Introduction au groupe fondamental tempéré

Emmanuel LEPAGE
sous la direction d'Yves André

21 janvier 2007

Table des matières

Introduction

Je vais essayer, dans cette introduction à mon sujet de recherche, d'expliquer ce qu'est le groupe fondamental d'un schéma, puis de me lancer dans le p-adique pour introduire le groupe fondamental tempéré d'une vairété p-adique telle qu'elle est définie par Yves André dans [**?**, section 3.1].
Ainsi après avoir rapidement rappelé la notion de p-adiques et de schémas, et parlé brièvement de la structure des schémas sur l'anneau O_K des entier d'un corps valué non archimédien, je m'intéresserai à la notion de revêtement algébrique d'un schéma puis à la notion de catégorie galoisienne, pour en déduire le groupe fondamental d'un schéma. Je rappellerai alors brièvement les résultats de [**?**, exposé XI] en cequi concerne les liens entre le groupe fondamental de la fibre spéciale et de la fibre générique pour un schéma sur O_K.
On s'intéressera alors plus précisément au point de vue analytique. Pour cela, on se placera dans le cadre des espaces de Berkovich, qu'alors je définirai. Les espaces de Berkovich ont l'avantage par rapport aux espaces de Tate, qui constitue le cadre analytique p-adique historique, d'avoir pour espace sous-jacent un bon espace topologique (alors que les espaces de Tate sont muni de topologies de Grothendieck). Plus précisément, l'espace de Berkovich associé à un K-schéma lisse est localement contractile, ce qui permet de considérer la notion usuelle de revêtement topologique. A partir de là, on pourra définir le groupe fondamental tempéré d'un K-schéma lisse.

1 Corps valués complets non archimédiens et p-adiques

Rappelons très brièvement pour commencer la définition des p-adiques.
Une valeur absolue non archimédienne sur un corps K est une fonction $|\ |: K \to \mathbf{R}_+$ telle que :
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leqslant \sup(|x|, |y|)$ (inégalité ultramétrique)

Un corps muni d'une telle valeur absolue est appelé corps valué non archimédien (on considére également souvent la valuation $v = \log|\ |$). La valeur absolue définit trivialement une distance sur ce corps (deux valuations proportionnelles définissent la même topologie et donc on parle de valuations équivalentes). On dira donc qu'il est complet, s'il est complet en tant qu'espace métrique. Ainsi, le complété d'un corps valué non archimédien est un corps valué complet.
Si K est un corps valué complet non archimédien, $O_K = \{x \in K | |x| \leqslant 1\}$ est un anneau local d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}_K = \{x | |x| < 1\}$. On l'appelle anneau des entiers de K (pour la valuation $|\ |$). On appelle corps résiduel de K le corps $k = O_K/\mathfrak{m}_K$.
Un corps valué complet non archimédien est appelé corps à valuation discrète si l'image de K^* par le morphisme de groupe $|\ | : K^* \to \mathbf{R}_+^*$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}_+^*$.

Exemples :
- Soit K un corps. Considérons le corps des fractions rationnelles $K(X)$, muni de $|\ |_0 : K(X) \to \mathbf{R}_+$ définie sur $P = \sum a_n X^n \in K[X]$ par $|P|_0 = e^{-\inf\{n | a_n \neq 0\}}$ et prolongée à $K(X)$ par multiplicativité. $K(X)$ est ainsi un corps valué non archimédien, dont le complété est $K((X)) = K[[X]][\frac{1}{X}]$. L'anneau des entiers de $K((X))$ est l'anneau des séries formelles $K[[X]]$ et son corps résiduel est K.
- Soit p un nombre premier. Considérons $|\ |_p : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}_+$ définie par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ où v_p est la valuation p-adique sur $\mathbf{Q}$. Ceci fait de $\mathbf{Q}$ un corps valué non archimédien.
  On appelle corps des nombres p-adiques (qu'on note $\mathbf{Q}_p$) son complété : c'est un corps à valuation discrète. On note $\mathbf{Z}_p$ son anneau des entiers (dont les éléments sont les entiers p-adiques). Le corps résiduel de $\mathbf{Q}_p$ est $\mathbf{F}_p$ (ainsi, dans cet exemple, le corps valué et son corps résiduel sont de caractéristiques différentes, contrairement à l'exemple précédent).

Si K est un corps valué complet, et si L est une extension fini de K, alors la valeur absolue de K s'étend de manière unique en une valuation de L (par $|x|_L = |N_{L/K}(x)|_K^{\frac{1}{[L:K]}}$), ce qui fait naturellement de L un corps valué complet. On en déduit une valeur absolue naturelle sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, mais pour laquelle $\overline{K}$ n'a pas de raison d'être complet.
On définit pour cela $\mathbf{C}_p$ comme étant le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. C'est un corps valué complet algébriquement clos et, pour cette raison, il sert d'équivalent p-adique de $\mathbf{C}$.
Ainsi, par la suite on travaillera principalement sur des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ ou sur $\mathbf{C}_p$.

2 Schémas

Je vais rapidement rappeler la construction des schémas, qui constituent l'objet principal d'étude de la géométrie algébrique.
A un anneau A, on peut associé l'ensemble $X = \operatorname{Spec} A$ des idéaux premiers de A muni de la topologies où les fermés sont les $V(I) = \{J \in \operatorname{Spec} A | I \subset J\}$ quand I décrit l'ensemble des idéaux de A.

Rappelons ce qu'est un faisceau d'anneau O sur un espace topologique X. C'est la donnée pour tout ouvert U d'un anneau $O(U)$, pour tout $U \subset V$ d'un morphisme $r_{UV} : O(V) \to O(U)$ telle que $r_{UW} = r_{UV} r_{VW}$ si $U \subset V \subset W$ et enfin, si on a un recouvrement ouvert (U_i) de U et des $f_i \in O(U_i)$ tels que $r_{U_i \cap U_j, U_i}(f_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(f_j)$ pour tout (i,j), alors (f_i) se relève en un unique élément f de $O(U)$ tel que $r_{U_i U}(f) = f_i$.
On peut alors munir $\operatorname{Spec} A$ d'un faisceau d'anneau O_X : si $f \in A$, alors $O_X(D(f)) = A_f$, où $D(f) = X - V((f))$ (les $D(f)$ formant une base d'ouvert de X, il suffit de définir O_X sur les $D(f)$). Cela fait de X un espace localement annelé (si $x \in X$, $O_x = \varinjlim_{x \in U} O(U)$ est un anneau local), appelé schéma affine.
Un schéma est alors un espace localement annelé, qui est localement isomorphe à un schéma affine. Un morphisme entre schémas $X \to Y$ est alors un morphisme d'espace localement annelé (c'est-à-dire une application continue $f : X \to Y$ et un morphisme de faisceau d'anneau $f_* O_Y \to O_X$ qui est local (il induit un morphisme d'anneaux locaux $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ qui envoit l'idéal maximal dans l'idéal maximal, pour tout $x \in X$).
Alors on a une bijection canonique entre les morphismes de schéma $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ et les morphismes $A \to B$.

Dans mon travail je m'intéresse plus précisément à des schémas sur K, où K est un corps valué complet non-archimédien (de corps résiduel k), ou sur O_K (l'anneau des éléments de K de valuation positive). En fait, on ne s'intéressera qu'au cas où K est une extention fini de $\mathbf{Q}_p$, ou $\mathbf{C}_p$ (le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$.
Le schéma $\operatorname{Spec} O_K$ est constitué de deux points : l'un fermé (point spécial) qui correspond moralement à k (c'est l'image du point $\operatorname{Spec} k$ par le morphisme induit par $O_K \to k$), et l'autre dense (point générique) qui correspond moralement à K (c'est l'image du point $\operatorname{Spec} K$ par le morphisme induit par $O_K \to K$).
Si l'on considère un schéma X sur O_K on peut alors considéré la fibre générique comme un schéma X_K sur K, et la fibre spéciale comme un schéma X_k sur k. Ils s'obtiennent par changement de base : quand on a un morphisme $X \to Y$ et un schéma S sur Y, on peut définir un produit fibré S' de X et de S au-dessus de Y dans la catégorie des schémas, qui se définit localement en terme d'anneau comme un produit tensoriel (si $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ et $S = \operatorname{Spec} C$, $S' = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$).

3 Groupe fondamental d'un schéma

3.1 Morphismes étales et revêtements

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schéma.
On dit que f est plat si pour tout $x \in X$, $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ est plat (c'est-à-dire $O_{X,x}$ est un $O_{Y,f(x)}$-module plat). La notion de platitude d'un morphisme peut-être vu en terme de "famille continue" de schéma : si $X \to Y$ est plat, on dit parfois que la famille $(X_y)_{y \in Y}$ des fibres est une "famille continu" de schémas (Ainsi, les schémas sur O_K que nous considèrerons seront toujours plats).
On dit que f est lisse de dimension p s'il est de type fini (c'est-à-dire si l'image réciproque de tout ouvert affine $\operatorname{Spec} A$ de Y est recouvert par un nombre fini

d'ouverts affines de X correspondant à des A-algèbres de type fini) et si localement il est de la forme $\operatorname{Spec} A[X_1, .., X_n]/(f_1, .., f_{n-p}) \to \operatorname{Spec} A$ où la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ est en tout point de rang $n-p$ dans le corps résiduel en ce point (cette définition est parfaitement analogue au critère pour que des fonctions analytiques sur $\mathbf{C}^n$ définissent une sous-variété analytique ; ainsi on pourra associer à une schéma lisse sur $\mathbf{C}$ une variété analytique complexe).

Un morphisme d'anneaux locaux $\phi : A \to B$ est dit non ramifié si $\phi(\mathfrak{m}_A)B = \mathfrak{m}_B$ et si $B/\mathfrak{m}_B$ est une extension finie et séparable de $A/\mathfrak{m}_A$.
Un morphisme $f : X \to Y$ est dit étale s'il est de type fini et si pour tout $x \in X$, $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ est plat et non ramifié.
Ils correspondent aussi aux morphismes lisses de dimension 0.

Un revêtement algébrique d'un schéma X est un morphisme de schéma $S \to X$ qui est étale, propre (c'est-à-dire principalement qu'il est topologiquement fermé après n'importe quel changement de base) et fini (il est localement de la forme $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ avec B une A-algèbre finie). Un morphisme de revêtement $S \to S'$ n'est rien d'autre qu'un morphisme de X-schémas, c'est-à-dire un morphisme de schémas $S \to S'$ tel que

$$\begin{array}{ccc} S & \to & S'. \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

Les revêtements algébriques de X forment alors une catégorie qu'on notera $Cov^{alg}(X)$
Les revêtements algébriques seront l'équivalent des revêtements usuels en topologie, pour la définition d'un groupe fondamental algébrique.

3.2 Catégories galoisiennes

Une catégorie galoisienne, telle que Grothendieck la définit dans [**?**, exposé V], est une catégorie $\mathcal{C}$ qui
- admet des produits fibrés et un objet final (et donc des limites projectives finies),
- admet des sommes directes finies et des quotients par un groupe fini d'automorphismes,
- est tel que tout morphisme $S \to S'$ se décompose comme la composé fg d'un épimorphisme strict $g : S \to S''$ et d'un monomorphisme $f : S'' \to S'$ tel que S'' soit alors un sommande direct de S',

et qui admet un foncteur $F : \mathcal{C} \to FSets$(la catégorie des ensemble finies) tel que
- F est exacte à gauche (F commute aux produits fibrés),
- F commute aux sommes directes, transforme épimorphismes stricts en épimorphismes, et commute avec le passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes,
- si l'image par F d'un morphisme est un isomorphisme, alors le morphisme était déjà un isomorphisme.

L'exemple type de catégorie galoisienne est la catégorie $G - FSets$ des ensembles finis munis d'une action continue du groupe profini G (un groupe profini est un groupe topologique compacts dont les sous-groupes ouverts forment une base de voisinage de 1, ou, de façon équivalente, c'est une limite inverse de groupes finis, en tant que groupe topologique), où F envoit un G-ensemble fini sur l'ensemble sous-jacent (on ne fait qu'oublier l'action de G).
Réciproquement, Grothendieck démontre que toute catégorie galoisienne $\mathcal{C}$ est de cette forme, avec $G = \mathrm{Aut}\, F$ (où les stabilisateurs d'éléments de $F(S)$ forment une base de voisinage de 1 quand S varie), qui s'appelle le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. Plus précisément, tout morphisme exacte $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre catégorie galoisienne provient d'un morphisme de groupe $\pi_1(\mathcal{C}') \to \pi_1(\mathcal{C})$, unique à conjugaison près (par un élément de $\pi_1(\mathcal{C}')$). Ainsi, on peut de manière équivalente considérer la catégorie des catégories galoisiennes (où les morphismes sont les foncteurs exacts à isomorphisme près) et la catégorie des groupes à conjugaison près.

3.3 Groupe fondamental d'un schéma

Revenons à nos revêtements algébriques. Soit X un schéma connexe.
Soit x un point géométrique de X (c'est-à-dire un morphisme $\mathrm{Spec}\, k \to X$ où k est un corps algébriquement clos). Soit S un revêtement algébrique, considérons l'ensemble $F_x(S)$ des relèvements de x à S (c'est un ensemble fini car $S \to X$ est unmorphisme fini). Ceci nous définit donc un foncteur $F_x : Cov^{alg}(X) \to FSets$, et l'on vérifie alors que $Cov^{alg}(X)$ est une catégorie galoisienne. On note $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ son groupe fondamental, qui ne dépend de x que par conjugaison (on note $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x)$ le groupe fondametal correspondant au foncteur F_x).
Si l'on a un morphisme $f : X \to Y$, alors on a un morphisme de groupe parfaitement bien défini $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(Y, y)$ où y est l'image de X sur Y par f (mais il n'est que défini à conjugaison près si l'on ne considère pas un x en particulier).
Prenons un exemple simple, qui justifie la terminologie galoisienne : $X = \mathrm{Spec}\, K$, pour un corps K. Alors les revêtements étales de X sont les sommes directes de $\mathrm{Spec}\, L$ où L est une extension algébrique finie de K, et $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

3.4 GAGA

Soit X un schéma lisse sur $\mathbf{C}$. On peut alors lui associer fonctoriellement une variété analytique X^{an} sur $\mathbf{C}$ (un ouvert affine de X est de la forme $\mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[x_1, .., x_n]/I$, et les points d'annulations de I définissent une sous-variété analytique de $\mathbf{C}^n$ par lissité ; le recollement ne pose pas de problème par fonctorialité). Un revêtement algébrique $S \to X$ induit donc par le foncteur précédent un morphisme de variétés analytiques $S^{an} \to X^{an}$, dont on montre assez facilement que c'est un revêtement topologique (alors que l'équivalent p-adique est faux) . Réciproquement, Grauert et Remmert ont démontré que tout revêtement topologique fini de X^{an} provient d'un revêtement algébrique de X, généralisant ainsi le résultat projectif de Serre démontré dans [?] (ce théorème par contre reste vrai en p-adique). On a donc une équivalence de catégorie entre les revêtements algébriques de X et les revêtement topologique de X^{an}, dont on déduit un isomorphisme

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) = \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}}(X^{an})$$

(où $\widehat{G}$ désigne le complété profini de G, c'est-à-dire le complété pour la topologie de G où les sous-groupes d'indice fini forment une base de voisinage de 1). Le groupe fondamental tempéré d'un schéma p-adique est né du besoin d'avoir un équivalent naturel en p-adique du groupe fondamental topologique , dans le sens où il vérifierait l'équation précédente.

3.5 Groupe fondamental et schémas sur O_K

Soit K un corps à valuation discrète de corps résiduel k et soit X un schéma lisse et propre sur O_K.
Alors Grothendieck construit dans [?] un isomorphisme entre $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}})$ et $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{O_{\overline{K}}})$ (tout revêtement de la fibre spéciale se prolonge à tout le schéma, après changement de base sur $O_{\overline{K}}$). De même, sur $O_{\overline{K}}$, tout revêtement galoisien de la fibre générique d'ordre premier à p (la caractéristique de k) se prolonge en un revêtement sur tout le schéma. On en déduit

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{K}})^{(p')} = \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{O_{\overline{K}}})^{(p')} = \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{k}})^{(p')},$$

où $G^{(p')}$ désigne le quotient de G par l'intersection dans G des sous-groupes ouverts d'indice fini premier à p (on parle de clôture pro-(p')).
Ceci permet donc pour un schéma propre X sur K qui a bonne réduction (c'est-à-dire qu'il existe un schéma sur O_K lisse dont la fibre générique est X) de faire le lien entre le groupe fondamental géométrique de X et celui de la réduite à k. Ce lien s'étend pour des schémas non propres en terme d'un groupe fondamental modérément ramifié.
Les courbes ont nécessairement une réduction dite semi-stable (du moins après extension fini de corps) : c'est un schéma dont la fibre générique peut avoir des points doubles. Alors on a encore un lien que l'on peut faire en terme de groupe (voir [?]), qui s'étend au groupe fondamental tempéré (voir [?], le prolongement au groupe fondamental tempéré vient de la compatibilité avec la structure topologique de l'espace de Berkovich).

4 Géométrie analytique p-adique et espaces de Berkovich

4.1 Définition d'un espace de Berkovich

Soit K un corps valué non-archimédien complet, de corps résiduel k.

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre de Banach. On appelle spectre de Berkovich de $\mathcal{A}$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées de $\mathcal{A}$. Il est noté $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et a naturellement une structure topologique compacte pour la topologie la plus faible rendant continues les applications $|\ | \mapsto |f| \quad \forall f \in \mathcal{A}$.*

Soit $K\{r_1^{-1}T_1,...,r_n^{-1}T_n\} = \{\sum_{i_1..i_n \geqslant 0} \lambda_{i_1..i_n} T_1^{i_n}..T_n^{i_n} | \lambda_{i_1..i_n} r_1^{i_1}..r_n^{i_n} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ (ce qu'on appelle une algèbre de Tate généralisée). On appelle alors algèbre affinoïde un quotient d'une algèbre de Tate généralisée, et espace affinoïde associé son espace de Berkovich. Si $\mathcal{B}$ est un quotient d'une algèbre affinoïde $\mathcal{A}$ alors son spectre de Berkovich s'injecte dans celui de $\mathcal{A}$. Un sous-ensemble U de $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ainsi obtenu est appelé sous-domaine de X, et on lui associe l'algèbre $O_X(U) = B$.
A une union finie $U = \bigcup_i U_i$ de sous-domaines, on associe l'algèbre $O_X(U) = \mathrm{Ker}(\prod_i O_X(U_i) \rightrightarrows \prod_{ij} O_X(U_i \cap U_j))$.
A un ouvert U quelconque on associe également l'algèbre $O_X(U) = \varinjlim O_X(V)$ où la limite injective porte sur les unions finies de sous-domaines ouverts $V \subset U$.
X est ainsi muni d'une structure d'espace localement annelé.
Un ouvert d'un espace affinoïde est appelé espace quasiaffinoïde (il est muni de sa structure d'espace localement annelé et de son immersion dans l'espace affinoïde). Un morphisme d'espace quasiaffinoïde $\phi : U \subset X \to V \subset Y$ est un morphisme d'espace annelé qui induit un morphisme borné $O_Y(B) \to O_X(A)$ pour tout sous-domaine A de X inclu dans U et tout sous-domaine B de Y inclu dans V tel que $\phi(A) \subset (Int(B))$ (cette restriction sert à ce que la notion de sous-domaine soit bien définie dans la catégorie des espaces quasiaffinoïdes, comme en géométrie rigide).

Définition 4.2 *Un espace de Berkovich est un espace localement annelé obtenu par recollement d'espaces quasiaffinoïdes le long de sous-espaces quasiaffinoïdes (identifié par un isomorphisme d'espaces quasiaffinoïdes).*

Les espaces de Berkovich forment alors une catégorie, dont la restriction aux espaces affinoïdes est équivalente à la catégorie opposée aux algèbres affinoïdes.

Exemple : Soit $K = \mathbf{C}_p$. Soit D l'espace affinoïde associé à $\mathcal{A} = K\{t\}$. On peut considérer les éléments de $\mathcal{A}$ comme des fonctions analytiques sur le disque unité D_0 de $\mathbf{C}_p$. Alors les points de D correspondent :
soit à des disques $D(a,r)$ avec $a \in D_0$ et $r \leqslant 1$ et alors la semi-norme correspondante sur $\mathcal{A}$ est

$$|f|_{D(a,r)} = \sup_{|x-a| \leqslant r} |f(x)|$$

soit à des familles décroissantes E de disques d'intersection vide et alors $|f|_E = \inf_{d \in E} |f|_d$. Alors $\{D(a,r), r \in [0,1]\}$ muni de la topologie induite est homéomorphe à [0,1]. Ainsi on peut voir que D est localement connexe par arc et contractile (en fait sa structure topologique ressemble fortement à un arbre, c'est ce que Berkovich appelle un quasipolygone).
La structure de $\mathcal{M}(K\{r^{-1}t\})$ est similaire, sauf qu'on se limite aux disques inclus dans $D(0,r)$.

4.2 Espaces de Berkovich et variétés algébriques

On peut associer fonctoriellement à un schéma de type fini X sur K un espace de Berkovich X^{an} (comme en complexe où on peut associer un espace analytique). Pour un schéma affine Spec $K[X_1..X_n]/I$, on lui associe $\bigcup_r \mathcal{M}(K\{r^{-1}X_1..r^{-1}X_n\}/IK\{r^{-1}X_1..r^{-1}X_n\}$
Dans le cas général, on procède par recollement.

Exemple : ainsi on a $\mathbf{A}^n = \bigcup_r \mathcal{M}(K\{r^{-1}T_1..r^{-1}T_n\})$.
$\mathbf{P}^1$ se définit comme recollement de deux $\mathbf{A}^1$, mais peut aussi se voir comme $\mathbf{A}^1$ auquel on a rajouté un point à l'infini. on voit alors facilement que $\mathbf{P}^1$ est contractile, et la structure de quasipolygone de $\mathbf{P}^1$ est très proche de la structure de l'arbre de $GL(2)$.
$(\mathbf{P}^1 - \{z_1,..,z_n\})^{an}$ est également contractile (on ne fait qu'enlever des points "terminaux" à $\mathbf{P}^1$), alors que $\pi_1^{alg}(\mathbf{P}^1 - \{z_1,..,z_n\})$ est non trivial pour $n \geqslant 2$: les revêtements algébriques ne définissent donc pas nécessairement des revêtements topologiques de l'espace de Berkovich associé.

On a pour les espaces de Berkovich des notions de morphismes propres, finis, plats, lisses, étales... définis comme en géométrie algébrique. Alors un morphisme algébrique $X \to Y$ est propre (*resp.* plat, fini, lisse, étale) si et seulement si $X^{an} \to Y^{an}$ l'est. Ceci permet notamment de définir la notion de revêtement $f : S' \to S$ algébrique (morphisme étale et fini) ou étale (S est recouvert par des ouverts U tels que $f^{-1}(U) = \coprod_i V_i$,avec $V_i \to U$ étale et fini) d'un espace de Berkovich.
Alors, comme dans le cas complexe (voir **??**),

Théorème 4.3 *Les revêtements algébriques d'un K-schéma sont en bijection avec les revêtements algébriques de l'espace de Berkovich associé.*

4.2.1 Espace de Berkovich et réduction

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre affinoïde on peut définir un morphisme d'espace topologique de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vers $\mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{A}})$, où $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$, $\mathcal{A}^\circ = \{x \in \mathcal{A} | |x|_{sup} \leqslant 1\}$ et $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \{x \in \mathcal{A} | |x|_{sup} < 1\}$. Ceci s'appelle la réduction de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
Pour certains recouvrements par des ouverts affinoïdes dits formels d'un espace de Berkovich (l'image réciproque par tout morphisme affinoïde du recouvrement admet un raffinement affinoïde fini et, si U_i, U_j sont deux ouverts du recouvrements, l'application $\widetilde{U_i \cap U_j} \to \widetilde{U_j}$ est une immersion ouverte), alors on peut recoller les réductions des différents espaces affinoïdes de manière à avoir une application de réduction global vers un k-schéma. Mais le schéma réduit dépend du recouvrement (comme pour la réduction d'un K-schéma).

4.2.2 Structure de l'espace de Berkovich d'une courbe à réduction semi-stable

On s'intéresse maintenant à une courbe X admettant une réduction semi-stable (c'est par exemple le cas pour une courbe lisse sur $\mathbf{C}_p$ qui provient d'une courbe sur une extension fini de $\mathbf{Q}_p$). Alors X se rétracte sur une partie canonique homéomorphe au graphe de la réduction semi-stable (voir [**?**, §4.3]). Les revêtements topologiques de X s'interprètent ainsi comme revêtements du graphe de la réduction semi-stable, qui eux-même proviennent de certains revêtements étales de la réduction semi-stable. Ce résultat, accompagné de ceux de [**?**] déjà cités dans la section (**??**), permettent d'obtenir une description du groupe fondamental tempéré d'une courbe en fonction du graphe de groupe d'une réduction semi-stable.

5 Groupe fondamental tempéré

5.1 Revêtements tempérés

5.1.1 Problème p-adique : revêtements de Kummer

Comme on l'a vu en **??**, les revêtements algébriques en p-adiques ne sont pas tous des revêtements topologiques. On va s'intéresser ici plus précisément au cas du disque épointé $D - \{0\}$. L'application $z \mapsto z^n$ de $D - \{0\}$ dans lui-même est un revêtement étale, mais on voit facilement que ce n'est pas un revêtement topologique (de toute façon, $D - \{0\}$ est simplement connexe) : les préimages des points de $D - \{0\}$ qui correspondent à des disques contenant 0 est réduit à un seul élément (mais l'extension de corps résiduel est n) alors que les autres fibres ont n éléments. De même, l'application $z \mapsto z^n$ de $\mathbf{A}^1 - \{0\}$ dans lui-même est un revêtement étale, mais n'est pas un revêtement topologique. Ainsi le groupe fondamental topologique est beaucoup trop petit par rapport au groupe fondamental algébrique pour fournir un équivalent convenable du cas complexe.

A l'inverse,il y a beaucoup trop de revêtements étales (pas nécessairement finis) : par exemple log : $D(1, 1^-) = \{x \in \mathbf{C}_p / |x - 1| < 1\} \to \mathbf{A}^1$ est un revêtement étale de $\mathbf{A}^1$, alors que $\pi_1^{alg}(\mathbf{A}^1 = \{0\})$.

5.1.2 Définition des revêtements tempérés

Définition 5.1 *Un revêtement étale $S' \to S$ est dit tempéré si c'est un quotient du composé d'un revêtement topologique $T' \to T$ et d'un revêtement algébrique $T \to S$.*

On note alors Cov_S^{temp} la catégorie des revêtements tempérés de S. C'est une sous-catégorie de la catégorie des revêtements étales Cov_S^{et}.

5.2 Groupe fondamental tempéré

Soit $\overline{s}$ un point géométrique de S. Alors on a un foncteur $F_{\overline{s}} : Cov_S^{temp} \to Sets$, qui a un revêtement S' associe les relèvements de $\overline{s}$ à S'. Alors les foncteurs pour deux point géométriques sont isomorphes pour S connexe (en fait c'est vrai pour le foncteur sur Cov_S^{et} entier, cela se déduit du résultat pour les revêtements algébriques de Grothendieck et de la connexité par arc de S).

Définition 5.2 *On appelle groupe fondamental tempéré de S le groupe $\pi_1^{temp}(S, \overline{s}) =$ $\mathrm{Aut}(F_{\overline{s}})$. Il est muni de la topologie où les $Stab(S', \overline{s}')$ forment une base de voisinages de 1 quand S' décrit les revêtements tempérés de S et $\overline{s}'$ décrit $F_{\overline{s}}(S')$, ce qui en fait un espace pro-discret.*

$\pi_1^{temp}(S, \overline{s})$ est indépendant de $\overline{s}$ à isomorphisme près quand S est connexe (grâce à cela, on omettra parfois de le signaler). En enrichissant $F_{\overline{s}}(S')$ de son action de $\pi_1^{temp}(S, \overline{s})$, on obtient un foncteur $Cov_S^{temp} \to \pi_1^{temp}(S, \overline{s}) - Sets$, qui est en fait une équivalence de catégorie.

Comme les revêtements tempérés S' tels que $F_{\overline{s}}(S')$ est fini correspond exactement aux revêtement algébrique d'après **??**, on a un isomorphisme

$$\pi_1^{alg}(S, \overline{s}) = \widehat{\pi_1^{temp}(S}, \overline{s}).$$

Plus précisément si S' est un revêtement algébrique de S, alors le revêtement universel (topologique de S') est un revêtement tempéré galoisien. Ainsi tout revêtement tempéré est dominé par un revêtement tempéré galoisien, ce qui fait de $\pi_1^{temp}(S,\overline{s})$ un groupe topologique pro-discret.

Supposons maintenant $K = \mathbf{C}_p$ et S lisse. $\pi_1^{alg}(S,\overline{s})$ est de type fini, donc on peut prendre une tour exhaustive dénombrable de revêtement algébrique galoisien en prenant S_n correspondant à l'intersection Γ_n des sous-groupes distingués d'indice divisant n de $\pi_1^{alg}(S,\overline{s})$. Alors, en prenant leur revêtement universel $\widetilde{S_n}$, on obtient une tour exhaustive dénombrable de revêtements tempérés galoisiens de sous-groupes associés Δ_n : $\pi_1^{temp}(S,\overline{s})$ est ainsi une limite inverse dénombrable de groupes discrets dénombrables, qui sont de plus finiment engendrés.

Pour une courbe S, un revêtement algébrique S' est aussi une courbe, et la structure de quasipolygone implique que, comme pour les graphes (en fait sur $\mathbf{C}_p$, toute courbe lisse a réduction semi-stable, donc est homotopiquement équivalente à un graphe), $\pi_1^{top}(S')$ est libre donc résiduellement fini. On en déduit que $\pi_1^{temp}(S)$ est limite inverse de groupes résiduellement finis, donc $\pi_1^{temp}(S)$ est résiduellement fini. En particulier il s'injecte dans son complété profini $\pi_1^{alg}(S)$.

Exemple : Soit E_j une courbe elliptique sur $\mathbf{C}_p$.
$(S_n = E_j \xrightarrow{\times n} E_j)_n$ forment une suite exhaustive de revêtements algébriques galoisiens de E_j, de groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

- Si $|j| \leqslant 1$, S_n a bonne réduction, donc est simplement connexe. Ainsi

$$\pi_1^{temp}(E_j,0) = \pi_1^{alg}(E_j,0) \cong \widehat{\mathbf{Z}} \times \widehat{\mathbf{Z}}.$$

- Si $|j| > 1$, E_j est une courbe elliptique de Tate $\mathbf{G}_m/Q^{\mathbf{Z}}$, où $\mathbf{G}_m$ est le groupe multiplicatif $\mathbf{A}^1 - \{0\}$. Le revêtement tempéré $\mathbf{G}_m \longrightarrow E_j$ fournit une suite exacte

$$1 \to \pi_1^{temp}(\mathbf{G}_m,1) \to \pi_1^{temp}(E_j,1) \to \mathbf{Z} \to 1$$

avec $\pi_1^{temp}(\mathbf{G}_m,1) \cong \widehat{\mathbf{Z}}$ (parce que $\mathbf{G}_m \xrightarrow{\times n} \mathbf{G}_m$ forment une suite exhaustive de revêtement algébrique et que $\mathbf{G}_m$ est simplement connexe parce qu'à bonne réduction). Comme $\pi_1^{temp}(E_j,1) \subset \pi_1^{alg}(E_j,1)$ est abélien, on en déduit que $\pi_1^{temp}(E_j,1) \cong \widehat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}$.

Références

[1] Y. André, *Period Mappings and Differential Equations : From* $\mathbf{C}$ *to* $\mathbf{C}_p$, MSJ Mem. **12**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2003.

[2] Y. André, On a Geometric Description of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a p-adic Avatar of $\widehat{GT}$, *Duke Math. J.* **119**, 2003.

[3] G. V. Belyi, Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43**, no. 2 (1979), 267-276.

[4] V. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedian Fields*, Math. Surveys Monogr. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, 1990. MR 91k :32038

[5] V. Berkovich, Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible, *Invent. Math.* **137** (1999), 1-84.

[6] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1956), 1-42.

[7] A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1960-1961(SGA1)*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, 1971. MR 50 :7129

[8] A. Grothendieck, "esquisse d'un programme" in *Geometric Galois Action, I*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press, 1997, 5-48. MR 99c :14034

[9] S. Mochizuki, Semi-Graphs of Anabelioids, RIMS preprint **1477**, 2004.

[10] M. Saïdi, Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes, *Compositio Math.* **107**, 1997.