

Invariants de G -nœuds

Victoria Lebed
Sous la direction de Marc Rosso

November 27, 2009

Table des matières

1	Théorie des nœuds : ses objets et objectifs	2
2	G-nœuds : un nouvel objet	4
3	Catégories G-enrubannées : la nouvelle vie des méthodes classiques	5
3.1	La catégorie des enchevêtrements	5
3.2	La notion d'une catégorie enrubannée	6
3.3	La notion d'une catégorie \mathcal{R} -enrubannée	7
3.4	La structure \mathcal{R} -enrubannée au niveau des groupes	8
3.5	Une passerelle entre G -enchevêtrements et une catégorie G -enrubannée	9
3.6	Théorème principal	9
4	Vers une catégorie GL_2-enrubannée	9

Pour un groupe G , on introduit la notion de nœud avec une G -structure, qui est depuis dix ans l'objet d'étude de plusieurs spécialistes dans la théorie des nœuds. Dans le cas où G est factorisable, on présente une manière d'aborder la classification des G -nœuds, fondée sur la notion de catégorie G -enrubannée. C'est une généralisation de la notion bien connue de catégorie enrubannée. On termine par une brève discussion des applications de nos constructions abstraites.

1 Théorie des nœuds : ses objets et objectifs

Un nœud (*orienté*) est l'image d'un plongement lisse (orienté) du cercle dans \mathbb{R}^3 . Cette définition s'accorde parfaitement avec notre intuition.

Ici on travaille principalement avec des objets orientés.

La question de base de la théorie des nœuds est leur classification à isotopie près. Un cas particulier de ce problème est de déterminer si l'on peut dénouer un nœud donné, i.e. le déformer pour obtenir un nœud trivial.

Un *invariant de nœuds* est une application de l'ensemble des nœuds vers un autre ensemble (par exemple l'anneau des polynômes sur \mathbb{C}), qui associe le même objet aux nœuds isotopes, mais qui peut éventuellement donner le même résultat pour deux nœuds qui ne sont pas isotopes. L'existence d'un invariant universel reste toujours une question ouverte, ce qui explique l'abondance de méthodes de construction des invariants de nœuds.

Les physiciens et les mathématiciens attaquent ce problème de classification depuis la fin du XIXème siècle. Plusieurs invariants ont vu le jour avant que Turaev et Reshetikhin ([9], 1988 et [7], 1990) ne trouvent une méthode systématique de construction des invariants dits quantiques des nœuds. Cette méthode est basée sur la notion de catégorie enrubannée. Les représentations de dimension finie des groupes quantiques (par exemple des algèbres quantiques enveloppantes des algèbres de Lie simples à une racine de l'unité) en donnent toute une série d'exemples.

Introduisons quelques généralisations naturelles de la notion de nœud. Un *entrelacs* est l'image d'un plongement lisse d'union disjointe d'un nombre fini de cercles dans \mathbb{R}^3 .

Posons $I := [0, 1]$.

On se place maintenant dans le système de coordonnées standard :

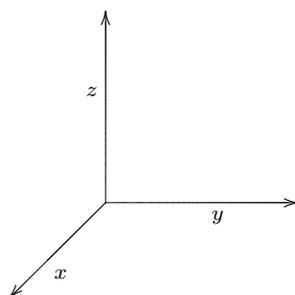


Figure 1: Coordonnées

Un *enchevêtrement* E de type $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ est l'image d'un plongement lisse

$$\underbrace{I \sqcup I \dots \sqcup I}_{k \text{ fois}} \sqcup \underbrace{S^1 \sqcup S^1 \dots \sqcup S^1}_{l \text{ fois}} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

avec composants orientés, tel que

$$\partial E = \underbrace{\{(0, 1, 0), \dots, (0, m, 0)\}}_{\partial_- E} \cup \underbrace{\{(0, 1, 1), \dots, (0, n, 1)\}}_{\partial_+ E},$$

et E intersecte $\mathbb{R}^2 \times \partial I$ perpendiculairement.

Voici un exemple
d'enchèvement
de type $(3, 1)$:

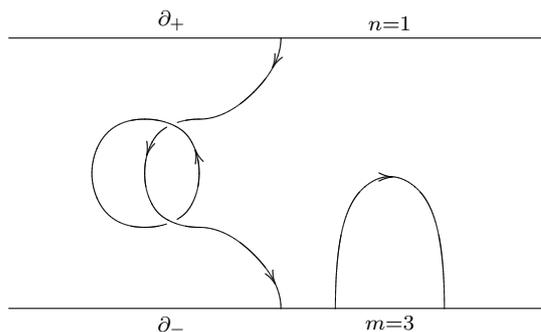


Figure 2: Un enchèvement

Les entrelacs et les nœuds apparaissent plus souvent dans la pratique, mais la plupart des résultats de la théorie des nœuds se généralisent facilement dans le cadre des enchèvements, et d'autre part la construction des invariants de nœuds nécessite souvent ce cadre plus général.

Une projection régulière de E avec l'information "dessus/dessous" pour chaque point double est appelée *un diagramme* de E . Notons que chaque courbe immergée générique avec l'information "dessus/dessous" pour chaque point double est un diagramme d'un enchèvement.

Le théorème de Reidemeister dit que deux diagrammes correspondent aux enchèvements isotopes ssi on peut obtenir l'un à partir de l'autre par l'isotopie ambiante et un nombre fini des mouvements locaux de Reidemeister (figure 3, pour toutes les orientations des brins possibles).

Un enchèvement en bande est un enchèvement E muni d'une section continue non-singulière ν de son fibré normal ; on demande que ν pointe dans la direction de l'axe x dans les points du bord ∂E . En d'autres termes, on épaissit chaque composant de l'enchèvement jusqu'à obtenir une bande, de telle sorte que les vecteurs de la section deviennent normaux pour cette bande (cf. figure 4). On peut déformer chaque enchèvement en bande pour obtenir un enchèvement dont la section est orientée dans la direction de l'axe x . On dit que de tels E sont *bien positionnés*. Le théorème de Reidemeister reste vrai pour les diagrammes d'enchèvements en bande bien positionnés, si l'on remplace le mouvement RI par RI' présenté dans la figure 4.

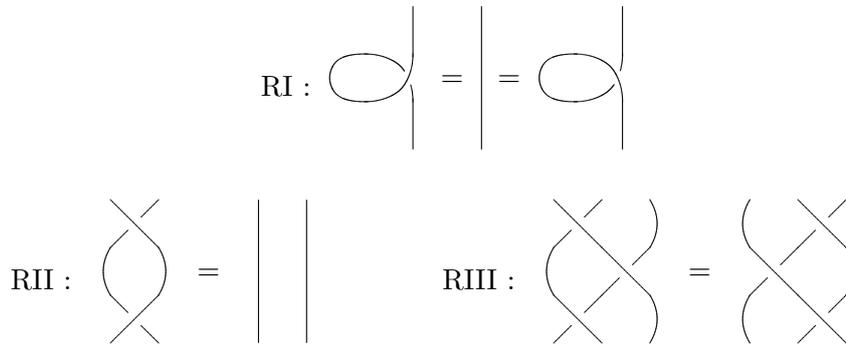


Figure 3: Mouvements de Reidemeister

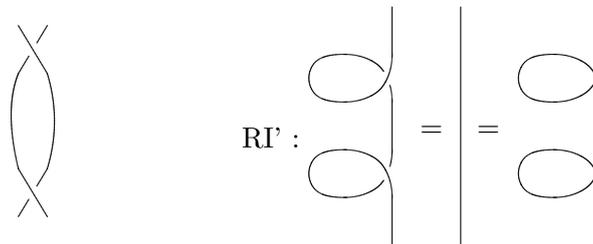


Figure 4: Enchevêtrements en bande : un exemple et le mouvement RI'

Remarque 1.1. Dans la suite le mot “enchevêtrement” va sous-entendre “enchevêtrement orienté en bande”.

2 G -nœuds : un nouvel objet

Dans les articles récents, Turaev ([10], 2000), Kashaev et Reshetikhin ([3], 2002 et [2], 2005), et d’autres mathématiciens (voir [1] et la bibliographie de [10]) introduisent un nouvel objet d’étude. Ils considèrent des nœuds, ou plus généralement des enchevêtrements dans $\mathbb{R}^2 \times I$, avec de l’information supplémentaire. Cette information consiste à donner une représentation du groupe fondamental du complémentaire

$$C_E = (\mathbb{R}^2 \times I) \setminus E$$

de l’enchevêtrement E dans un groupe G . Plus géométriquement, il s’agit d’une classe de jauge des connexions plates dans un G -fibré principal sur C_E , ou d’un “système de G -coordonnées” sur C_E . On appelle G -enchevêtrement, un enchevêtrement avec cette information additionnelle. L’objectif reste le même : la classification des G -enchevêtrements.

Notons que dans le cas du groupe trivial $G = 1$, on retrouve les enchevêtrements usuels.

Plusieurs points de vue sur les G -enchevêtrements ont vu le jour, ce qui résulte en la diversité des méthodes de construction des invariants. Mais la plupart des ces méthodes restent abstraites : on n'arrive pas à construire des invariants intéressants à partir de chaque groupe quantique, ce qui était possible sans G -structure. On présente ici l'approche de [2], qui admet la construction des "quasi-invariants" intéressants dans le cas où $G = GL_2$ ou, conjecturalement, dans le cas où G est un groupe de Lie simple. Cette approche est fondée sur la notion de catégorie G -enrubannée, que l'on décrira dans la section suivante. Le "quasi" signifie ici que les structures de catégorie G -enrubannée ne sont que partiellement définies.

3 Catégories G -enrubannées : la nouvelle vie des méthodes classiques

Pour une bonne introduction à la théorie des catégories on renvoie le lecteur à [5].

3.1 La catégorie des enchevêtrements

Les objets de la *catégorie des enchevêtrements* \mathcal{E} sont des suites finies de signes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{\pm\}^k$, et les morphismes de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ vers (η_1, \dots, η_n) sont des enchevêtrements de type (m, n) , avec l'orientation du composant adjacent au bord dans le point $(0, i, 0) \in \partial_- E$ (ou $(0, i, 1) \in \partial_+ E$) déterminée par le signe ε_i (resp. η_i) d'après les règles dans la figure 5.

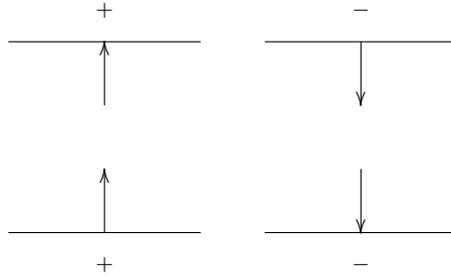


Figure 5: Compatibilité des orientations

La composition des deux morphismes, le morphisme identité et le produit tensoriel sont présentés dans la figure 6. D'après ce qui précède, la catégorie des enchevêtrements \mathcal{E} est équivalente à la catégorie des classes d'équivalence de Reidemeister des diagrammes, définie de façon analogue. Dans la suite on va souvent passer de l'une à l'autre sans le mentionner explicitement.

La définition de la *catégorie des G -enchevêtrements* \mathcal{E}_G est complètement analogue.

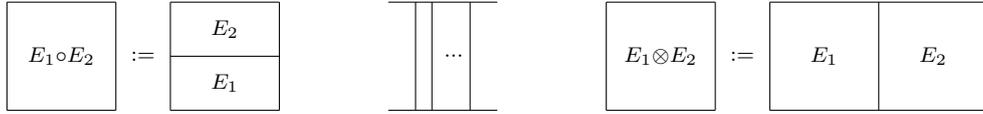


Figure 6: Composition, identité et produit tensoriel dans \mathcal{E}

Prenons un diagramme et traçons une grille de lignes horizontales. On voit facilement que chaque enchevêtrement est une composition des produits tensoriels des enchevêtrements de la figure 7 dits *élémentaires*. Ils sont des briques, à partir desquelles on peut construire n'importe quel enchevêtrement.

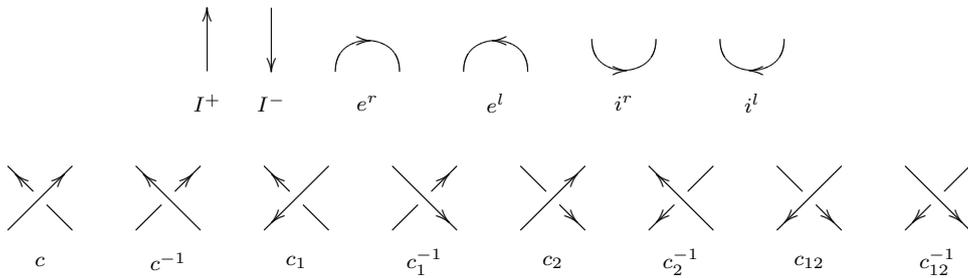


Figure 7: Enchevêtrements élémentaires

Pour un système complet de relations entre les enchevêtrements élémentaires, on renvoie le lecteur à [8] ou [4].

3.2 La notion d'une catégorie enrubannée

On se propose de construire un foncteur covariant monoïdal

$$F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C},$$

avec pour \mathcal{C} une catégorie monoïdale stricte que l'on comprend bien. Pour cela on essaie de trouver des morphismes dans \mathcal{C} qui satisfassent à toutes les relations établies pour des enchevêtrements élémentaires. Une structure enrubannée sur \mathcal{C} donne de tels morphismes. L'image $F(E)$ d'un enchevêtrement E devient alors un morphisme dans \mathcal{C} . En particulier, pour des entrelacs on obtient un invariant à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$, ce dernier étant dans la pratique un ensemble gentil – par exemple un corps.

La structure enrubannée sur \mathcal{C} consiste à :

- une structure monoïdale stricte ;
- un tressage ;
- une dualité ;

- un twist ou, ce qui revient au même, un s-pivot,

qui satisfont des conditions de compatibilité.

Le livre [8] est une bonne référence pour toutes les définitions. Ici on ne s'arrête que sur la notion de tressage.

Le tressage dans une catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} est une famille naturelle d'isomorphismes

$$c = \{c_{V,W} : V \otimes W \simeq W \otimes V\},$$

avec pour chaque triplet d'objets V, W, U , les relations

$$c_{V,W \otimes U} = (\text{Id}_W \otimes c_{V,U}) \circ (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U), \quad (1)$$

$$c_{V \otimes W, U} = (c_{V,U} \otimes \text{Id}_W) \circ (\text{Id}_V \otimes c_{W,U}). \quad (2)$$

On en déduit l'équation

$$\begin{aligned} (c_{W,U} \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_W \otimes c_{V,U}) \circ (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U) = \\ (\text{Id}_U \otimes c_{V,W}) \circ (c_{V,U} \otimes \text{Id}_W) \circ (\text{Id}_V \otimes c_{W,U}), \end{aligned} \quad (3)$$

connue sous le nom de *l'équation de Yang-Baxter*. Elle apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques.

Si l'on choisit le tressage comme image des croisements (c.f. figure 8), alors les propriétés du tressage nous donnent les relations de Reidemaister II et III dans l'image de F .



Figure 8: L'image des croisements

3.3 La notion d'une catégorie \mathcal{R} -enrubannée

Pour travailler avec des G -enchevêtrements, il s'avère utile de généraliser la notion de tressage, et donc la notion de catégorie enrubannée.

Une catégorie \mathcal{R} -enrubannée est une catégorie monoïdale \mathcal{C} munie d'une dualité, d'un pivot, d'un "flip" généralisé, i.e. d'un bifoncteur inversible

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \\ (V, W) &\mapsto (x_L(V, W), x_R(V, W)), \end{aligned}$$

et d'un tressage généralisé, i.e. d'un système d'isomorphismes fonctoriels

$$c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow x_L(V, W) \otimes x_R(V, W).$$

On demande que ces structures satisfassent aux conditions de compatibilité, établies dans mon mémoire M2. On donne à titre d'exemple une de ces conditions, appelée *équation de Yang-Baxter holonomique* :

$$\begin{aligned}
& (c_{x_L(V,W),x_L(x_R(V,W),U)} \otimes \text{Id}_{x_R(x_R(V,W),U)})^\circ \\
& \quad (\text{Id}_{x_L(V,W)} \otimes c_{x_R(V,W),U})^\circ \\
& \quad (c_{V,W} \otimes \text{Id}_U) \\
& \quad = \\
& \quad (\text{Id}_{x_L(V,x_L(W,U))} \otimes c_{x_R(V,x_L(W,U)),x_R(W,U)})^\circ \\
& \quad (c_{V,x_L(W,U)} \otimes \text{Id}_{x_R(W,U)})^\circ \\
& \quad (\text{Id}_V \otimes c_{W,U})
\end{aligned} \tag{4}$$

pour chaque triplet V, W, U d'objets de \mathcal{C} .

Notons que le "flip" $(V, W) \mapsto (W, V)$ et le tressage habituel sont des cas particuliers de nos structures.

3.4 La structure \mathcal{R} -enrubannée au niveau des groupes

Un groupe G est dit *factorisable* en deux sous-groupes $G_\pm \subseteq G$ si chaque élément g de G admet une unique décomposition

$$g = g_+ g_-^{-1}, \quad g_\pm \in G_\pm. \tag{5}$$

Remarquons que chaque groupe est trivialement factorisable : on prend $G_\pm = G$ et $G_\mp = 1$.

On peut munir un groupe factorisable G d'une autre structure de groupe, donnée par la multiplication

$$g \star h = g_+ h_+ h_-^{-1} g_-^{-1},$$

le même élément neutre 1_G et l'inverse

$$i(g) = g_+^{-1} g_-.$$

L'application

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} : G \times G & \rightarrow G \times G \\
(c, d) & \mapsto (x_L(c, d), x_R(c, d)),
\end{aligned}$$

donnée par

$$\begin{aligned}
x_L &= x_L(c, d) = c_- d c_-^{-1}, \\
x_R &= x_R(c, d) = (x_L)_+^{-1} c (x_L)_+,
\end{aligned}$$

munit le groupe (G, \star) d'une structure tressée, qui correspond à la notion catégorique de tressage généralisé au niveau des groupes. Cette application, au premier regard artificielle, provient de l'étude de la topologie du complémentaire de l'enchevêtrement. En plus elle donne une notion naturelle de G -coloriage, qui s'avère équivalente à la notion de G -structure.

3.5 Une passerelle entre G -enchevêtrements et une catégorie G -enrubannée

Une catégorie \mathcal{C} est dite *fibrée sur* l'ensemble A si elle est munie d'une projection $\pi = \pi_{\mathcal{C}} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow A$ avec

$$\pi(V) \neq \pi(W) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) = \emptyset.$$

Une catégorie \mathcal{R} -enrubannée \mathcal{C} , fibrée sur un groupe factorisable G , est dite G -enrubannée si π respecte la structure \mathcal{R} -enrubannée.

Soit \mathcal{C} une catégorie G -enrubannée. Appelons *section* une famille \mathcal{A}_g d'éléments de \mathcal{C} paramétrés par G , telle que

$$\pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_g) = g \quad \forall g \in G$$

et

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_g, \mathcal{A}_h) = (\mathcal{A}_{x_L(g,h)}, \mathcal{A}_{x_R(g,h)}) \quad \forall g, h \in G.$$

Une section donne une passerelle entre la catégorie des G -enchevêtrements \mathcal{E}_G et la catégorie G -enrubannée \mathcal{C} donnée.

3.6 Théorème principal

On est enfin prêt à formuler un résultat fondamental, qui est au cœur de notre construction des invariants de G -enchevêtrements.

Théorème 3.1. *Etant donné*

1. *un groupe factorisable G ;*
2. *une catégorie \mathcal{C} G -tressée ;*
3. *une section \mathcal{A} de \mathcal{C} ,*

on peut définir un foncteur

$$F_{\mathcal{A}} : \mathcal{E}_G \longrightarrow \mathcal{C},$$

qui donne des invariants de G -enchevêtrements.

4 Vers une catégorie GL_2 -enrubannée

Suivant Kashaev et Reshetikhin ([2],[3]), on étudie l'exemple où $G = GL_2$. Ce groupe est factorisable en deux sous-groupes

$$\begin{aligned} B_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}^* \right\}, \\ B_- &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^* \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

dans l'ouvert de Zariski

$$GL_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \in GL_2 \mid v \neq 0 \right\}$$

de GL_2 .

On aimerait bien avoir une application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}_{GL_2^*} : GL_2^* \times GL_2^* &\rightarrow GL_2^* \times GL_2^* \\ (g, d) &\mapsto (\widetilde{x}_L(g, d) = g_- d g_-^{-1}, \widetilde{x}_R(g, d) = (\widetilde{x}_L)_+^{-1} g (\widetilde{x}_L)_+). \end{aligned}$$

Mais GL_2^* n'est pas un sous-groupe de GL_2 , et en faisant la GL_2 -multiplication $g_- d g_-^{-1}$, on peut sortir de l'ouvert GL_2^* ! Plus précisément, en passant aux coordonnées, \mathcal{R} s'écrit comme

$$\begin{aligned} (g = \left(\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right), g' = \left(\begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} \right)) &\mapsto \\ \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta' a \\ 0 & \alpha' + \beta' b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'(1 + \beta' \alpha'^{-1} b) & 0 \\ (b' + a' b)(\alpha' + \beta' b) - b & (\alpha' a)^{-1} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(\begin{pmatrix} 1 & \beta' + \alpha' \beta - \alpha' \beta' \alpha (\alpha' + \beta' b)^{-1} \\ 0 & \alpha' \alpha (\alpha' + \beta' b)^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' a (\alpha' + \beta' b)^{-1} & 0 \\ b (\alpha' + \beta' b)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Le résultat est un élément bien défini de $GL_2^* \times GL_2^*$ ssi

$$\alpha' + \beta' b \neq 0. \tag{7}$$

Cette condition mélange les coefficients de g et g' , ce qui rend difficile la recherche d'un bon domaine de définition pour \mathcal{R} .

Cette construction reste tout de même intéressante, parce que l'étude des représentations de l'algèbre quantique enveloppante de gl_2 à une racine de l'unité permet de définir une catégorie \mathcal{C} quasi- GL_2 -tressée et une section \mathcal{A} de \mathcal{C} , nécessaires pour appliquer notre théorème 3.1. Le mot "quasi" signifie ici que le tressage n'est que partiellement défini, de même que le tressage sur GL_2^* .

Références

- [1] Basilhac, S., Benedetti, R. *Quantum Hyperbolic State Sum Invariants of 3-Manifolds*. Preprint GT/0101234.
- [2] Kashaev, R., Reshetikhin, N. *Invariants of tangles with flat connections in their complements*. Proceedings Symposia of Pure mathematics, "Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics", 73, 2005, pp. 151–172.
- [3] Kashaev, R., Reshetikhin, N. *Braiding for the quantum gl_2 at roots of unity*. Preprint math/0410182.

- [4] Kassel, C., Rosso, M. , Turaev, V. *Quantum Groups and Knot Invariants*. Panoramas et Synthèses, 5, Société Mathématique de France, 1997.
- [5] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Text in Mathematics, 1971.
- [6] Reshetikhin, N. *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*. Commun. Math. Phys., 170, 1995, pp. 79-99.
- [7] Reshetikhin, N., Turaev, V. *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*. Comm. Math. Phys., 127, 1990 (1), pp. 1–26.
- [8] Turaev, V.G. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. De Gruyter Studies in Mathematics, 18, 1994.
- [9] Turaev, V.G. *The Yang-Baxter equation and invariants of links*. Invent. Math., 92, 1988, pp. 527–553.
- [10] Turaev, V.G. *Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories*. Preprint GT/0005291.
- [11] Turaev, V.G., Viro, O. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*. Topology, 31, 1992 (4), pp. 865–902.