Décomposition d'un entier en somme de carrés

Benoît Louise Lebreton Romain

22 janvier 2007

Sous la direction de Nicolas Bergeron, que nous remercions de son aide précieuse.

Table des matières

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à un problème de dénombrement qui se résout de manière originale. Lagrange a montré que tout entier naturel s'écrit comme somme de quatre carrés. On peut alors se demander quel est le nombre de façons d'écrire un entier donné en somme de 4 carrés. Jacobi a résolu ce problème vers 1830. Notons $r_4(n)$ le nombre de décompositions de l'entier n en somme de 4 carrés. La formule de Jacobi est :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d.$$

Le but de cet exposé est de donner une démonstration complète de la formule de Jacobi par une méthode moderne, qui permet de plus d'obtenir un équivalent explicite quand n tend vers l'infini du nombre de façons d'écrire l'entier n comme somme de d carrés, avec $d \geqslant 4$.

1 Préambule

Voici un tableau récapitulatif des entiers de 0 à 12, décomposables ou non, en somme de carrés.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	...
carrés d'entiers	✓	✓			✓					✓					...
sommes de 2 carrés	✓	✓	✓		✓	✓			✓	✓	✓	✓			...
sommes de 3 carrés	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	...
sommes de 4 carrés	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	...

On remarque que les premiers entiers positifs s'écrivent tous comme somme de 4 carrés d'entier. Mais 7 ne s'écrit pas comme somme de 3 carrés. On sait cependant caractériser les nombres qui s'écrivent comme somme de 2 ou 3 carrés.

Théorème 1 (Fermat, Euler). *Un entier naturel n s'écrit comme somme de 2 carrés si et seulement si la valuation $v_p(n)$ est paire pour tout p premier, $p \equiv 3 \mod 4$.*

Démonstration. L'application

$$\begin{array}{rccc} N : & \mathbb{Z}[i] \backslash \{0\} & \to & \mathbb{N}^* \\ & a+ib & \mapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

est une norme multiplicative sur l'anneau $\mathbb{Z}[i]$; son image Σ est l'ensemble des entiers n qui s'écrivent comme somme de deux carrés. L'ensemble Σ est en particulier stable par multiplication. Cherchons d'abord les entiers premiers somme de deux carrés.

Si p est somme de deux carrés, $p \equiv 0, 1$ ou $2 \mod 4$. Il est donc égal à 2 ou bien $\equiv 1 \mod 4$. Montrons la réciproque.

On a immédiatement $2 \in \Sigma$. Supposons donc que $p \equiv 1 \mod 4$. Alors -1 est un carré modulo p : $-1 \equiv a^2 \mod p$, et $p \mid a^2 + 1 = (a+i)(a-i)$; l'idéal (p) est donc nécessairement réductible [1] et $p = xy$ avec $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ qui ne sont pas des unités, *i.e.* $N(x) \neq 1$ et $N(y) \neq 1$. Or $N(p) = p^2 = N(x)N(y)$. Donc $p = N(x) = N(y) \in \Sigma$.

On conclut la démonstration du théorème en décomposant n en facteurs premiers : $n = \Pi p^{v_p(n)}$. Supposons $n = a^2 + b^2 \in \Sigma$. Si $p \equiv 3 \mod 4$, alors $p \notin \Sigma$ et (p) est irréductible. On a donc $p \mid n = (a+ib)(a-ib)$ donc $p \mid a+ib$ ou $a-ib$. Or $p = \bar{p}$ donc $p \mid a+ib$ et $a-ib$ et $p^2 \mid n$. On conclut alors la démonstration par récurrence descendante.

□

Le résultat suivant, plus délicat, repose sur le classification des formes quadratiques rationnelles en 3 variables (cf. [Serre]).

[1] Rappelons que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal puisqu'euclidien (ce que l'on vérifie facilement en plongeant $\mathbb{Z}[i]$ dans le plan complexe).

Théorème 2 (Gauß). *Un entier naturel n s'écrit comme somme de 3 carrés si et seulement si il n'est pas de la forme $4^a(8b+7)$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.*

L'existence de l'algèbre des quaternions permet de montrer plus facilement le théorème suivant.

Théorème 3 (Lagrange). *Tout entier naturel s'écrit comme somme de quatre carrés d'entier.*

Pour $d, n \in \mathbb{N}$, posons

$$r_d(n) = Card\{(n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : n = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_d^2\}.$$

C'est le nombre de décompositions de n en somme de d carrés. Il découle du théorème 3 que pour tout $n, d \in \mathbb{N}$ avec $d \geqslant 4$, $r_d(n) \geqslant 1$.

Remarquons que la définition de $r_d(n)$ tient compte de l'ordre des éléments de la décomposition de n en somme de d carrés ainsi que des solutions négatives.

Exemple. Traitons le cas de $n = 12$: les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Ceux qui ne sont pas des multiples de 4 sont $1, 2, 3, 6$. La formule de Jacobi donne donc $r_4(12) = 8 \cdot 12 = 96$. Vérifions ce résultat en explicitant les 96 décompositions.

Les carrés pouvant intervenir dans la décomposition de 12 sont 0,1,4 et 9. Les 2 seules façons d'écrire 12 comme somme de 4 carrés sont $12 = 9+1+1+1$ et $12 = 4+4+4+0$. Les éléments de $\mathbb{Z}^4$ dont le carré comporte un 9 et trois 1 sont $\{(\pm 3, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 3, \pm 1, \pm 1), \ldots\}$. Il y en a $4 \cdot 2^4$. Les éléments de $\mathbb{Z}^4$ dont le carré comporte un 0 et trois 4 sont $\{(0, \pm 2, \pm 2, \pm 2), (\pm 2, 0, \pm 2, \pm 2), \ldots\}$. Il y en a $4 \cdot 2^3$. On a ainsi trouvé $4 \cdot 2^3 \cdot (2+1) = 12 \cdot 8 = 96$ décompositions.

Afin d'étudier les $r_d(n)$, on introduit la série génératrice

$$\phi_d(q) = \sum_{m=0}^{\infty} r_d(n) q^n.$$

Il se trouve que ces séries ϕ_d ont des symétries miraculeuses, qui vont nous permettre de les réécrire, afin d'obtenir une expression de r_d.

2 Le jardin des délices modulaires

2.1 Premières définitions

Notons $\mathbf{H}$ le demi plan hyperbolique (ou demi-plan de Poincaré)

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) > 0\}.$$

Notons

$$\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) : N|c\}.$$

Nous noterons Γ un groupe égal à $\Gamma(1)$ ou à un $\Gamma_0(N)$.

Le groupe $\Gamma(1)$ agit sur $\mathbf{H}$ par homographie :

$$\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{où } z \in \mathbf{H} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

L'action de $\gamma \in \Gamma(1)$ envoie bien $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$ car $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z) = \dfrac{\mathcal{I}m(z)}{|cz+d|^2}$.

Remarque. *On a ainsi une action de* $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ *sur* $\mathbf{H}$ *puisque l'action de* γ *ne dépend que de sa classe dans* $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Définition 4. *Pour* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ *et* $z \in \mathbf{H}$*, on pose*

$$j(\gamma, z) = \left(\frac{dz}{d(\gamma \cdot z)} \right)_z = (cz+d)^2$$

Proposition 5. *La fonction* j *vérifie l'équation*

$$j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma' \cdot z) j(\gamma' \cdot z)$$

Démonstration. Écrire $j(\gamma, z) = \left(\frac{dz}{d(\gamma \cdot z)} \right)_z$ et appliquer la règle de dérivation pour les fonctions composées. □

Définition 6. *Soit* $k \in \mathbb{N}$*. On appelle fonction faiblement modulaire de poids* $2k$ *pour* Γ *toute fonction méromorphe* f *sur le demi plan* $\mathbf{H}$*, telle que*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ f(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^k f(z).$$

La définition précédente signifie que la forme $f(z)(\mathrm{d}z)^k$ est Γ-invariante, c'est-à-dire

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ f(\gamma \cdot z)(\mathrm{d}(\gamma \cdot z))^k = f(z)(\mathrm{d}z)^k.$$

La proposition 5 rend la définition cohérente car

$$f((\gamma\gamma') \cdot z) = j(\gamma\gamma', z) f(z) = j(\gamma, \gamma' \cdot z) j(\gamma', z) f(z) = j(\gamma, \gamma' \cdot z) f(\gamma' \cdot z) = f(\gamma \cdot (\gamma' \cdot z))$$

Soit f une fonction faiblement modulaire. D'après la définition appliquée à $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $f(z) = f(z+1)$. On peut donc écrire f comme somme de sa série de Fourier (cf. Annexe A), et l'exprimer comme fonction de $q = e^{2i\pi z}$, que nous noterons $\tilde{f}$:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi n y} e^{2i\pi n x}$$

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n q^n.$$

La fonction $\tilde{f}$ est méromorphe dans le disque $|q| < 1$ privé de l'origine car f est méromorphe sur $\mathbf{H}$ et que $z \mapsto e^{2i\pi z}$ est localement biholomorphe et envoie $\mathbf{H}$ sur le disque unité privé de l'origine.

Définition 7. *Soit* f *une fonction faiblement modulaire. Si* $\tilde{f}$ *définie comme précédemment se prolonge en une fonction méromorphe (resp. holomorphe) à l'origine, on dit que* f *est méromorphe (resp. holomorphe) à l'infini.*

Cela signifie que $\tilde{f}$ admet un développement de Laurent au voisinage de l'origine :

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n q^n$$

où les c_n sont nuls pour n assez petit (resp. pour $n < 0$).

Lorsque f est holomorphe à l'infini, on pose $f(\infty) = \tilde{f}(0)$, c'est la valeur de f à l'infini.

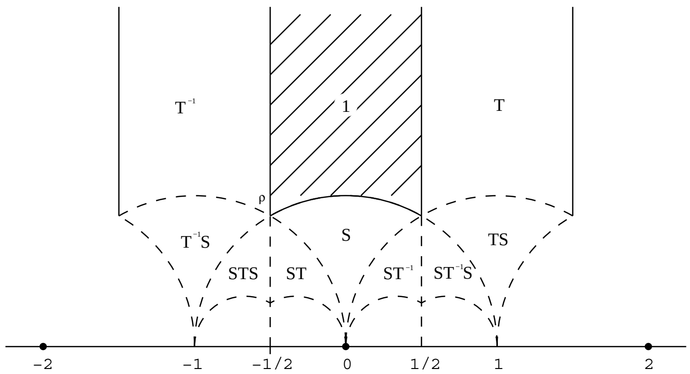

FIG. 1 – Domaine fondamental de $\Gamma(1)$ et ses images par quelques éléments.

2.2 Étude du groupe $\Gamma(1)$

Soient S et T les classes des éléments $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\Gamma(1)$. On a les relations :

$$S^2 = 1, \qquad (ST)^3 = 1.$$

Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbf{H}$ formé des points z tels que $|z| \geqslant 1$ et $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant 1/2$. Nous allons montrer que $\mathcal{D}$ est un *domaine fondamental* de l'action de $\Gamma(1)$ sur $\mathbf{H}$. En d'autres termes :

Théorème 8. *1. Pour tout $z \in \mathbf{H}$, il existe $\gamma \in \Gamma(1)$ tel que $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$.*

2. Supposons que deux points distincts $z, z' \in \mathcal{D}$ soient congrus modulo $\Gamma(1)$. On a alors $z \in \partial D$, ou plus précisément, soit $\mathcal{R}e(z) = \pm 1/2$ et $z' = z \pm 1$, soit $|z| = 1$ et $z' = -1/z = -\overline{z}$.

3. Soit $z \in \mathcal{D}$, et soit $I(z) = \{\gamma \in \Gamma(1)/\{\pm 1\} : \gamma \cdot z = z\}$ le stabilisateur de z dans $\Gamma(1)/\{\pm 1\}$. On a $I(z) = \{1\}$ sauf dans les trois cas suivants :
- *$z = i$, auquel cas $I(z)$ est le groupe d'ordre 2 engendré par S ;*
- *$z = \rho = e^{\frac{2i\Pi}{3}}$, auquel cas $I(z)$ est le groupe d'ordre 3 engendré par ST ;*
- *$z = -\overline{\rho}$, auquel cas $I(z)$ est le groupe d'ordre 3 engendré par TS.*

Démonstration. Soit Γ' le groupe engendré par S et T. Nous allons montrer qu'*il existe $\gamma' \in \Gamma'$ tel que $\gamma' \cdot z \in \mathcal{D}$*, ce qui démontrera l'assertion *1.* du théorème 8. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$, on a

$$\mathcal{I}m(\gamma \cdot z) = \frac{\mathcal{I}m(z)}{|cz + d|^2}. \tag{1}$$

Comme c et d sont entiers, le nombre de couples (c, d) tels que $|cz + d|$ soit inférieur à un nombre donné est *fini*. On en conclut qu'il existe $\gamma \in \Gamma'$ tel que $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z)$ soit maximum. On peut supposer, quitte à composer par un T^k, que la partie réelle de $\gamma \cdot z$ est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. L'élément $\gamma \cdot z$ appartient à $\mathcal{D}$; en effet, il suffit de voir que $|\gamma \cdot z| \geqslant 1$, sinon, si l'on avait $|\gamma \cdot z| < 1$, l'élément $\frac{-1}{\gamma \cdot z}$ aurait une partie imaginaire strictement plus grande que $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z)$, ce qui est impossible.
Prouvons maintenant l'assertion 2. du théorème 8 :
Soient $z \in \mathcal{D}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ tels que $\gamma \cdot z \in D$. Quitte à remplacer (z, γ) par $(\gamma \cdot z, \gamma^{-1})$, on peut supposer que $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z) \geqslant \mathcal{I}m(z)$, i.e. que $|cz + d|$ est $\leqslant 1$. Ceci est impossible si $|c| \geqslant 2$ car $|c|\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant |c\, \mathcal{I}m(z)| \leqslant |cz + d| \leqslant 1$. Restent donc les cas $c = 0, 1, -1$.
- Si $c = 0$ alors $d = \pm 1$ et γ est une translation par $\pm b$. Comme $\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{R}e(\gamma \cdot z)$ sont compris entre $-1/2$ et $1/2$ alors l'un vaut $-1/2$ et l'autre $1/2$.

- Si $c = 1$ alors $|z + d| \leqslant 1$ entraîne $d = 0$, sauf si $z = \rho$ (resp. $z = -\overline{\rho}$) auquel cas on peut avoir $d = 0, 1$ (resp. $d = 0, -1$). Le cas $d = 0$ donne $|z| \leqslant 1$ donc $|z| = 1$. Comme $ad - bc = 1$ alors $b = -1$. Donc $\gamma \cdot z = a - \frac{1}{z}$ et la première partie de la discussion montre que $a = 0$ sauf si $\mathcal{R}e(z) = \pm 1/2$, *i.e.* si $z = \rho$ ou $-\overline{\rho}$, auquel cas on peut prendre $a = 0, -1$ ou $a = 0, 1$. Le cas $z = \rho$, $d = 1$, donne $a - b = 1$ et $\gamma \cdot \rho = a - 1/(1 + \rho) = a + \rho$, d'où $a = 0, 1$; on traite de même le cas $z = -\overline{\rho}$, $d = -1$.
- Le cas $c = -1$ se ramène au cas $c = 1$ en changeant les signes de a, b, c, d (ce qui ne change pas $\overline{\gamma}$).

Ceci achève la vérification des assertions *2.* et *3.* et donc du théorème 8. □

Théorème 9. *Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)/\{\pm 1\}$ est engendré par S et T.*

Démonstration. Soit γ un élément de $\Gamma(1)$. Choisissons un point z_0 *intérieur* à $\mathcal{D}$ (par exemple $2i$), et soit $z = \gamma \cdot z_0$. On a vu plus haut qu'il existe $\gamma' \in \Gamma'$ tel que $\gamma' \cdot z \in \mathcal{D}$. Les points z_0 et $\gamma' \cdot z = (\gamma'\gamma) \cdot z_0$ de $\mathcal{D}$ sont congrus modulo $\Gamma(1)$, et l'un d'eux est intérieur à $\mathcal{D}$. D'après *2.* et *3.*, il en résulte que ces points sont confondus et que $\gamma'\gamma = \pm 1$. On a bien $\gamma \in \Gamma'$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque. *1. On identifie S, T et leurs images respectives dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.*

2. En fait, $PSL_2(\mathbb{Z}) = < S, T : S^2 = 1, (ST)^3 = 1 >$, c'est-à-dire que $PSL_2(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des mots en S et T, modulo les 2 relations $S^2 = 1$ et $(ST)^3 = 1$.

Soient les deux droites hyperboliques

$$\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1 \text{ et } \mathcal{R}e(z) > 0\} \text{ et } \mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbf{H} : \mathcal{R}e(z) \neq 1/2\}.$$

Posons $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

Corollaire 10. *L'application canonique $\mathcal{D}' \to \mathbf{H}/_{\Gamma(1)}$ est bijective.*

2.3 Étude du groupe $\Gamma_0(4)$

2.3.1 Préliminaires

Posons $\quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4) \quad$ et $\quad b = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$

$$\Gamma_{a,b} = \text{ le sous-groupe de } \Gamma_0(4) \text{ engendré par } a, b$$

$$\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)} = \left\{z \in \mathbf{H} \ : \ \big(|\mathcal{R}e(z)| \leqslant 1/2\big) \text{ et } \big(|z \pm 1/4| \geqslant 1/4\big)\right\}.$$

Montrons d'abord que $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ est un domaine fondamental de l'action de $\Gamma_0(4)$ sur $\mathbf{H}$.

Proposition 11. *L'indice de $\Gamma_0(4)$ dans $\Gamma(1)$ est 6.*

Démonstration. Le morphisme de groupe canonique $\varphi : \Gamma(1) \to SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})$ est surjectif. Soit

$$B = \varphi(\Gamma_0(4)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}) : c = 0 \right\}.$$

L'application φ passe au quotient et donne une application

$$\tilde{\varphi} : \Gamma(1)/_{\Gamma_0(4)} \to SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})/_{B}.$$

L'application $\tilde{\varphi}$ est surjective car φ l'est. Elle est injective car $\varphi^{-1}(B) = \Gamma_0(4)$. Donc l'indice $[\Gamma(1) : \Gamma_0(4)] = [SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}) : B]$.

Lemme. *Le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})$ est 96.*

Démonstration. On choisit d'abord le vecteur colonne gauche de la matrice. On a le choix parmi tous les vecteurs sauf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $12 = 4 \cdot 4 - 4$ possibilités.

Pour le deuxième vecteur, on a le choix parmi tous les vecteurs sauf les 4 précédents et les multiples du premier vecteurs (qui ne peuvent être parmi les 4 précédents). Ce qui nous donne $8 = 4 \cdot 4 - 4 - 4$ possibilités. Finalement le cardinal recherché est $12 \cdot 8 = 96$. □

Par conséquent, le cardinal de $SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})$ est 48. Le cardinal de B est 8 (2 possibilités pour la diagonale et 4 pour le coin supérieur droit). Finalement

$$[\Gamma(1) : \Gamma_0(4)] = [SL_2(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}) : B] = 6$$

□

Proposition 12. *Les éléments 1, S, $T^{-1}S$, TS, $T^{-2}S$ ou T^2S, $ST^{-2}S$ ou ST^2S sont des représentants de chaque classe d'équivalence de $\Gamma/_{\Gamma_0(4)}$.*

Démonstration. On vérifie aisément à la main que ces éléments ne sont pas dans la même classe. Par exemple pour TS et $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$, on a $(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S})^{-1} \cdot \mathrm{TS} = \mathrm{ST}^2\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \backslash \Gamma_0(4)$. Comme l'indice est 6, on représente bien toutes les classes. □

Notons les éléments précédents respectivement g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 et g_5', g_6 et g_6'.

2.3.2 Résultats

Théorème 13 (Domaine fondamental).

1. *Pour tout $z \in \mathbf{H}$, il existe $\Gamma \in \Gamma_0(4)$ tel que $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$.*
2. *Supposons que deux points distincts $z, z' \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ soient congrus modulo $\Gamma_0(4)$. On a alors, soit $Re(z) = \pm 1/2$ et $z' = z \pm 1$, soit $|z \pm 1/4| = 1/4$ et $z' = 1/(\mp 4z + 1)$.*
3. *$\forall z \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$, $I(z) = \{1\}$ où $I(z)$ est le stabilisateur de z dans $\Gamma_0(4)/\{\pm 1\}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les demi pavés

$$\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathcal{D} : Re(z) \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{z \in \mathcal{D} : Re(z) \geqslant 0\}.$$

Alors

$$\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)} = (\bigcup_{i=1}^{4} g_i^{-1}\mathcal{D}) \bigcup (\bigcup_{i=5}^{6} g_i^{-1}\mathcal{D}_1) \bigcup (\bigcup_{i=5}^{6} g_i'^{-1}\mathcal{D}_2).$$

De même notons $\mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_2'$ les demi pavés restreints

$$\mathcal{D}_1' = \{z \in \mathcal{D}' : Re(z) < 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2' = \{z \in \mathcal{D}' : Re(z) \geqslant 0\}.$$

Posons

$$\mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)} = \left((\bigcup_{i=1}^{4} g_i^{-1}\mathcal{D}') \bigcup (\bigcup_{i=5}^{6} g_i^{-1}\mathcal{D}_1') \bigcup (\bigcup_{i=5}^{6} g_i'^{-1}\mathcal{D}_2') \right) - \{\mathrm{S} \cdot \rho, \mathrm{ST}^{-1} \cdot i, \mathrm{ST}^{-2} \cdot i\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}$ est dessiné dans la figure 2. C'est une restriction de $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ pour laquelle on n'a qu'un représentant par classe.

Montrons l'assertion 1. : Soit $z \in \mathbf{H}$, il existe $g \in \Gamma(1)$ tel que $g \cdot z \in \mathcal{D}'$. Posons

$$\gamma = \begin{cases} g g_i^{-1} & \text{si } g \sim g_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ g g_i^{-1} & \text{si } g \sim g_i \text{ pour } i = 5, 6 \text{ et } g \cdot z \in \mathcal{D}_1' \\ g g_i'^{-1} & \text{si } g \sim g_i \text{ pour } i = 5, 6 \text{ et } g \cdot z \in \mathcal{D}_2'. \end{cases}$$

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1	S	$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$	TS	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{S}$	$\mathrm{ST}^{-2}\mathrm{S}$
$S\times$	$\downarrow$				
S	1	$\mathrm{TS}\underline{\mathrm{T}}$	$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\underline{\mathrm{T}^{-1}}$	$\mathrm{ST}^{-2}\mathrm{S}$	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{S}$
g_2	g_1	$g_4\mathrm{T}$	$g_3\mathrm{T}^{-1}$	g_6	g_5

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1	S	$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$	TS	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{S}$	$\mathrm{ST}^{-2}\mathrm{S}$
$ST\times$	$\downarrow$				
$\mathrm{S}\underline{\mathrm{T}}$	$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\underline{\mathrm{T}^{-1}}$	1	$\mathrm{ST}^{-2}\mathrm{S}\underline{a^{-1}}$	$\mathrm{TS}\underline{\mathrm{T}}$	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{S}\underline{\mathrm{T}^{-1}a}$
$g_2\mathrm{T}$	$g_3\mathrm{T}^{-1}$	g_1	g_6a^{-1}	$g_4\mathrm{T}$	$g_5\mathrm{T}^{-1}a$

TAB. 1 – Action de S et ST à gauche sur $\Gamma/_{\Gamma_0(4)}$.

Alors $\gamma \in \Gamma_0(4)$ et $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}$.

Passons aux assertions 2. et 3. : Soient $z, z' \in \mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}$ et $\gamma \in \Gamma_0(4)$ tel que $\gamma \cdot z = z'$. Alors il existe $g, g' \in \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g'_5, g_6, g'_6\}$ tel que

$$g \cdot z \in \mathcal{D}' \quad \text{ et } \quad g' \cdot z' = (g'\gamma g^{-1}).(g \cdot z) \in \mathcal{D}'.$$

Ces points sont congrus modulo $\Gamma(1)$; ils sont donc égaux. Supposons que le point $g \cdot z = g' \cdot z' \in \mathcal{D}'_1$ alors $g, g' \in \mathrm{G} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$. Ainsi $g'\gamma g^{-1} \in I(g \cdot z) \subset (I(i) \cup I(\rho))$. Quatre cas se présentent.

- Soit $g'\gamma g^{-1} = 1$, alors en regardant les classes on a $g = g'$ puis $\gamma = 1$.
- Soit $g'\gamma g^{-1} = \mathrm{S}$, *i.e.* $\mathrm{S}g = g'\gamma$. Le tableau 1 donne $\gamma \in \{1, \mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}\}$. Or $\gamma = \mathrm{T}$ ou T^{-1} est impossible car $(\mathrm{T}.\mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}) \cap \mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)} = \emptyset$. Donc $\gamma = 1$.
- Soit $g'\gamma g^{-1} = \mathrm{ST}$, *i.e.* $\mathrm{ST}g = g'\gamma$. Le tableau 1 donne $\gamma \in \{1, \mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}, a^{-1}, \mathrm{T}^{-1}a\}$. Comme a envoie l'extérieur du cercle $\mathcal{C}(-1/4, 1/4)$ dans l'intérieur du cercle $\mathcal{C}(1/4, 1/4)$, la seule possibilité est $\gamma = 1$.
- Soit $g'\gamma g^{-1} = (\mathrm{ST})^2$, alors $\left((\mathrm{ST})^2\right)^{-1} = ST = g\gamma g'^{-1}$. Le cas précédent donne $\gamma = 1$.

On fait de même si $g \cdot z \in \mathcal{D}'_1$. Nous avons donc montré l'assertion *3.*

Pour finir avec la démonstration de *2.*, il suffit de voir que l'image de la demi droite ouverte $\mathcal{R}e(z) = -1/2$ s'envoie par T sur la demi droite ouverte $\mathcal{R}e(z) = 1/2$. L'image du demi cercle ouvert $|z + 1/4| = 1/4$ s'envoie par a sur le demi cercle ouvert $|z - 1/4| = 1/4$. Ce sont les seuls recollements possibles de $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ car $\mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}$ n'a pas de recollements. □

Proposition 14. *Pour tout $z \in \mathbf{H}$, il existe $\gamma \in \Gamma_{a,b}$ tel que $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$.*

Démonstration. La preuve est semblable au début de la preuve du théorème 8. Soient $z \in \mathbf{H}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$, on a $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z) = \mathcal{I}m(z)/|cz + d|^2$. Comme c et d sont entiers, le nombre de couples (c, d) tels que $|cz + d|$ soit inférieur à un nombre donné est fini. On en conclut qu'il existe $\gamma \in \Gamma'$ tel que $\mathcal{I}m(\gamma \cdot z)$ soit maximum. On peut supposer, quitte à composer par un T^k, que la partie réelle de $\gamma \cdot z$ est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. L'élément $\gamma \cdot z$ appartient alors à $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$; en effet, si on avait $|z - 1/4| < 1/4$, alors l'élément $a \cdot z = z/(4z + 1)$ aurait une partie imaginaire plus grande. De même si on avait $|z + 1/4| < 1/4$, l'élément $(ba^{-1}) \cdot z = (-3z + 1)/(-4z + 1)$ aurait une partie imaginaire plus grande. □

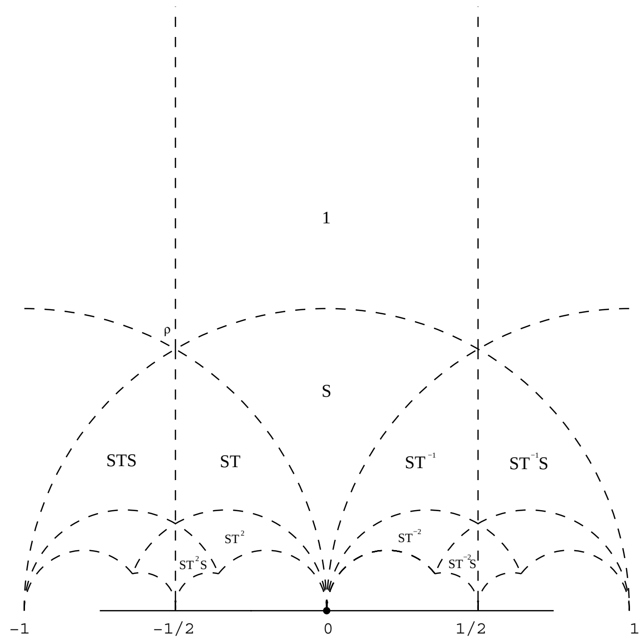

FIG. 2 – Un pavage plus complet

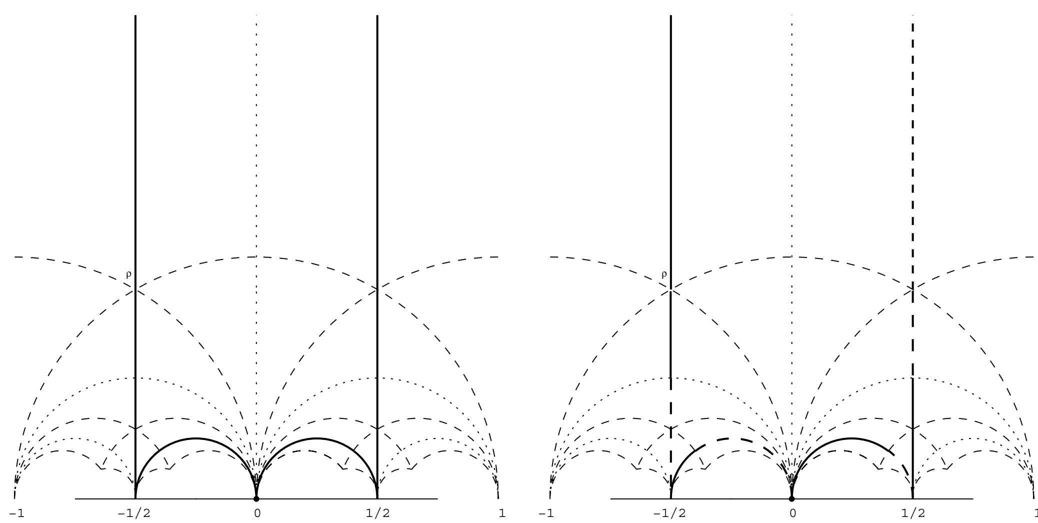

FIG. 3 – Les domaines $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ et $\mathcal{D}'_{\Gamma_0(4)}$

Théorème 15. *$\Gamma_0(4)/\{\pm 1\}$ est engendré par a et b.*

Démonstration. Soit γ un élément de $\Gamma_0(4)$. Choisissons un point z_0 *intérieur* à $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ (par exemple $2i$), et soit $z = \gamma \cdot z_0$. On a vu plus haut qu'il existe $\gamma' \in \Gamma_{a,b}$ tel que $\gamma' \cdot z \in \mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$. Les points z_0 et $\gamma' \cdot z = (\gamma'\gamma) \cdot z_0$ de $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$ sont congrus modulo $\Gamma_0(4)$, et l'un d'eux est intérieur à $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$. Il en résulte que ces points sont confondus et que $\gamma'\gamma = \pm 1$. D'où le résultat. □

Remarque. *En fait $\Gamma_0(4)/\{\pm 1\}$ est le groupe libre engendré par a et b.*

2.4 Les formes modulaires

De même que pour la notion d'holomorphe à l'infini, nous allons nous intéresser au comportement des fonctions faiblement modulaires au voisinage de la droite réelle, qui doit être vu comme un infini.

Définition 16. *On définit une pointe de Γ comme un point d'un domaine fondamental de Γ qui s'envoie à l'infini par un élément de $\Gamma(1)$.*

On dira de plus que 2 pointes p_1 et p_2 sont équivalentes dans un groupe Γ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $p_1 = \gamma \cdot p_2$. Remarquons que d'après la définition, il existe une unique classe d'équivalence de pointes dans $\Gamma(1)$.

Pour étudier une fonction faiblement modulaire f au voisinage d'une pointe p, on introduit une variable locale w en p, en envoyant p sur l'infini (par un élément σ_p de $SL_2(\mathbb{R})$). Le groupe $\Gamma(1)$ a une unique classe d'équivalence de pointes, et donc toute pointe peut être envoyée sur l'infini par $\Gamma(1)$. En conjuguant correctement cet élément dans $SL_2(\mathbb{R})$, on définit $\sigma_p \in SL_2(\mathbb{R})$ tel que $\sigma_p \cdot p = \infty$ et tel que

$$\left(\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}\right)_\infty = \{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{N}\}$$

où $\left(\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}\right)_\infty$ désigne le stabilisateur de l'infini pour $\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}$. Étudier la forme Γ-invariante $f(z)(\,\mathrm{d}z)^k$ au voisinage de p revient à étudier $F(w)(\,\mathrm{d}w)^k = f(\sigma_p^{-1} \cdot w)\big(\,\mathrm{d}(\sigma_p^{-1} \cdot w)\big)^k$ au voisinage de l'infini. Posons donc

$$F(w) = f(\sigma_p^{-1} \cdot w)\Big(\frac{\mathrm{d}(\sigma_p^{-1} \cdot w)}{\mathrm{d}w}\Big)^k f(\sigma_p^{-1} \cdot w) j(\sigma_p^{-1}, w)^{-k}.$$

Proposition 17. *$F(w)$ est une fonction faiblement modulaire de poids $2k$ pour $\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1} \subset \Gamma(1)$. De plus $F(w+1) = F(w)$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} F\big((\sigma_p \gamma \sigma_p^{-1}) \cdot w\big)\big(\,\mathrm{d}(\sigma_p \gamma \sigma_p^{-1}) \cdot w\big)^k &= f\big((\gamma \sigma_p^{-1}) \cdot w\big)\big(\,\mathrm{d}(\gamma \sigma_p^{-1}) \cdot w\big)^k \\ &= f(\sigma_p^{-1} \cdot w)(\,\mathrm{d}\sigma_p^{-1} \cdot w)^k \\ &= F(w)(\,\mathrm{d}w)^k. \end{aligned}$$

De plus la fonction F est clairement méromorphe. La dernière propriété est claire en appliquant la propriété d'invariance à $T \in \left(\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}\right)_\infty \subset \sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}$. □

On peut donc définir la fonction $\tilde{F}$ de $q = e^{2i\pi z}$ comme précédemment, et parler de méromorphie à l'infini pour la fonction F.

Définition 18. *On dit que f est méromorphe (resp. holomorphe) en p si F est méromorphe (resp. holomorphe) à l'infini.*

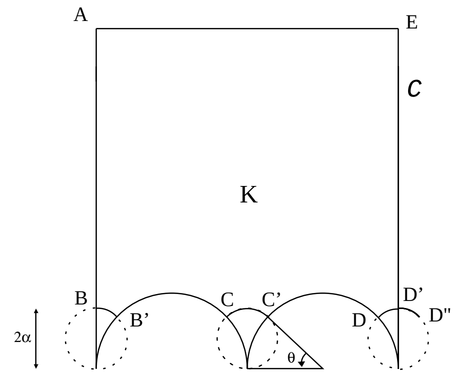

FIG. 4 – Compact K contenu dans le domaine fondamental de $\Gamma_0(4)$.

Lorsque f est holomorphe en une pointe p, on pose $f(p) = F(\infty)$, appelée valeur de f en p. Elle ne dépend pas de la classe d'équivalence de p pour Γ. Attention, la valeur de f en p n'est pas la limite de $f(z)$ quand z tend vers p.

Définition 19. *Une fonction faiblement modulaire de poids $2k$ pour Γ est dite modulaire si elle est méromorphe à chaque pointe (cusp en anglais).*

Définition 20. *On appelle forme modulaire de poids $2k$ pour Γ toute fonction modulaire de poids k pour Γ qui est holomorphe partout (y compris aux pointes).*

On notera désormais $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ l'espace des formes modulaires de poids $2k$ sur Γ.

Définition 21. *Si une forme modulaire de poids $2k$ pour Γ s'annule aux pointes, on dit que c'est une forme parabolique (cusp form en anglais) de poids $2k$ pour Γ.*

2.5 Résultats sur les formes modulaires

2.5.1 Étude des valeurs aux pointes d'une fonction modulaire

Nous allons appliquer le théorème des résidus à $f(z)\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}(log(f(z)))$. Rappelons son énoncé.

Rappel. *Le théorème des résidus s'écrit :*

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ un arc tracé sur U tel que f est définie sur $\mathcal{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash U, Ind_{(C)}(\lambda) = 0$, alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{p \text{ pôle de } f} Ind_{\mathcal{C}}(p) Res_f(p).$$

Soit $\mathcal{C}$ le contour de l'ensemble K défini ci-dessous, parcouru dans le sens direct.

Supposons que f n'a pas de zéro sur le bord de K. Sinon, il suffit de définir un domaine K' dont le bord contourne les zéros de f.

Théorème 22. *Soit f une fonction modulaire sur $\Gamma_0(4)$ de poids 2 ($k = 1$), holomorphe sur $\mathbf{H}$. On a*

$$f(\infty) + f(0) + f(1/2) = 0.$$

Démonstration. Calculons l'intégrale de la fonction f sur le contour $\mathcal{C}$ de K_α de 2 facons différentes.

Comme la fonction f est supposé holomorphe, elle n'a aucun pôle, donc le théorème des résidus s'écrit

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

De plus,

$$\int_E^A f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2i\pi}\int_\omega \frac{\tilde{f}(q)}{q}\,\mathrm{d}q$$

par le changement de variable $q = e^{2i\pi z}$ où ω est un cercle de centre 0, parcouru dans le sens direct. D'après le théorème des résidus (en posant $g(q) = \frac{\tilde{f}(q)}{q}$ qui a un unique pôle en 0 de résidu $\tilde{f}(0)$), on a donc

$$\int_E^A f(z)\,\mathrm{d}z = -\tilde{f}(0) = -f(\infty).$$

L'élément $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ envoie AB sur EC', et $f(T\cdot z) = f(z)$. On a donc

$$\int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{D'}^E f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Intéressons nous maintenant à l'intégrale sur $B'C$ et $C'D$.

L'élément $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ envoie l'arc $B'C$ sur l'arc DC'. Remarquons maintenant que l'on a $f(\gamma\cdot z)\,\mathrm{d}(\gamma\cdot z) = f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(4)$, car la fonction est de poids 2. En particulier, $f(a\cdot z)\,\mathrm{d}(a\cdot z) = f(z)\,\mathrm{d}z$, et

$$\int_{B'}^C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_D^{C'} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

On a par ailleurs

$$\int_C^{C'} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C^{C'} F(\sigma_0^{-1}\cdot z)\,\mathrm{d}\,(\sigma_0^{-1}\cdot z) = -\int_{0+i\alpha}^{1+i\alpha} F(w)\,\mathrm{d}w.$$

De la même manière que pour le calcul sur l'arc EA, on obtient

$$\int_{0+i\alpha}^{1+i\alpha} F(w)\,\mathrm{d}w = F(\infty) = f(0).$$

On a donc

$$\int_C^{C'} f(z)\,\mathrm{d}z = -f(0).$$

On peut ramener l'arc BB' sur l'arc $D'D''$ par l'élément $T \in \Gamma_0(4)$ (voir schéma page 12). Or on a $f(T\cdot z)\,\mathrm{d}(T\cdot z) = f(z)\,\mathrm{d}z$. On a donc

$$\int_B^{B'} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_D^{D'} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_D^{D''} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Par un calcul analogue à celui de l'intégrale sur l'arc CC', on obtient

$$\int_B^B f(z)\,\mathrm{d}z + \int_D^{D'} f(z)\,\mathrm{d}z = -f(\frac{1}{2}).$$

En sommant toutes ces intégrales, on obtient le résultat voulu. $\square$

2.5.2 Les zéros et les pôles d'une fonction modulaire

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{H}$, non identiquement nulle, et soit p un point de $\mathbf{H}$.

Définition 23. *Nous appellerons ordre de f en p, et nous noterons $\nu_p(f)$ l'entier n tel que $z \mapsto \dfrac{f(z)}{(z-p)^n}$ soit holomorphe et non nulle en p.*

Lorsque f est une fonction modulaire de poids $2k$ pour $\Gamma_0(4)$, l'identité :

$$f(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^k f(z)$$

montre que $\nu_p(f) = \nu_{\gamma(p)}(f)$ pour tout $p \in \mathbf{H}$ et $\gamma \in \Gamma_0(4)$; en d'autres termes, $\nu_p(f)$ ne dépend que de l'image de p dans le quotient $\mathbf{H}/\Gamma_0(4)$.

On peut de plus définir $\nu_\infty(f)$ comme l'ordre pour $q = 0$ de la fonction $\tilde{f}(q)$ associée à f, et $\nu_p(f)$ pour une pointe p comme l'ordre de $w = 0$ pour $F(w)$ associée à f.

Soit p un point de $\mathbf{H}$. Remarquons que si p est un pôle de f on a $\nu_p(f) < 0$, si p est un zéro de f, $\nu_p(f) > 0$ et pour p un point quelconque, $\nu_p(f) = 0$.

On rappelle que σ_p a été choisi tel que $\sigma_p \cdot p = \infty$ et

$$\left(\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}\right)_\infty = \{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{N}\}$$

où $\left(\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}\right)_\infty$ désigne le stabilisateur de $\sigma_p \Gamma \sigma_p^{-1}$ à l'infini.

Proposition 24. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}$. On définit $\tilde{f}$ et F comme dans la partie 2. Pour p un pôle de f, on a*

$$\nu_p(f) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\omega_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

où ω_α est l'arc du cercle tangent à l'axe des réels en p de rayon α contenu dans $\mathcal{D}$ parcouru dans le sens direct si $p \neq \infty$, et un segment de la forme $[\alpha i - 1/2, \alpha i + 1/2]$ pour $p = \infty$.

Démonstration. Calculons $\nu_p(f)$. Par définition, $\nu_p(f) = \nu_0(\tilde{F})$. D'après le théorème des résidus, on a donc :

$$\begin{aligned} \nu_p(f) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}^1_\alpha} \frac{\tilde{F}'(q)}{\tilde{F}(q)}\ \mathrm{d}q = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}^1_\alpha} \mathrm{d}(\log \tilde{F}(q)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}^1_\alpha} \mathrm{d}(\log \tilde{F}(e^{2i\pi z})) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{0+\frac{i}{2\alpha}}^{1+\frac{i}{2\alpha}} \mathrm{d}(\log F(w)). \end{aligned}$$

Or

$$F(w) = f(\sigma_p^{-1} w) \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_p^{-1} w}{\mathrm{d}w} \right)^k.$$

D'où

$$\begin{aligned} \nu_p(f) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{0+\frac{i}{2\alpha}}^{1+\frac{i}{2\alpha}} \mathrm{d} \left[\log(f(\sigma_p^{-1} w)) + k \log \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_p^{-1} w}{\mathrm{d}w} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{0+\frac{i}{2\alpha}}^{1+\frac{i}{2\alpha}} \frac{\mathrm{d}(f(\sigma_p^{-1} w))}{f(\sigma_p^{-1} w)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{0+\frac{i}{2\alpha}}^{1+\frac{i}{2\alpha}} \mathrm{d} \left(k \log \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_p^{-1} w}{\mathrm{d}w} \right) \right). \end{aligned}$$

De plus, en effectuant dans le premier terme le changement de variable $z = \sigma_p^{-1} w$ on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{f'(\sigma_p^{-1}w)}{f(\sigma_p^{-1}w)}\,\mathrm{d}(\sigma_p^{-1}w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Calculons le deuxième terme de la somme. Ecrivons σ_p^{-1} sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_p^{-1}w}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{(cw+d)^2}$$

et donc

$$\mathrm{d}\left(k\log\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_p^{-1}w}{\mathrm{d}w}\right)\right) = -2k\ \mathrm{d}\left(\log(cw+d)\right).$$

Remplaçons dans l'expression de $\nu_p(f)$:

$$\begin{aligned}\nu_p(f) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \frac{2kc}{2i\pi}\int_{0+\frac{i}{2\alpha}}^{1+\frac{i}{2\alpha}} \mathrm{d}\left(\log(cw+d)\right) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \frac{2kc}{2i\pi}\log\left(1+\frac{c}{\frac{ic}{2\alpha}+d}\right).\end{aligned}$$

Comme on a forcément $(c,d)\neq(0,0)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{c}{\frac{ic}{2\alpha}+d} = 0$. On a donc

$$\nu_p(f) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

□

Théorème 25. *Soit f une fonction modulaire de poids $2k$, holomorphe sur $\mathbf{H}$ et non identiquement nulle. On a*

$$\nu_\infty + \nu_0 + \nu_{1/2} + \sum_{p \text{ zéro de } f}\nu_p(f) = k.$$

Démonstration. Pour f une fonction modulaire sur $\Gamma_0(4)$, holomorphe partout, la fonction $\tilde{f}$ définie en 2.4 est holomorphe au voisinage de 0. On peut donc trouver un cercle tangent en 0 de rayon assez petit pour que $\tilde{f}$ n'ait pas de zéro dans la partie du disque contenue dans le domaine fondamental considéré. Or un tel disque est envoyé sur un segment horizontal de longueur 1 par σ_0 (défini en 2.4). Ainsi, il existe R tel que f n'a pas de zéro pour $\mathcal{I}mf(z)\geqslant R$.

De même, pour une pointe p, la fonction F définie en 2.4 est holomorphe à l'infini, donc par la même méthode que précédemment, il existe un cercle tangent en p à l'axe des réels tel que f n'a pas de zéro à l'intérieur du cercle.

Choisissons alors le plus petit rayon α parmi les cercle construits autour de chacune des pointes. Pour définir le domaine K, nous prendrons tous les cercles de rayon α.

Lemme. *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{H}$, non identiquement nulle. Soit $\mathcal{C}$ un contour tel que l'intérieur contienne un représentant de chaque zéro ou pôle de f. Alors on a l'égalité :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{p\in\mathbf{H}/\Gamma_0(4)}\nu_p(f).$$

Démonstration. Appliquons tout d'abord le théorème des résidus à la fonction f'/f :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{\text{p pôle de f'/f}} Ind_{\mathcal{C}}(p)Res_{f'/f}(p).$$

Soit p un point quelconque de $\mathbf{H}/\Gamma_0(4)$. Par définition de $\nu_p(f)$ on peut écrire pour z au voisinage de p :

$$f(z) = (z-p)^{\nu_p(f)} g(z)$$

où g est une fonction holomorphe non nulle en p. On a donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu_p(f)}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc l'ensemble des pôles de f'/f est exactement l'ensemble des zéros et pôles de f, et de plus, on a $Res_{f'/f}(p) = \nu_p(f)$.

Enfin, $Ind_{\mathcal{C}}(p) = 1$ car on a choisi $\mathcal{C}$ de telle sorte qu'il entoure chaque pôle ou zéro de f.

On a donc démontré le lemme.

□

Revenons à la démonstration du théorème 25.

On applique donc la formule démontrée dans le lemme ci-dessus à la fonction f. On obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{p \in \mathbf{H}/\Gamma_0(4)} \nu_p(f).$$

Comme la fonction f est supposée holomorphe partout sauf aux pointes, les seuls $\nu_p(f)$ non nuls sont ceux pour p un zéro de f. On a donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{p \text{ zéro de } f} \nu_p(f).$$

On va maintenant intégrer morceau par morceau $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sur le contour $\mathcal{C}$, en faisant tendre α vers 0.

- $E_\alpha A_\alpha$ **:** La formule démontrée dans la proposition 24 montre immédiatement que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{E_\alpha}^{A_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = -\nu_\infty(f).$$

- $A_\alpha B_\alpha$ *et* $D'_\alpha E_\alpha$ **:** L'élément $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ envoie l'arc $A_\alpha B_\alpha$ sur l'arc $E_\alpha D'_\alpha$. Par définition des formes modulaires, on a $f(T \cdot z) = f(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi} \int_{D'_\alpha}^{E_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2i\pi} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi} \int_{D'_\alpha}^{E_\alpha} \frac{f'(T \cdot z)}{f(T \cdot z)} \, \mathrm{d}(T \cdot z) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{A_\alpha}^{B_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi} \int_{B_\alpha}^{A_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $B_\alpha B'_\alpha$ *et* $D_\alpha D'_\alpha$ **:** L'élément $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ envoie l'arc $B_\alpha B'_\alpha$ sur l'arc $D'_\alpha D''_\alpha$. Par translation du domaine $\mathcal{D}$ de $1/2$ (qui reste donc un domaine fondamental de $\Gamma_0(4)$), on voit que $D_\alpha D'_\alpha \cup D'_\alpha D''_\alpha$ est un arc de cercle du type ω_α, parcouru dans le sens indirect. On a donc, d'après la proposition 24,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D_\alpha}^{D''_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi} \int_{B_\alpha}^{B'_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\alpha}^{D'_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \xrightarrow{\alpha \to 0} -\nu_{\frac{1}{2}}(f).$$

- $B'_\alpha C_\alpha$ *et* $C'_\alpha D_\alpha$ **:** L'arc $D_\alpha C'_\alpha$ est l'image par $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ de $B'_\alpha C_\alpha$. Or, on a $f(a \cdot z) = (4z+1)^{2k} f(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} \log\left(f(a \cdot z)\right) &= 2k \log(4z+1) + \log\left(f(z)\right) \\ \mathrm{d}\left(\log\left(f(a \cdot z)\right)\right) &= \frac{8k}{4z+1} + \mathrm{d}\left(\log(f(z))\right) \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{B'_\alpha}^{C_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2i\pi} \int_{B'_\alpha}^{C_\alpha} \frac{f'(a \cdot z)}{f(a \cdot z)} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2i\pi} \int_{B'_\alpha}^{C_\alpha} \frac{8k}{4z+1} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\alpha}^{C'_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z - \frac{2k}{2i\pi} \big[\log(4z+1) \big]_{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{i(\pi-\theta)}}^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{i\theta}} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\alpha}^{D_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z - k(\frac{2\theta}{\pi} - 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{B'_\alpha}^{C_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\alpha}^{D_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \right) = k$$

puisque bien entendu, $\theta \to 0 \Leftrightarrow \alpha \to 0$.

- $C_\alpha C'_\alpha$ **:** La proposition 24 nous donne directement

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\alpha}^{C'_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = -\nu_0(f).$$

On obtient donc

$$\sum_{\text{p zéro de f}} \nu_p(f) = -\nu_\infty - \nu_0 - \nu_{1/2} + k$$

ce qui est le résultat cherché.

□

3 La formule de Jacobi

Posons maintenant

$$\forall z \in \mathbf{H}, \ \theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi m^2 z}.$$

On a $\theta^4(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_4(n) e^{2i\pi n z}$. Nous allons voir que la fonction θ^4 est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$.

3.1 Étude de la fonction θ

La fonction $\theta(z)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{H}$; elle est donc holomorphe sur $\mathbf{H}$ comme limite uniforme de fonctions holomorphes.

Théorème 26. *Pour tout* $z \in \mathbf{H}$, $\gamma \in \Gamma_0(4)$, $\quad \theta^4(\gamma z) = (cz+d)^2 \theta^4(z)$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour $\gamma = a$ et $\gamma = b$ on a bien la propriété voulue.

1. $\gamma = a$

$$\theta^4(z+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_4(n) e^{2i\pi n(z+1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_4(n) e^{2i\pi nz} = \theta^4(z).$$

2. $\gamma = b$
En écrivant $\frac{z}{(4z+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4z+1)}$ et comme $(\frac{m}{2})^2$ modulo 1 ne dépend que de m modulo 2, on a :

$$\begin{aligned}\theta(\frac{z}{4z+1}) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi m^2(\frac{z}{4z+1})} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi(\frac{m}{2})^2}\ e^{-2i\pi(\frac{m}{2})^2\frac{1}{4z+1}} \\ &= \sum_{m \bmod 2} e^{2i\pi(\frac{m}{2})^2} \sum_{t\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi(\frac{m}{2}+t)^2\frac{1}{4z+1}}.\end{aligned}$$

Soit la fonction $f : t \mapsto e^{-a\pi(\frac{m}{2}+t)^2}$. Rappelons que $\hat{f}(\xi) = (1/\sqrt{a})\ e^{\pi\xi^2/a}\ e^{i\pi m\xi}$ (*cf.* Annexe B). La formule de Poisson (*cf.* le lemme ci-dessous) appliquée à la fonction f avec $a = \frac{2i}{4z+1}$ permet de calculer :

$$\begin{aligned}\theta(\frac{z}{4z+1}) &= \sum_{m \bmod 2} e^{\frac{i\pi m^2}{2}} \sum_{t\in\mathbb{Z}} \sqrt{\tfrac{4z+1}{2i}}\ e^{-\pi(\frac{4z+1}{2i})t^2} e^{i\pi mt} \\ &= \sqrt{\tfrac{4z+1}{2i}} \sum_{t\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi zt^2}\ \underbrace{e^{\frac{i\pi t^2}{2}}\ (1+ie^{i\pi t})}_{=1+i} \\ &= \sqrt{\tfrac{4z+1}{2i}}\ (1+i)\theta(z).\end{aligned}$$

En particulier, $\theta^4(\frac{z}{4z+1}) = (4z+1)^2\theta^4(z)$ ce qui est le résultat voulu.

La formule est donc vérifiée par a et b qui engendrent $\Gamma_0(4)$. Il reste à voir que la formule passe bien à la composition ; cela découle de l'identité

$$\theta^4((\gamma\gamma')\cdot z) = j(\gamma, \gamma'\cdot z)\ \theta^4(\gamma'\cdot z) = \underbrace{j(\gamma,\gamma'\cdot z)\ j(\gamma', z)}_{=j(\gamma\gamma', z)}\ \theta^4(z).$$

□

Lemme (Formule de Poisson). *Soit f une fonction C^∞ à décroissance rapide, i.e. pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$. On a :*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) \ \textit{avec}\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. Comme f est à décroissance rapide, la série définissant φ converge normalement sur $\mathbb{R}$, ainsi que toutes ses dérivées terme à terme. La fonction φ est donc C^∞ et 1-périodique.

Calculons les coefficients de Fourier complexes de φ. On a, en intégrant terme à terme, ce qui est licite car la série converge uniformément :

$$\begin{aligned}c_n &= \int_0^1 \varphi(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\ \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x+k)e^{-2i\pi nx}\ \mathrm{d}x = \hat{f}(n)\end{aligned}$$

La fonction φ est somme de sa série de Fourier donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

La formule attendue est obtenue pour $x = 0$. □

Théorème 27. *La fonction θ^4 est une forme modulaire de poids 2 avec $\theta^4(\infty) = 1$, $\theta^4(0) = -1$, $\theta^4(-1/2) = 0$.*

Démonstration. La fonction θ^4 est holomorphe sur $\mathbf{H}$ et vérifie le critère d'invariance. Il suffit de montrer que θ^4 est holomorphe à chaque pointe. Examinons θ^4 sur les trois pointes de $\mathcal{D}_{\Gamma_0(4)}$.

- Pour la pointe en l'infini ; la convergence de la série de θ est uniforme sur un voisinage de l'infini, on peut donc passer à la limite terme à terme. On trouve $\theta(\infty) = 1$ et le résultat.
- Pour la pointe en 0 ; la variable locale est $\omega = \sigma_0^{-1} \cdot z$ où $\sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant la proposition 39 et l'égalité $\mathrm{S}^2 = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Theta(w) &= \frac{\theta^4(\sigma_0^{-1} \cdot w)}{j(\sigma_0^{-1}, w)} = \theta^4(-\frac{1}{4w})\frac{1}{(2w)^2} \\ &= -4w^2\theta^4(w)\frac{1}{4w^2} = -\theta^4(w) \xrightarrow[w\to\infty]{} -1. \end{aligned}$$

- Pour la pointe $-1/2$, de manière cohérente avec le théorème 22, on vérifie que

$$\theta^4(-1/2) + \theta^4(0) + \theta^4(\infty) = 0$$

et on en déduit le résultat.

□

3.2 Les séries d'Eisenstein

Les séries d'Eisenstein fournissent d'autres formes modulaires non paraboliques. Ces formes sont bien connues. L'espace engendré par les séries d'Eisenstein est supplémentaire au formes paraboliques dans les formes modulaires. Or l'espace des formes paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$ est trivial. Les séries d'Eisenstein forment donc une base de l'espace de formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$.

Théorème 28. *La seule forme parabolique de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$ est la forme nulle.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f est une forme parabolique non nulle de $\Gamma_0(4)$. D'après le théorème précédent, on a

$$\nu_\infty + \nu_0 + \nu_{1/2} + \sum_{\text{p zéro de f}} \nu_p(f) = k.$$

Or si f est une forme parabolique, ∞, 0, *et* $1/2$ sont des zéros de f, donc $\nu_\infty(f)$, $\nu_0(f)$ et $\nu_{1/2}(f)$ sont strictement positifs. On a donc $\nu_\infty + \nu_0 + \nu_{1/2} \geqslant 3$. Comme $\sum_{\text{p zéro de f}} \nu_p(f) \geqslant 0$, on obtient la contradiction $1 \geqslant 3$. Absurde. □

Corollaire 29. *Les séries d'Eisenstein forment une base de l'espace des formes modulaires de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$.*

Le cas des séries d'Eisenstein de poids supérieur à 1 est naturel et simple à traiter. Il explique l'origine de la définition des séries d'Eisenstein de poids 1 et donne un cadre plus général à certaine propositions.

Nous ne traitons ici que le cas des séries d'Eisenstein de poids 1. Nous renvoyons en annexe pour le cas plus général.

De manière analogue aux séries d'Eisenstein de poids supérieur à 2, on voudrait définir

$$\begin{aligned} E_2^{(\infty)}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(4)_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-1} = \frac{2}{3\zeta(2)} \left(\sum_{\substack{4|c \\ d \text{ impair}}} (cz+d)^{-2} \right) \\ &= \frac{2}{3\zeta(2)} \left(\sum_{\substack{c\equiv 0[4] \\ d \equiv 1[4]}} (cz+d)^{-2} + \sum_{\substack{c\equiv 0[4] \\ d \equiv -1[4]}} (cz+d)^{-2} \right). \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à poser formellement pour $a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$,

$$G_2^{(0,a)}(z) = \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m_1,m_2)\equiv(0,a)[4]}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^2}.$$

Dès lors, on a

$$E_2^{(\infty)}(z) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*} G_2^{(0,a)}(z).$$

Le problème est que la série qui définit $G_2^{(0,a)}$ n'est pas absolument convergente. Il faut définir un ordre de sommation et vérifier que la fonction définie est bien holomorphe.

Posons, cette fois-ci rigoureusement

$$G_2^{(0,a)}(z) = \sum_{m_1 \equiv 0[4]} \sum_{m_2 \equiv a[4]} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^2}.$$

Proposition 30. *Pour tout $a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, la fonction $G_2^{(0,a)}(z)$ est bien définie et est holomorphe sur $\mathbf{H}$.*

Démonstration. On part de la formule admise suivante :

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \pi \cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right). \tag{2}$$

Alors en écrivant $\cot(\pi a) = 1 + 2/(e^{2i\pi a} - 1)$, en remplaçant a par mz, et en dérivant de chaque côté, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{j=1}^{\infty} j e^{2i\pi j z}.$$

Appliquons ceci à notre fonction :

$$\begin{aligned}
G_2^{(0,a)}(z) &= \sum_{m_2\equiv a[4]} \frac{1}{{m_2}^2} + \sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1\neq 0}} \sum_{m_2\equiv a[4]} \frac{1}{(m_1 z+m_2)^2} \\
&= \sum_{\substack{m_2\equiv a[4]\\ m_2>0}} \frac{1}{{m_2}^2} + \sum_{\substack{m_2\equiv -a[4]\\ m_2>0}} \frac{1}{{m_2}^2} + \frac{1}{16} \sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1>0}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{m_1 z+a}{4}+n)^{-2} \\
&\quad + \frac{1}{16} \sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1>0}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{m_1 z-a}{4}+n)^{-2} \\
&= \sum_{m_2 \text{ impair}} \frac{1}{{m_2}^2} - \frac{\pi^2}{4} \left(\sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1>0}} \sum_{j=1}^{\infty} j e^{i\frac{\pi}{2}j(m_1 z+a)} + \sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1>0}} \sum_{j=1}^{\infty} j e^{i\frac{\pi}{2}j(m_1 z-a)} \right).
\end{aligned}$$

On pose $q' = e^{i\frac{\pi}{2}z}$, alors

$$\begin{aligned}
G_2^{(0,a)}(z) &= \frac{3}{4}\zeta(2) - \frac{\pi^2}{4} \left(\sum_{\substack{m_1\equiv 0[4]\\ m_1>0}} \sum_{j=1}^{\infty} j(i^{ja}+i^{-ja}) q^{jm_1} \right) \\
&= \frac{3}{4}\zeta(2) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n q'^n
\end{aligned}$$

avec $b_{4n} = -\frac{\pi^2}{4}\sum_{j|n} j(i^{ja}+i^{-ja})$ et $b_n = 0$ si $4 \nmid n$.

Du coup, on peut décomposer en série de Fourier. Si $q = e^{2i\pi z}$, alors :

$$G_2^{(0,a)}(z) = \frac{3}{4}\zeta(2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \tag{3}$$

avec $c_n = -\frac{\pi^2}{4}\sum_{j|n} j(i^{ja}+i^{-ja})$.

Le rayon de convergence de la série de terme général c_n est supérieur à 1. La fonction $G_2^{(0,a)}(z)$ est donc bien holomorphe sur $\mathbf{H}$. □

La série d'Eisenstein associé à 0 va être :

$$E_2^{(0)}(z) = \frac{2}{3\zeta(2)} \left(4 \cdot \sum_{a\in(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*} G_2^{(a,0)}(4z) \right).$$

De la même façon que pour $G_2^{(0,a)}(z)$, on obtient la proposition :

Proposition 31. *Pour tout $a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, la fonction $G_2^{(a,0)}(z)$ est bien définie et est holomorphe sur $\mathbf{H}$. De plus, si $q = e^{2i\pi z}$ alors*

$$4G_2^{(a,0)}(4z) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n \quad \textit{avec} \quad d_n = \sum_{\substack{j|n\\ n/j \text{ impair}}} j.$$

Contrairement aux séries d'Eisenstein de poids supérieur à 2, nos séries définies ici ne sont pas vraiment invariantes par $\Gamma_0(4)$. Nous allons tuer ce défaut d'invariance en considérant la fonction

$$F(z) = E_2^{(\infty)}(z) - E_2^{(0)}(z).$$

Introduisons la terme $a_{m_1,m_2}(z)$ défini par

$$a_{m_1,m_2}(z) = \frac{1}{m_1z + m_2 - 4} - \frac{1}{m_1z + m_2}$$

Le série double de terme général $a_{m_1,m_2}(z)$ n'est pas absolument convergente. Nous serons amené par la suite à calculer la différence entre les deux séries doubles d'ordre de sommation inversée. Établissons donc les formules suivantes :

Proposition 32. *Pour tout $z \in \mathbf{H}$, on a*

$$\forall b, m_1 \in \mathbb{Z}, \qquad \sum_{m_2 \equiv b[4]} a_{m_1,m_2} = 0$$

et

$$B(z) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*} \sum_{m_2 \equiv a[4]} \sum_{m_1 \equiv 0[4]} a_{m_1,m_2}(z) = -i\frac{\pi}{z}$$

et

$$C(z) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*} \sum_{m_2 \equiv 0[4]} \sum_{m_1 \equiv a[4]} a_{m_1,m_2}(z) = -i\frac{\pi}{z}$$

Démonstration. La première formule est évidente car les termes $a_{m_1,m_2}(z)$ se télescopent.

Pour la deuxième formule, on commence par

$$\begin{aligned}
\sum_{m_2 \equiv a[4]} \sum_{m_1 \equiv 0[4]} a_{m_1,m_2} &= \sum_{m_2 \equiv a[4]} \sum_{\substack{m_1 \equiv 0[4] \\ m_1 \neq 0}} a_{m_1,m_2} \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N+1}^{N} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{4nz + a + 4(k-1)} - \frac{1}{4nz + a + 4k}) \right) \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{4nz + a - 4N} - \frac{1}{4nz + a + 4N}) \right) \\
&= \frac{1}{2z} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a - 4N}{4z} + n \right)^{-1} + \left(\frac{-a - 4N}{4z} - n \right)^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Sommons maintenant sur les $a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$. En réutilisant la formule (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
2zB(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a - 4N}{4z} + n \right)^{-1} + \left(\frac{a - 4N}{4z} - n \right)^{-1} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{-a - 4N}{4z} + n \right)^{-1} + \left(\frac{-a - 4N}{4z} - n \right)^{-1} \right) \\
&= \underbrace{\pi \cot(\frac{\pi(a - 4N)}{4z})}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} -i} + \underbrace{\frac{4z}{4N - a}}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} 0} + \underbrace{\pi \cot(-\frac{\pi(a + 4N)}{4z})}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} -i} + \underbrace{\frac{4z}{4N + a}}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} 0}
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*} \sum_{m_2 \equiv a[4]} \sum_{m_1 \equiv 0[4]} a_{m_1,m_2}(z) = -i\frac{\pi}{z}$$

Un calcul similaire nous donne la dernière formule. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la deuxième propriété fondamentale.

Proposition 33. *La fonction* F *est invariante par* $\Gamma_0(4)$.

Démonstration. Clairement $F(z+1) = F(z)$. Il reste à montrer que $F(a\cdot z) = F(z)$. Nous renvoyons à la partie sur la fonction θ^4 pour voir que cela suffit.

Lemme. *Pour tout* $z \in \mathbf{H}$, *on a* $-\frac{1}{4z^2}F(-\frac{1}{4z}) = F(z)$

Démonstration. Nous allons nous baser sur 4 calculs intermédiaires. Remarquons d'abord que

$$\frac{1}{4z^2}\, G_2^{(0,a)}(-\frac{1}{4z}) = 4 \sum_{m_1\equiv 0[4]} \sum_{m_2\equiv a[4]} (4m_2 z - m_1)^{-2} \tag{4}$$

et

$$\frac{1}{4z^2}\Big(4\cdot G_2^{(a,0)}(-\frac{1}{4z}\cdot 4)\Big) = \sum_{m_1\equiv a[4]} \sum_{m_2\equiv 0[4]} (m_2 z - m_1)^{-2}. \tag{5}$$

En introduisant le terme $a_{m_1,m_2}(z) = \frac{1}{m_1 z + m_2 - 4} - \frac{1}{m_1 z + m_2}$, on rend les séries définissant $G_2^{(0,a)}$ et $G_2^{(a,0)}$ absolument convergentes. Comme la somme des a_{m_1,m_2} se télescope, on a

$$\begin{aligned} G_2^{(0,a)}(z) &= \sum_{m_1\equiv 0[4]} \sum_{m_2\equiv a[4]} \big((m_1 z + m_2)^{-2} - a_{m_1,m_2}(z)\big) \\ &= \sum_{m_2\equiv a[4]} \sum_{m_1\equiv 0[4]} \big((m_1 z + m_2)^{-2} - a_{m_1,m_2}(z)\big) \\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{4z^2}\, G_2^{(a,0)}(-1/z)\right) + \sum_{m_2\equiv a[4]} \sum_{m_1\equiv 0[4]} a_{m_1,m_2}(z). \end{aligned} \tag{6}$$

De même

$$G_2^{(a,0)}(4z) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4z^2}G_2^{(0,a)}(-1/(4z))\right) + \sum_{m_2\equiv 0[4]} \sum_{m_1\equiv a[4]} a_{m_1,m_2}(4z) \tag{7}$$

Ainsi en combinant les équations (4), (5), (6) et (7), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4z^2}F(-\frac{1}{4z}) &= -\frac{1}{4z^2}\left[G_2^{(0,1)}(-\frac{1}{4z}) + G_2^{(0,-1)}(-\frac{1}{4z}) - 4\cdot\left(G_2^{(1,0)}(-\frac{1}{z}) + G_2^{(-1,0)}(-\frac{1}{z})\right)\right] \\ &= -4\; G_2^{(1,0)}(4z) - 4\; G_2^{(-1,0)}(4z) + G_2^{(0,1)}(z) + G_2^{(0,-1)}(z) + \underbrace{4C(4z) - B(z)}_{=0} \\ &= F(z). \end{aligned}$$

□

Revenons à la démonstration de la proposition. De manière similaire à ce que l'on avait fait dans le calcul pour l'invariance de θ^4, nous allons en déduire l'invariance par la transformation par la matrice a de F.

Notons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a l'identité $P\mathrm{T}^{^{-1}}P^{-1} = a$.

$$\begin{aligned} F(a\cdot z) &= F\big((P\mathrm{T}^{^{-1}}P^{-1})\cdot z\big) = -4\big((\mathrm{T}^{^{-1}}P^{-1})\cdot z\big)^2 F\big((\mathrm{T}^{^{-1}}P^{-1})\cdot z\big) \\ &= -4(-\frac{1}{4z} - 1)^2 F(P^{-1}\cdot z) = 4(\frac{1+4z}{4z})^2\cdot 4z^2 F(z) \\ &= (4z+1)^2 F(z) = j(a,z)F(z) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 34. *Les fonctions θ^4 et F sont les mêmes.*

Démonstration. On a $F(\infty) = 1$ par le développement en série de Fourier. La variable locale en 0 est $\omega = \sigma_0^{-1} \cdot z$ où $\sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc

$$f(-\frac{1}{4w})\frac{1}{(2w)^2} = -4w^2 f(w)\frac{1}{4w^2} = -f(w) \quad \text{et} \quad F(0) = -1.$$

Le théorème 22 donne que $F(1/2) = 0$. Donc la forme modulaire $\theta^4 - F$ de poids 2 pour $\Gamma_0(4)$ est une forme parabolique. Le théorème 28 donne $F = \theta^4$. $\square$

Nous pouvons finalement démontrer la formule énoncée quelques pages plus tôt.

3.3 La formule de Jacobi

Théorème 35 (Formule de Jacobi). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} d$.*

Démonstration. En identifiant les coefficients de Fourier des fonctions F et θ^4 à l'aide de l'équation (3) et la proposition 31, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_4(n) = 2 \cdot \frac{2}{3\zeta(2)}(c_n - d_n) = 8 \Big(\sum_{\substack{j|n \\ n/j \text{ impair}}} j\Big) - 2 \Big(\sum_{j|n} j(i^j + i^{-j})\Big).$$

Séparons deux cas :

- Si n impair alors le premier terme vaut $8 \sum_{d|n} d$ et le deuxième terme est nul.
- Si n est pair, on écrit $n = 2^r n_0$ avec n_0 impair.
  Le premier terme vaut alors
  $$\sum_{\substack{d|n \\ n/d \text{ impair}}} d = \sum_{d|n_0} 2^r d,$$
  et pour le second terme
  $$\begin{aligned} \sum_{d|n} d(i^d + i^{-d}) &= 2 \sum_{\substack{d|n \\ 2|d}} (-1)^{d/2} d = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{d|n_0} (-1)^{2^{i-1}d}\, 2^i d \\ &= 2((-1) \cdot 2 + \sum_{i=2}^{r} 2^i) \sum_{d|n_0} d = (2^{r+2} - 12) \sum_{d|n_0} d. \end{aligned}$$
  Au total
  $$r_4(n) = \big(8 \cdot 2^r - 2(2^{r+2} - 12)\big) \sum_{d|n_0} d = 24 \sum_{d|n_0} d.$$
  Reste à vérifier que si ($d|n$ et $4 \nmid n$) alors ($d|n_0$) ou ($d = 2d'$ et $d'|n_0$). Ainsi
  $$8 \sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} = 8\Big(\sum_{d|n_0} d + \sum_{d|n_0} 2d\Big) = 24 \sum_{d|n_0} d = r_4(n).$$

Dans les deux cas, nous avons le résultat voulu que nous encadrons car nous sommes très contents :

$$\boxed{r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} d.}$$

$\square$

La méthode que nous avons utilisée ici pour calculer les coefficients $r_4(n)$ n'est peut être pas la plus simple. Mais elle présente l'intérêt principal de pouvoir se généraliser à l'étude de $r_{4d}(n)$. En effet, dans le cas général, on peut décomposer la fonction θ^{4d} sur les séries d'Eisenstein, de manière à annuler les valeurs aux pointes mais il restera une forme parabolique.

La miracle qui nous a permis de traiter le cas de $r_4(n)$ vient du fait qu'une forme parabolique de poids 2 est nulle. Dans le cas général, Deligne a démontré en 1974 une conjecture de Ramanujan qui contrôle la taille des coefficients de Fourier du terme parabolique.

On peut alors écrire dans le cas général :

$$r_d(n) = \delta_d + O_\epsilon\left(n^{\frac{d/2-1}{2}+\epsilon}\right)$$

où δ_d est de l'ordre de $n^{\frac{d}{2}-1}$.

A Un peu de série de Fourier complexe

Proposition 36. *Soit f une fonction holomorphe vérifiant $f(z+1)=f(z)$, alors on a*

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nz}.$$

avec $c_n=\int_{i\alpha}^{i\alpha+1} f(z)e^{2i\pi z}\,dz$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ quelconque.

Démonstration. A y fixé, la fonction $f_y(x)=f(x+iy)$ est C^∞ et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Elle s'écrit donc comme somme de sa série de Fourier

$$f_y(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y)\ e^{2i\pi x}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\frac{z-\overline{z}}{2i})\ e^{2i\pi(\frac{z+\overline{z}}{2})}.$$

Comme la fonction f est holomorphe, on a

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-\frac{1}{2i}a_n'(y)+i\pi na_n(y))\ e^{2i\pi x}=0.$$

Donc pour tout n, on a

$$a_n'(y)=-2\pi na_n(y)\quad \text{et } \exists c_n \text{ tel que } a_n=c_ne^{-2\pi ny}.$$

Ainsi

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{-2\pi ny}\ e^{2i\pi x}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{2i\pi nz}$$

et $c_n=a_ne^{2\pi ny}=\int_{iy}^{iy+1} f(z)e^{2i\pi z}\,\mathrm{d}z$ avec y quelconque. □

B Un peu de transformée de Fourier

Proposition 37. *La transformée de Fourier de $f(x)=e^{-\pi x^2}$ est $\hat{f}(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$.*

Démonstration. Posons $g(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)}\,\mathrm{d}x$. On a

$$(g(0))^2=(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x)^2=\int_{\mathbb{R}^2-\{0\}} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}_*^+\times[0,2\pi]} e^{-\pi\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=1.$$

Or

$$g'(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\phi(x,\xi)}{\partial\xi}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} i\frac{\partial\phi(x,\xi)}{\partial x}\,\mathrm{d}x=0\qquad\text{avec } \phi(x,\xi)=e^{-\pi(x+i\xi)^2}.$$

Finalement

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\ e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}e^{-\pi\xi^2}\,\mathrm{d}x=g(\xi)e^{-\pi\xi^2}=e^{-\pi\xi^2}.$$

□

Proposition 38. *Soient $c\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(y)>0$, la transformée de Fourier de $f_{c,y}(x)=e^{-\pi(x+c/2)^2y}$ est $\hat{f}_{c,y}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\pi\xi^2/y}\ e^{i\pi c\xi}$.*

Démonstration. La fonction $f_{c,y}$ est bien à décroissance rapide. Un changement de variable simple donne le résultat. □

Proposition 39. *Pour tout $z\in\mathbf{H}$, $\theta^4(\frac{-1}{2z})=-z^2\ \theta^4(z/2)$.*

Démonstration. La formule de Poisson (cf. p. 18) donne pour $\mathcal{R}e(y) > 0$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2/y}.$$

Le changement de variable $y = -iz$ donne

$$\theta(\frac{-1}{2z}) = \sqrt{-iz}\ \theta(z/2).$$

Et le résultat s'ensuit. □

C Les séries d'Eisenstein de poids strictement supérieur à 2

Si $k > 2$, $z \in \mathbf{H}$, posons

$$E_k^{(\infty)}(z) = \sum_{\gamma\in\ {}_{\Gamma_0(4)_\infty}\backslash\Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-k/2} \qquad \text{où} \qquad j(\gamma, z) = (cz+d)^2.$$

La raison pour laquelle on somme sur ${}_{\Gamma_0(4)_\infty}\backslash\Gamma_0(4)$ est que cela correspond exactement à sommer sur tout les $j(\gamma, z)$ distincts pour $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

On définit les séries d'Eisenstein aux autres pointes de $\mathbf{H}/\Gamma_0(4)$ par passage aux variables locales. Nous noterons $E_k^{(p_i)}(z)$ la série d'Eisenstein à la pointe p_i.

Proposition 40. *La série définissant $E_k^{(\infty)}(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{H}$.*

Démonstration. Commençons par nous intéresser au lemme suivant :

Lemme. *Si $\sigma > 2$ alors pour tout $z \in \mathbf{H}$ la série $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|nz+m|^\sigma}$ converge.*

Démonstration. On fixe $z \in \mathbf{H}$. Il existe une constante C tel que $|nz+m| \geqslant C\sqrt{n^2+m^2}$. Ainsi

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|nz+m|^\sigma} \leqslant \frac{1}{C} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2+m^2)^{\sigma/2}}.$$

Reste à voir que la deuxième série converge. Mais on la majore aisément par un multiple de

$$\int_{\mathbb{R}^2-K} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\sigma/2}}$$

où K est un voisinage compact de 0. Cette intégrale converge bien et se calcule par passage aux coordonnées polaires par exemple. □

Revenons à la démonstration de la proposition. Supposons d'abord que z appartienne au domaine fondamental $\mathcal{D}$. On a alors :

$$|mz+n|^2 = m^2 z\overline{z} + 2mn\mathcal{R}e(z) + n^2 \geqslant m^2 - mn + n^2 = |m\rho - n|^2.$$

D'après le lemme précédent, la série $\sum' 1/|m\rho - n|^{2k}$ est convergente et on a

$$\sum_{\gamma\in\ {}_{\Gamma_0(4)_\infty}\backslash\Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-2k} \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\rho-n)^{2k}}.$$

Le symbole $\sum'$ signifie que la somme porte sur les éléments non nuls. La série *converge uniformément* sur $\mathcal{D}$.

Soit K un compact de $\mathbf{H}$. Écrivons $\Gamma(1) = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ et posons $U_n = \bigcup_{i=1}^n s_i\mathcal{D}$. La famille d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvre $\mathbf{H}$ donc K et il existe n tel que $K \subset U_n$. Alors si $C = \min_{i=1..n} ||j(s_i^{-1}, z)||_{\infty,K} > 0$, on a

$$\forall z \in K, \quad E_k^{(\infty)}(g \cdot z) = j(g, z)\ E_k^{(\infty)}(z)$$

donc

$$||E_k^{(\infty)}(z)||_{\infty,K} \leqslant C\ ||E_k^{(\infty)}(z)||_{\infty,\mathcal{D}}.$$

□

Théorème 41. *Les fonctions d'Eisenstein sont des formes modulaires de poids k. De plus*

$$E_k^{(\infty)}(\infty) = 2, \quad E_k^{(\infty)}(0) = 0, \quad E_k^{(\infty)}(-1/2) = 0.$$

De même $E_k^{(p_j)}(z)$ vaut 2 en p_j et s'annule aux autres pointes.

Démonstration. La proposition 40 donne que $E_k^{(\infty)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}$. La propriété d'invariance découle de

$$j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma' \cdot z) j(\gamma, \gamma' \cdot z).$$

Reste à voir que $E_k^{(\infty)}$ est holomorphe à chaque pointe de l'action de $\Gamma_0(4)$ sur $\mathbf{H}$:

- La fonction $E_k^{(\infty)}$ est holomorphe à l'infini. Cela revient à prouver qu'elle a une limite pour $\mathcal{I}m(z) \to \infty$. Or, on peut supposer que z reste dans le domaine fondamental $\mathcal{D}$; vu que la convergence est uniforme sur $\mathcal{D}$, cela permet de passer à la limite terme à terme. Les termes $1/(mz+n)^{2k}$ relatifs à $m \neq 0$ donnent 0. Les termes où m=0 provienne de la classe d'équivalence de 1 et -1. On a donc $E_k^{(\infty)}(\infty) = 2$.
- Pour les autres pointes p_1, p_2, on a par définition

  $$E_k^{(\infty)}(p_i) = E_k^{(p_i)}(\infty).$$

  On passe à la limite terme par terme. Les $j(\gamma g^{-1}, z)$ susceptibles de ne pas s'annuler à l'infini sont ceux tel que, en prenant le bon représentant de la classe d'équivalence de γ, on ait $\gamma g^{-1} = \pm 1$. Il n'y a pas de tels éléments car g n'appartient pas à $\Gamma_0(4)$. Donc

  $$E_k^{(\infty)}(p_i) = E_k^{(p_i)}(\infty) = 0.$$

La dernière assertion vient de

$$E_k^{(\infty)}(\infty) = E_k^{(p_1)}(p_1) = E_k^{(p_2)}(p_2) = 2.$$

On voit aussi que, comme $g_2 g_1$ n'appartient pas à $\Gamma_0(4)$

$$E_k^{(p_1)}(p_2) = \lim_{\mathcal{I}m(z)\to\infty} \sum_{\gamma \in\ {\Gamma_0(4)_\infty} \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma g_1^{-1} g_2^{-1}, z) = 0.$$

De même $E_k^{(p_2)}(p_1) = 0$. □

Corollaire 42. *Le séries d'Eisenstein $E_k^{(p_i)}$, $i = 1, \dots, 3$ engendrent un sous-espace de dimension 3 de $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(4))$. De plus, tout $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(4))$ s'écrit de façon unique*

$$f = e + h$$

où e appartient au sous-espace engendré par les séries d'Eisenstein et $h \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(4))$ (i.e. une forme parabolique).

Démonstration. Cela est une conséquence directe de la proposition précédente. □

Références

[Casson & Bleiler] Andrew J. Casson et Steven A. Bleiler, *Automorphism of Surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press, 1988.

[Koblitz] Neal Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Springer, 1993.

[Sarnak] Peter Sarnak, *Some applications of modular forms*. Cambridge University Press, 1990.

[Serre] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*. Presses universitaires de France, "Le mathématicien", quatrième édition, 1995.

[Weil] André Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Springer, 1976.