les sujets sur lesquels a porté mon travail de stage de DEA : optimisation de portefeuille et modèle de risque de crédit. Dans les deux cas j'ai ajouté aux modélisations existantes un processus de Poisson qui permet de mieux tenir compte du caractère imprévisible et discontinu que peut avoir la valeur d'une entreprise.

Glossaire

À LA MONNAIE (At the money) : On dit d'une option (call, put ou cap, floor), qu'elle est « à la monnaie » quand son prix d'exercice est égal au cours de son sous-jacent qui peut être le cours comptant ou le cours à terme.

ACTION (Stock) : Fraction de capital d'une société représentée par un titre remis en contrepartie d'un apport en espèces ou en nature. Une action donne trois droits à son propriétaire : un droit à l'information sur la marche de la société, un droit de vote aux assemblées générales et, si les résultats le permettent, des dividendes.

ACTUALISATION : Calcul de la valeur en date d'aujourd'hui de flux financiers intervenant dans le futur.

ARBITRAGE : Opération simultanée d'achat et de vente d'un même produit financier ou de deux produits différents visant à réaliser un profit sans risque grâce à des inefficiences (anomalies) de marché.

CAC (Cotation Assistée en Continu) : Système informatique permettant la cotation des valeurs mobilières du premier marché, second marché et marché libre. Il a été remplacé en 1995 par le nouveau système de cotation (NSC).

CAC 40 : Indice de la bourse de Paris calculé à partir d'un panier de 40 actions parmi les plus significatives de l'économie française. Il sert de référence pour estimer l'évolution du marché action de la place parisienne.

CALL : Se dit d'une option qui donne le droit, et non l'obligation, de se porter acquéreur d'un sous-jacent à un prix défini et ceci pendant une durée déterminée ou à une date fixe, moyennant le paiement d'une prime.

CONTRAT À TERME (Forward ou Futures) : Contrat passé entre deux contreparties portant sur l'achat ou la vente d'un sous-jacent à une échéance prédéterminée. Ces contrats sont fermes, c'est-à-dire qu'à l'échéance leur utilisation est obligatoire (réception du sous-jacent pour un achat à terme, livraison pour une vente à terme à l'échéance du contrat).

CONTREPARTIE : Un acheteur et un vendeur qui traitent ensemble constituent les deux contreparties d'une opération.

COTATION : Proposition d'un cours sur un produit financier devant correspondre au prix d'équilibre entre l'offre et la demande sur une valeur si le contrat est traité.

DANS LA MONNAIE (In the money) : Sur le marché des changes et action : on dit d'une option de vente (put) qu'elle est « dans la monnaie » quand son prix d'exercice est supérieur au prix du sous-jacent auquel elle est rattachée. Réciproquement, on dit d'une option d'achat (call) qu'elle est « dans la monnaie » quand son prix d'exercice est inférieur au prix du sous-jacent. Dans les deux cas on peut potentiellement exercer l'option. Sur le marché des taux : on dit d'un floor qu'il est « dans la monnaie » quand son prix d'exercice est supérieur au taux de swap de même maturité. Réciproquement, on dit d'un cap qu'il est « dans la monnaie » quand son prix d'exercice est inférieur au taux de swap de même maturité. Dans les deux cas, on peut potentiellement exercer l'option.

DIVERSIFICATION D'UN PORTEFEUILLE : Une stratégie de diversification consiste à inclure plusieurs titres en portefeuille, ce qui revient à réduire le risque global par rapport au risque des titres pris isolément.

ÉCHÉANCE : Date de remboursement d'un emprunt, d'un prêt ou de toute autre opération financière.

EURONEXT : EURONEXT PARIS SA (ex Paris-bourse SBF SA) pilote, anime et assure la promotion des marchés boursiers français.

EXERCER : Utiliser le droit d'acheter pour un call, de vendre pour un put, etc.

FUTURES : Contrats négociés sur un marché à terme réglementé. Portent sur tous types de sous-jacents. Leur nature standardisée leur confère une importante liquidité et supprime le risque de contrepartie transférée sur une chambre de compensation.

HORS DE LA MONNAIE (Out of the money) : Sur les marchés des changes ou actions : on dit d'une option de vente qu'elle est « hors de la monnaie » (out of the money) quand son prix d'exercice est inférieur au prix du sous-jacent auquel elle est rattachée. Réciproquement, on dit d'une option d'achat qu'elle est « hors de la monnaie » quand son prix d'exercice est supérieur au prix du sous-jacent. Dans les deux cas, exercer ces options est sans objet. Sur les marchés de taux d'intérêt : on dit d'un floor qu'il est « hors de la monnaie » quand son prix d'exercice est inférieur au taux de swap de même maturité. Réciproquement, on dit d'un cap qu'il est « hors de la monnaie » quand son prix d'exercice est supérieur au taux de swap de même maturité. Dans les deux cas, exercer ces options est sans objet.

MARCHÉ DES OPTIONS NÉGOCIABLES DE PARIS (MONEP) : Créé le 10/09/1987, le Monep est le marché d'options négociables de type américain sur actions et sur indices de la Bourse de Paris.

MARCHÉ PRIMAIRE : Marché des émissions de valeurs mobilières. Il désigne les transactions qui ont lieu au moment de l'émission (par opposition au marché secondaire).

MARCHÉ SECONDAIRE : Marché sur lequel sont traitées les valeurs mobilières après émission sur le marché primaire. Il désigne les transactions qui ont lieu après l'émission (par opposition au marché primaire).

MARCHÉ : Lieu de rencontre réel ou virtuel d'une offre et d'une demande d'un produit financier.

MATURITÉ : La maturité d'une obligation, d'un emprunt ou de toutes autres opérations financières, correspond à la durée qui reste entre aujourd'hui et l'échéance de l'opération.

NOTATION : Évaluation de certaines émissions de titres de créances prenant en compte la solvabilité de l'emprunteur et le risque de liquidité des titres, faites par des agences spécialisées (Fitch, Moody's, Standard and Poor's, ADEF,...). Celle-ci influe sur le coût des capitaux pour l'entreprise, puisqu'elle affecte la confiance des investisseurs et leur évaluation du risque de contrepartie. Cette note est accordée à l'émission et régulièrement revue.

OBLIGATION : Part de dette émise par un émetteur public ou privé.

OPTION : Une option est un droit et non une obligation d'acheter ou de vendre un sous-jacent (cash, terme, options et autres produits dérivés) à un prix défini, soit pendant une durée déterminée jusqu'à une échéance fixe (option américaine), soit à une date fixée (option européenne) le tout moyennant une prime.

OPTION DE TYPE AMÉRICAINE : Option exerçable à tout moment par l'acheteur, entre la mise en place de la position optionnelle et son échéance.

OPTION DE TYPE EUROPÉENNE : Option dont l'exercice ne peut intervenir qu'à l'échéance.

POSITION COURTE : Se dit d'une position vendeuse ou prêteuse sur un produit financier.

POSITION LONGUE : Se dit d'une position acheteuse ou emprunteuse sur un produit financier.

PRIME (Premium) : Terme utilisé pour définir le prix payé pour l'acquisition d'une option. La prime correspond au cumul de deux éléments : la valeur intrinsèque et la valeur temps.

PRIX D'EXERCICE (Strike price) : Pour une option, prix auquel on a le droit d'acheter le sous-jacent (pour un call), de le vendre (pour un put), d'emprunter (pour un cap), de prêter (pour un floor).

PRODUITS DÉRIVÉS (Derivative product) : Produits financiers dont la valeur est dépendante de celle d'un sous-jacent. Il existe des produits dérivés d'engagement ferme (swaps, terme) et des produits dérivés d'engagement conditionnel (options, warrants, etc.). Ces produits dérivés peuvent être classiques (plain vanilla) ou exotiques.

PUT : Se dit d'une option qui donne le droit à son acquéreur de vendre un actif sous-jacent à un prix déterminé.

RISQUE DE CONTREPARTIE : Un préteur prend un risque de ne jamais être remboursé. C'est ce que l'on appelle le risque de contrepartie. Le niveau du taux d'intérêt du prêt est fonction de ce risque. Plus la contrepartie est risquée, plus le taux d'intérêt demandé est élevé. La notation par des agences de rating est un moyen d'évaluer le risque de contrepartie.

SOUS-JACENT (Underlying) : Actif primaire, action, indice, obligation, taux d'intérêt, cours de change, matière première servant de support à des produits dérivés tels que les options, les contrats à terme ou les warrants.

SPÉCULER (To trade) : Prendre position à l'achat ou à la vente sur une valeur ou sur un produit financier en anticipant sa hausse ou sa baisse future.

STRATÉGIE DE COUVERTURE : Stratégie qui consiste à protéger un portefeuille contre une évolution défavorable du marché. La couverture peut être partielle ou totale. Les futures et les produits optionnels (options et warrants) constituent de bons produits de couverture de par leur facilité d'utilisation et leurs propriétés.

STRIKE : Voir Prix d'exercice.

TENDANCE : Direction dominante prise par les cours.

TRADER : Opérateur qui réalise des opérations d'achat et de vente de produits financiers pour le compte de sa société et non des clients, en vue de dégager des profits à court terme, au sein d'une salle des marchés.

VOLATILITÉ : Potentiel de variation (à la hausse comme à la baisse) des cours d'un sous-jacent. Elle est fonction de l'amplitude et de la fréquence des mouvements de cours par rapport à la moyenne.

ZÉRO-COUPON : Les obligations zéro coupon, également appelées STRIP, ne détachent aucun coupon durant la durée de vie du titre. Les intérêts sont payés à l'échéance de l'obligation, en même temps que le remboursement du capital. Usuellement, un zéro-coupon est utilisé dans les calculs et est tel que la somme des intérêts et du capital à l'échéance T vaut 1. Son prix en t est alors noté $B(t,T)$. Dans l'esprit des financiers, avoir $B(t,T)$ euros à la date t est équivalent à avoir 1 euro à la date ultérieure T.