Introduction à la géométrie des corps convexes

Joseph Lehec, encadré par Bernard Maurey

3 octobre 2005

Les corps convexes de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-ensembles qui sont convexes, compacts et d'intérieur non vide. Rappelons qu'on associe une jauge à tout corps convexe contenant 0 dans son intérieur et que si le corps est symétrique cette jauge devient une norme. Il revient donc au même d'étudier les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ et d'étudier les espaces de Banach de dimension n. On s'intéresse principalement à ce qu'il se passe quand la dimension tend vers l'infini, c'est ce qu'on appelle la théorie asymptotique des corps convexes (ou des espaces de Banach). Prenons par exemple la boule euclidienne de rayon 1 qu'on note B_2^n et le cube $[-1,1]^n$ qu'on note B_∞^n. On a $B_2^n \subset B_\infty^n$ et on ne peut pas faire mieux : si $\lambda > 1$ alors $\lambda B_2^n \not\subset B_\infty^n$. D'un autre côté $B_\infty^n \subset \sqrt{n} B_2^n$ et le $\sqrt{n}$ est optimal. Ainsi quand la dimension grandit la boule euclidienne et le cube sont dans un certains sens de plus en plus éloignés. Il arrive souvent en grande dimension qu'on trouve comme ici des résutats un peu surprenants, ou du moins contraires à l'intuition. On essaiera dans ce mémoire de donner une vision assez large du domaine en présentant beaucoup d'exemples.

1 Théorème de Brunn-Minkowski et mesures log-concaves

Un des gros morceaux de la géométrie des corps convexes est ce qu'on appelle parfois la tomographie : l'étude des sections d'un corps convexe par des sous-espaces stricts, en particulier des hyperplans, vectoriels ou affines. Nous allons donner un exemple très simple : on se donne un corps convexe symétrique par rapport à l'origine et une direction $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$K_t = K \cap \big(tu + u^\perp\big).$$

Question : est-il vrai que le volume de K_t sera maximal pour $t = 0$?
Comme le suggère un dessin, la réponse est oui, mais c'est un résultat qui n'est pas trivial, c'est en effet une conséquence du fameux

Théorème 1 (Théorème de Brunn-Minkowski)
Soient A et B deux sous-ensembles mesurables et non vides de $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ on a

$$\big(|\lambda A + (1-\lambda)B|_n{}^*\big)^{1/n} \geq \lambda |A|_n{}^{1/n} + (1-\lambda)|B|_n{}^{1/n}, \tag{1}$$

où $|\cdot|_n$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Plusieurs remarques s'imposent : la notation $A+B$ désigne la somme de Minkowski des ensembles A et B, c'est-à-dire l'ensemble $\{x+y,\, x\in A,\, y\in B\}$. Cet ensemble n'étant pas nécessairement mesurable la notation $|\cdot|^*$ est à entendre comme suit :

$$|C|^* = \inf\{|B|,\ C\subset B,\ B \text{ borélien }\}.$$

Revenons à notre exemple : en utilisant la convexité de K et le théorème de Brunn-Minkowski on prouve que la fonction : $t \longrightarrow {|K_t|_{n-1}}^{1/n-1}$ est concave sur son support. Comme par ailleurs elle est paire, elle est donc maximale en zéro, d'où le résultat.

Si dans le théorème de Brunn Minkowski on remplace (1) par

$$|\lambda A+(1-\lambda)B|_n \geq {|A|_n}^{\lambda}\,{|B|_n}^{1-\lambda}, \tag{2}$$

on obtient un résultat a priori plus faible, puisque $\big(\lambda a^{1/n}+(1-\lambda)b^{1/n}\big)^n \geq a^{\lambda}b^{1-\lambda}$ pour tous réels positifs a et b. Cependant il n'est pas difficile de déduire (1) de (2) en utilisant l'homogénéité du volume. De plus cette inégalité est souvent plus commode car elle reste vraie si les ensembles A ou B sont vides et elle ne fait pas intervenir la dimension. Elle permet également de deviner une version fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkovski :

Théorème 2 (Inégalité de Prékopa-Leindler)
Soit f, g et m des fonctions mesurables positives et $\lambda\in(0,1)$ tels que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ on ait

$$m\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \geq f(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} m \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g\Big)^{1-\lambda}.$$

Naturellement si on applique ce théorème aux fonctions indicatrices de A, B et $\lambda A+(1-\lambda)B$ on retrouve le théorème de Brunn-Minkowski (dans sa version faible). Cette inégalité se démontre par récurrence sur la dimension, et c'est l'initialisation de la récurrence (qui revient à démontrer Brunn-Minkowski en dimension 1) qui est la plus dure. Il est aussi possible de démontrer Brunn-Minkowski par des méthodes de symétrisation (c'est d'ailleurs la méthode originelle de Minkowski) ou par transport optimal de mesure. Le théorème de Brunn-Minkowki a de multiples applications en géométrie convexe, il permet en particulier de résoudre le problème de l'isopérimétrie sur $\mathbb{R}^n$: on se donne un ensemble A de mesure finie et on définit ainsi sa surface :

$$s(A) = \liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{|A_\epsilon\backslash A|_n}{\epsilon},$$

où $A_\epsilon = \{x\in\mathbb{R}^n;\ d(x,A)\leq\epsilon\} = A+\epsilon B_2^n$ est l'épaissi de taille ϵ de A. Le problème de l'isopérimétrie est de déterminer quels ensembles, parmi ceux ayant une mesure donnée, minimisent la mesure de surface. Supposons $|A|_n = |B_2^n|_n = v_n$. L'inégalité de Brunn-Minkowski et l'homogénéité du volume impliquent

$$\begin{aligned} |A+\epsilon B_2^n|_n &\geq \big(|A|^{\frac{1}{n}}+\epsilon|B_2^n|^{\frac{1}{n}}\big)^n \\ &= (1+\epsilon)^n v_n = |(1+\epsilon)B_2^n|. \end{aligned}$$

L'accroissement de volume est donc plus grand quand on épaissit A que quand on épaissit B_2^n et donc parmi les ensembles de volume donné la boule euclidienne minimise la surface.

Le théorème de Brunn-Minkovski nous pousse à introduire la définition suivante :

Définition 3
On dira qu'une mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}^n$ est log-concave si pour tous boréliens A et B et pour tout $\lambda \in (0,1)$ on a

$$\mu^*\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}.$$

On peut tout de suite donner quelques exemples : le théorème de Brunn-Minkowski nous dit que la mesure de Lebesgue est log-concave, ainsi que la mesure uniforme sur un convexe : pour tout K convexe, la mesure μ_K définie par $\mu(A) = |A \cap K|_n$ est log-concave. En appliquant correctement Prékopa-Leindler on peut également voir que si μ est à densité log-concave (i.e. de la forme $e^{-\phi}$ avec ϕ convexe) alors μ est log-concave. En particulier, la mesure gaussienne est log-concave. Voici un premier exemple d'application de cette notion :

Proposition 4
Soient μ une mesure qui soit log-concave et symétrique et C un corps convexe symétrique (sous-entendu par rapport à l'origine les deux fois), alors pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mu(C+x) \leq \mu(C).$$

La démonstration est très simple : il suffit d'appliquer l'hypothèse de log-concavité à $C+x$, $-C-x$ et $\lambda = 1/2$. Ce résultat nous dit en particulier que parmi les translatés d'un corps convexe symétrique, c'est celui qui est centré en l'origine qui a la plus grande mesure gaussienne.

2 Le phénomène de concentration de la mesure

Commençons par un exemple : soit K_n la boule euclidienne de dimension n de volume 1. Un calcul un peu pénible montre que son rayon r_n vaut $\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}}\right)^{1/n}$, ce qui est équivalent à $\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$. Le rayon de K_n croît comme $\sqrt{n}$. Intéressons-nous aux volumes $(n-1)$-dimensionnels des sections orthogonales à une direction donnée (par exemple le premier vecteur de base : e_1). On obtient après quelques calculs les résultats asymptotiques suivants :

$$\begin{array}{rcl} |K_n \cap e_1{}^\perp|_{n-1} & \sim_\infty & \sqrt{\mathrm{e}} \\ |K_n \cap (te_1 + e_1^\perp)|_{n-1} & \sim_\infty & \sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{e} t^2}. \end{array}$$

On a donc une décroissance sous-gaussienne du volume des sections orthogonales à e_1 en fonction de leur éloignement de la section centrale. Et ce qui est surtout remarquable c'est que cette décroissance ne dépend plus de la dimension. Le résultat est plus spectaculaire encore si on le regarde comme suit : considérons la quantité suivante $|K_n \cap \{x,\ -\frac{1}{2} \leq < x, e_1 > \leq \frac{1}{2}\}|_n$. D'après ce qui précède, asymptotiquement, elle se comportera comme

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{e} t^2}\, dt \ \approx\ 97\%!$$

Quand n grandit on a à peu près 97% de la masse de cette boule dans la tranche $\{-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\}$ alors même que le rayon de cette boule tend vers l'infini (et donc que cette tranche est de plus en plus ridiculement fine comparée au rayon). On peut donc affirmer que la masse de la boule euclidienne se concentre au voisinage d'une section centrale. Ce phénomène n'est, le lecteur l'aura deviné, absolument pas spécifique à la boule euclidienne. Il est dès lors pertinent d'introduire la définition suivante :

Définition 5
Soit (X, d) un espace métrique muni d'une mesure de probabilité P. On dira que cet espace jouit de la concentration $\alpha(\epsilon)$ si pour tout ensemble mesurable A vérifiant $P(A) \geq \frac{1}{2}$ et pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$P\{x \in X,\ d(x, A) > \epsilon\} \leq \alpha(\epsilon).$$

Ceci signifie que si vous prenez un ensemble assez gros (au sens de P) et que vous l'épaississez un peu (au sens de d) alors il devient vraiment très gros. Nous montrerons dans la suite que la boule euclidienne de volume 1 (sous-entendu munie de la distance euclidienne et de la mesure uniforme) a une concentration en $e^{-c\epsilon^2}$, c étant une constante numérique (ne dépendant en particulier pas de la dimension). Si on préfère parler de la boule unité (sous entendu munie de la distance euclidienne et de la mesure uniforme normalisée), il faut faire attention à la renormalisation : la concentration est alors en $e^{-cn\epsilon^2}$, n étant bien sûr la dimension. On remarque que la concentration de la boule euclidienne est d'autant meilleure que la dimension grandit. La proposition suivante met en lumière les intérêts de la notion de concentration.

Proposition 6
Soit (X, d, P) ayant la concentration $\alpha(\epsilon)$. Soit f une fonction 1-lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$. On a, pour tout $\epsilon > 0$

$$P\{|f - m_f| > \epsilon\} \leq 2\alpha(\epsilon),$$

où m_f désigne une médiane de f.

Autrement dit, une fonction lipschitzienne sur un espace bien concentré est, avec forte probabilité, quasi-constante égale à sa médiane (en pratique on s'arrange souvent pour remplacer la médiane par la moyenne qui est plus maniable).

Démonstration : c'est très simple. Posons $A = \{f \geq m_f\}$ et notons $A_\epsilon = \{x \in X;\ d(x, A) \leq \epsilon\}$ (c'est l'épaissi de taille ϵ de A). Par définition de la médiane $P(A) \geq \frac{1}{2}$, donc $P(X \backslash A_\epsilon) \leq \alpha(\epsilon)$. Et il est facile de voir que comme f est 1-lip, on a $X \backslash A_\epsilon \supset \{f - m_f > \epsilon\}$, et on a la même chose dans l'autre sens, d'où le résultat. $\square$

La grande idée de la théorie asymptotique des espaces de Banach est d'utiliser ces inégalités, que les probabilistes qualifieraient d'inégalités de grandes déviations, pour construire aléatoirement des objets géométriques.

2.1 Le cas gaussien

C'est un peu lui qui est à l'origine de cette théorie, il est donc particulièrement instructif. En particulier il va illustrer le cousinage entre la concentration de la mesure et l'isopérimétrie. Dans la suite γ_n désignera la mesure gaussienne standard, i.e. la mesure ayant $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-|x|_2{}^2/2}$ pour densité.
Soit un espace métrique (X, d) muni d'une mesure μ. On se donne un ensemble A de mesure finie, il semble raisonnable de définir ainsi sa surface :

$$\text{surface}(A) = \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\mu(A_\epsilon \backslash A)}{\epsilon},$$

où $A_\epsilon = \{x \in X;\ d(x, A) \leq \epsilon\}$ est l'épaissi de taille ϵ de A pour la métrique d.

Théorème 7 (isopérimétrie gaussienne)
Soit $A \subset \mathbb{R}$, et H un demi-espace affine de même mesure : $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$. Soient A_ϵ et H_ϵ les épaissis de, respectivement, A et H pour la distance euclidienne. Alors pour tout $\epsilon \geq 0$ on a

$$\gamma_n(A_\epsilon) \geq \gamma_n(H_\epsilon).$$

En particulier, parmi les ensembles de même mesure gaussienne, les demi-espaces affines minimisent la surface.

Ce théorème peut se démontrer par des méthodes de symétrisation (Ehrhard) ou en important le résultat d'isopérimétrie sur la sphère (résolu par P.Lévy, et qui utilise aussi des méthodes de symétrisation). On ne rentrera pas dans les détails mais on voulait simplement signaler que c'est loin d'être évident.
Il est par contre très facile de déduire du théorème précédent la concentration de l'espace gaussien : soit A tel que $\gamma_n(A) = \frac{1}{2}$. On pose $H = \{x_1 \leq 0\}$. On a bien sûr $\gamma_n(H) = \frac{1}{2}$, le théorème donne

$$\gamma_n(A_\epsilon) \geq \gamma_n(H_\epsilon) = \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \geq 1 - \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2}.$$

Il vient donc la

Proposition 8
L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Gauss possède la concentration $\alpha(\epsilon) = \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2}$. En particulier si $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne alors

$$\gamma_n\{|\phi - m_\phi| > \epsilon\} \leq e^{-\epsilon^2/2}. \tag{3}$$

En fait on n'a pas besoin de prouver l'isopérimétrie gaussienne pour obtenir des résultats du type (3). D'une manière générale, le problème de l'isopérimétrie est un problème plus difficile que celui de la concentration. Pour illustrer ceci nous allons prouver une inégalité à peine plus faible que (3) en utilisant Prékopa-Leindler.

Lemme 9
Soit ϕ une fonction 1-lipschitzienne et $t \geq 0$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{t\phi(x) - t\phi(y)}\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \leq e^{t^2}.$$

Démonstration : pour x et y dans $\mathbb{R}^n$ posons

$$\begin{aligned} f(x) &= \min_{h\in\mathbb{R}^n}\{tf(x+h)+\frac{|h|^2}{4}\} - \frac{|x|^2}{2}, \text{ et} \\ g(y) &= -tf(y) - \frac{|y|^2}{2}. \end{aligned}$$

En prenant $h = y - x$ dans la définition de f on remarque que

$$\frac{f(x)+g(y)}{2} \leq \frac{1}{8}|x-y|^2 - \frac{1}{4}|x|^2 - \frac{1}{4}|y|^2 = -\frac{1}{2}|\frac{x+y}{2}|^2.$$

Posant $m(z) = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}$ on trouve

$$m(\frac{x+y}{2}) \geq \left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^{f(y)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'inégalité de Prékopa-Leindler donne

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} m\Big)^2 \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^f\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^g\Big). \tag{4}$$

La condition de Lipschitz donne $t\phi(x+h) \geq t\phi(x) - t|h|$. De plus $\min_h\{-t|h| + |h|^2/4\} = -t^2$. Il vient donc $f(x) \geq t\phi(x) - t^2 - |x|^2/2$. En divisant (4) par $(2\pi)^n$ et en y reportant ce qui précède on trouve

$$1 \geq \big(\mathrm{e}^{-t^2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{t\phi(x)}\,d\gamma_n(x)\big)\big(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-t\phi(y)}\,d\gamma_n(y)\big),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

On sait par Markov que pour tout $t > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$

$$\gamma_n\{\phi(x) - \int\phi d\gamma_n \geq \epsilon\} \leq \mathrm{e}^{-t\epsilon}\int \mathrm{e}^{t(\phi-\int\phi d\gamma_n)}d\gamma_n,$$

tandis que par Jensen on a

$$\int \mathrm{e}^{t(\phi-\int\phi d\gamma_n)}d\gamma_n \leq \int \mathrm{e}^{t\phi(x)-t\phi(y)}d\gamma_n(x)d\gamma_n(y).$$

On obtient donc (en utilisant le lemme)

$$\gamma_n\{\phi(x) - \int\phi d\gamma_n \geq \epsilon\} \leq \mathrm{e}^{-t\epsilon}\mathrm{e}^{t^2}.$$

Il suffit alors d'optimiser en t pour obtenir l'inégalité suivante qu'on exprime en termes probabilistes : soit G un vecteur gaussien normal à valeur dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. G suit la loi γ_n), ϕ une fonction 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$P\{|f(G) - \mathbb{E}f(G)| > \epsilon\} \leq 2e^{-\epsilon^2/4}.$$

Cette inégalité est une des plus importantes de la théorie asymptotique des corps convexes. Elle est en particulier l'ingrédient clé de la démonstration du théorème de Dvoretzky que donne Pisier dans son livre [5]. Le théorème de Dvoretzky, qui dit qu'un Banach de dimension n admet des sous-espaces quasi-euclidiens de dimension $\log(n)$ fut, dans sa démonstration par Milman, le premier exemple de résultat de nature géométrique obtenu par des méthodes probabilistes (Milman utilisa la concentration de la mesure sur la sphère).

Il y aurait encore beaucoup à dire, tant sur la géométrie gaussienne que sur les liens entre isopérimétrie et concentration (il faudrait parler des inégalités log-Sobolev) mais il s'agit là de résultats que je n'ai pas vraiment étudiés (du moins pas encore) à la différence de ce qui suit.

2.2 La concentration des mesures log-concaves

Il existe des liens étroits entre log-concavité, théorème de Brunn-Minkowski d'une part, et concentration de la mesure d'autre part. Le théorème suivant en est l'illustration, rappelons quelques définitions avant de l'énoncer. Si K est un corps convexe symétrique l'application

$$x \longrightarrow \sup\{t > 0;\ \frac{1}{t}x \in K\}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ dont K est la boule unité. Notons $\|\cdot\|$ cette norme. On dit que K est uniformément convexe s'il existe pour tout $\epsilon > 0$ un $\delta(\epsilon) > 0$ tel qu'on ait la propriété suivante

$$\forall x, y \in K,\ \|x - y\| \geq \epsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon). \tag{5}$$

Dans ce cas la plus grande fonction δ qu'on puisse prendre est appelée module de convexité de K. On est maintenant en mesure d'énoncer le

Théorème 10 (Gromov-Milman)
Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que K est uniformément convexe et on appelle δ son module de convexité. On appelle d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ et μ la mesure uniforme normalisée sur K ($\mu(A) = \frac{|A|_n}{|K|_n}$ pour tout $A \subset K$). Dans ces conditions (K, d, μ) possède la concentration

$$\alpha(\epsilon) = 2e^{-2n\delta(\epsilon)}.$$

Démonstration : Soit $A \subset K$ de mesure plus grande que $\frac{1}{2}$. On pose $B = \{x \in K;\ d(x, A) > \epsilon\}$. Il est facile de voir que (5) implique alors

$$\frac{A+B}{2} \subset (1 - \delta(\epsilon))K.$$

Or par Brunn-Minkowski

$$\mu(\frac{A+B}{2}) \geq \mu(A)^{\frac{1}{2}}\,\mu(B)^{\frac{1}{2}}.$$

Il vient donc

$$\mu(B) \leq 2(1-\delta)^{2n} \leq 2e^{-2n\delta(\epsilon)},$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Ce théorème démontre en particulier la concentration qu'on avait annoncée pour la boule euclidienne puisque que celle-ci vérifie (5) avec $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon^2$, il y a même égalité : c'est l'identité du parallélogramme. Le théorème suivant est parfois appelé théorème de concentration pour les mesures log-concaves.

Lemme 11 (Borell)
Soit C un corps convexe et μ une mesure de probabilité log-concave. Pour tout $t \geq 1$ on a

$$\mu\big(\mathbb{R}^n \backslash tC\big) \leq \mu(C)\big(\frac{1-\mu(C)}{\mu(C)}\big)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Bien sûr ce résultat n'a d'intérêt que si $\frac{1-\mu(C)}{\mu(C)} < 1$ soit $\mu(C) < \frac{1}{2}$. Il faut aussi noter que nous n'obtenons pas de concentration au sens de la définition 5, en particulier le résultat précédent appliqué à la mesure de Gauss donne quelque chose de beaucoup plus faible que ce qu'on a obtenu à la proposition 8. C'est d'ailleurs une direction de recherche actuelle de déterminer les classes de corps convexes qui vérifient des concentrations meilleures que celle qui précède. Néanmoins le résultat précédent n'est pas sans intérêt puisqu'il implique en particulier le

Théorème 12 (Borell)
Soit C un corps convexe symétrique, on note $\|\cdot\|$ la norme associée, soit P une mesure de proba log-concave sur $\mathbb{R}^n$, X un vecteur aléatoire de loi P, on a, pour tout $q \geq 1$,

$$\mathbb{E}\|X\| \;\leq\; \big(\mathbb{E}\|X\|^q\big)^{1/q} \;\leq\; Lq\mathbb{E}\|X\|. \tag{6}$$

C'est bien sûr l'inégalité de droite qui est intéressante (celle de gauche c'est juste Hölder). Ce théorème est à rapprocher du lemme de Shepp-Landau-Fernique qui dit en gros la même chose (en fait il y a un $\sqrt{q}$ à la place de q) mais uniquement pour le vecteur gaussien. Donc, de ce point de vue, les mesures log-concaves se comportent (presque) comme la mesure gaussienne.

Démonstration : on peut supposer par homogénéité que $\mathbb{E}\|X\| = \frac{1}{3}$, auquel cas, par Markov, $P\{C\} > \frac{2}{3}$. Utilisant le lemme 11 on trouve pour tout $t > 1$:

$$P\{\mathbb{R}^n \backslash (tC)\} \leq P(C)\big(\frac{1-P(C)}{P(C)}\big)^{\frac{t+1}{2}} \leq \big(\frac{1}{2}\big)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{7}$$

Soit $q \geq 1$, par Fubini on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|X\|^q &= \int_0^\infty qt^{q-1}P\{\|X \geq t\|\}\,dt \\ &= \int_0^1 qt^{q-1}P\{\|X \geq t\|\}\,dt + \int_1^\infty qt^{q-1}P\{\|X \geq t\|\}\,dt.\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité le premier terme est majoré par $\int_0^1 qt^{q-1}\,dt = 1$. Pour majorer le deuxième terme on utilise l'inégalité (7), on trouve qu'il est majoré par

$$\int_1^\infty qt^{q-1}\big(\frac{1}{2}\big)^{\frac{t+1}{2}}\,dt \;\leq\; L_1q(L_2)^q\Gamma(q).$$

Comme $\left(\Gamma(q)\right)^{\frac{1}{q}} \leq L_3 q$, on trouve

$$\left(\mathbb{E}\|X\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq L_4 q,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Ce théorème est bon exemple de résultat qu'on cherche à obtenir en géométrie des corps convexes en ce sens qu'il est très universel : la constante dans l'inégalité (6) ne dépend ni du corps C, ni de la mesure μ ni, et c'est très important, de la dimension.

Références

[1] K. Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. In Silvio Levy, editor, *Flavors of geometry*. Mathematical Science Research Institute, 1997.

[2] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon.* American Mathematical Society, 2001.

[3] B. Maurey. Inégalités de Brunn-Minkowski-Lusternik et autres inégalités géométriques et fonctionnelles. In *Séminaire Bourbaki 56ème année*, volume 928, novembre 2003.

[4] V. Milman and G. Schechtman. *Asymptotic theory of finite dimensional normed space.* Lecture notes in mathematics 1200. Springer-Verlag, 1986.

[5] G. Pisier. *The volume of convex bodies and Banach space geometry.* Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1989.