

L'équation de Loewner et la conjecture de Bieberbach

Leurent Sébastien
Pocchiola Samuel

30 juin 2006

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	La classe S	2
1.2	La conjecture de Bieberbach	2
1.3	Notations et définitions	2
1.4	Quelques résultats d'analyse complexe	3
2	Résultats élémentaires	4
2.1	Théorème de l'aire	4
2.2	Le second coefficient	5
2.3	Corollaires	6
3	La théorie de Loewner	8
3.1	Densité des "déchirures"	8
3.2	L'équation de Loewner	11
3.3	Le troisième coefficient	16
4	Compléments	17
4.1	Coefficients supérieurs et preuve de De Branges	17
4.2	Modèle SLE	17
5	Remerciements	18

1 Introduction

1.1 La classe S

On se propose d'étudier la classe S des fonctions analytiques et injectives sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ normalisées par les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Notons que ce sont des \mathcal{C}^∞ -difféomorphismes de \mathbb{D} dans un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et qu'elles admettent un développement en série entière sur \mathbb{D} de la forme :

$$f(z) = z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

L'exemple fondamental de fonction dans S est la fonction de Koebe définie par

$$k(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Elle réalise une bijection de \mathbb{D} dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -\frac{1}{4}]$ comme on peut le voir en écrivant $k(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$ et en observant que $z \rightarrow \frac{1+z}{1-z}$ est une bijection de \mathbb{D} dans le demi-plan $\text{Re}(z) > 0$. Notons que l'on définit toujours un élément dans S , appelé rotation de la fonction de Koebe, si pose : $k_\theta(z) = e^{i\theta} k(e^{-i\theta} z)$ où θ est un réel.

1.2 La conjecture de Bieberbach

Conjecture 1.1 (Bieberbach [3]).

$$\forall f \in S, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq n$$

où seules la fonction de Koebe et ses rotations réalisent toutes les égalités.

Bieberbach a énoncé cette conjecture en 1916 après l'avoir démontrée dans le cas $n = 2$. Loewner a prouvé $|a_3| \leq 3$ en 1923. Pour cela, il a montré que les fonctions f d'un certain sous-ensemble dense de S peuvent être "approchées" par des fonctions $f(\cdot, t)$ qui vérifient une équation différentielle en t , dite équation de Loewner [1]. La preuve complète de la conjecture n'a été trouvée qu'en 1984 par Louis De Branges. Elle repose en partie sur l'équation de Loewner. Nous allons nous intéresser ici à l'équation de Loewner et aux preuves des cas $|a_2| \leq 2$ et $|a_3| \leq 3$.

1.3 Notations et définitions

Dans la suite, D et D_n désigneront toujours des domaines, c'est à dire des ouverts connexes de \mathbb{C} .

De plus, J désignera un arc de Jordan, c'est à dire un arc simple (image de $[0, 1]$ par une injection continue). On appellera domaine de Jordan un domaine borné délimité par une courbe fermée de Jordan (c'est-à-dire l'image de \mathbb{S}_1 par

une injection continue). On utilisera le théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe de Jordan sépare le plan en deux composantes connexes, dont une seule bornée.

Si U est un ouvert de \mathbb{C} , on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On pose $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$.

Une famille de fonctions relativement compacte (considérée comme un ensemble) pour la convergence uniforme sur les compacts sera dite *normale*.

1.4 Quelques résultats d'analyse complexe

Nous rappelons ici des théorèmes classiques qui seront très utiles pour la suite.

Théorème 1.2 (Théorème de Rouché). *Si f et g sont analytiques sur un domaine de Jordan (délimité par une courbe régulière γ), et si $\forall z \in \gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$, alors $f + g$ a le même nombre de zéros que f (comptés avec multiplicité).*

Théorème 1.3 (Théorème de Montel). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Pour tout $r > 0$, $\{f \in H(U) : \forall z \in U, |f(z)| \leq r\}$ est un compact de $H(U)$.*

Soit F une famille de fonctions analytiques sur un domaine D . On dit que F est localement bornée si les fonctions de F sont uniformément bornées sur les compacts de D . On déduit aisément du théorème de Montel, en utilisant des extractions successives et le procédé diagonal de Cantor que toute famille localement bornée sur un domaine D est normale.

Théorème 1.4 (Théorème de Vitali). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions analytiques localement bornées sur un domaine D , qui converge simplement sur un ensemble possédant un point d'accumulation dans D . Alors f_n converge uniformément sur les compacts de D .*

Démonstration. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant localement bornée, on peut en extraire une sous-suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction analytique g . Si f_n ne converge pas uniformément sur les compacts vers g , alors il existe un $\epsilon > 0$, un compact $K \subset D$, une sous-suite f_{n_k} et une suite z_k de points de K telle que pour tout k

$$|f_{n_k}(z_k) - g(z_k)| \geq \epsilon$$

Extrayons alors une sous-suite de f_{n_k} qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction analytique h . On a $h = g$ puisque ces deux fonctions analytiques coïncident sur un ensemble possédant un point d'accumulation dans D . Cette contradiction termine la preuve. □

Théorème 1.5 (Théorème du prolongement analytique). *Soient U et V deux domaines tels que $\partial U \cap \partial V$ soit un arc de Jordan J . On suppose que f est*

une fonction analytique sur U , continue sur $U \cup J$ et que g est une fonction analytique sur V , continue sur $V \cup J$. On suppose de plus que $f(z) = g(z)$ lorsque $z \in J$. Alors la fonction F égale à f sur $U \cup J$ et à g sur $V \cup J$ est analytique sur $U \cup J \cup V$.

Théorème 1.6 (de représentation conforme de Riemann). *Soient U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} distinct de \mathbb{C} et ζ un point de U . Il existe une unique bijection conforme du disque unité \mathbb{D} dans U qui vérifie $f(0) = \zeta$ et $f'(0) > 0$.*

Ce théorème permet de raisonner de manière équivalente en termes d'ouverts simplement connexes ou de bijections conformes de \mathbb{D} dans ces ouverts.

Le théorème suivant, dû à Carathéodory, précise sous quelles conditions une bijection conforme entre deux domaines peut être étendue en un homéomorphisme entre leurs adhérences.

Théorème 1.7 (Carathéodory [2]). *Soit U un domaine de Jordan de frontière C et soit f une bijection conforme de \mathbb{D} dans U . Alors f se prolonge en un homéomorphisme du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{U} = U \cup C$.*

2 Résultats élémentaires

2.1 Théorème de l'aire

On considère ici la classe Σ des fonctions injectives

$$g(z) = z + b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots, \quad z \in \mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$$

On considère aussi sa sous-classe $\Sigma' : \Sigma' = \{g \in \Sigma; \forall z \in \mathbb{D}^*, g(z) \neq 0\}$.

Notons tout d'abord que

$$\Sigma' = \{z \mapsto f(1/z)^{-1}; f \in S\}$$

Démonstration. Soit $\phi : h \mapsto (z \mapsto h(1/z)^{-1})$.

(\subset) : si $g \in \Sigma'$, $\phi(g)$ est défini sur \mathbb{D} comme une fonction analytique, injective équivalente à l'identité en 0, où elle se prolonge donc analytiquement. Donc $\phi(\Sigma') \subset S$ donc $\Sigma' \subset \phi(S)$.

(\supset) : Si $g = \phi(f)$, avec $f \in S$, montrons que g coïncide avec la série définie à partir du développement de $\frac{1}{1+x}$ en 0, et que cette dernière converge sur \mathbb{D}^* :

Formellement,

$$\begin{aligned} f(1/z)^{-1} &= z \cdot (1 + a_2 \cdot z^{-1} + \dots)^{-1} = z \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} z^{-p} \cdot a_{p+1} \right)^m \right) \\ &= z + b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

où

$$b_{p-1} = \sum_{\substack{0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p \\ \sum n_k = p}} (-1)^{\#\{n_k \neq 0\}} \prod a_{n_k+1}$$

Pour $0 < r < 1$, $a_{n+1} \leq M/r^{n+1}$, et $|b_{n-1}| \leq n^2 \cdot M^n/r^{n+1}$, et cette série converge sur \mathbb{D}^* . De plus elle vaut g au voisinage de ∞ où ce développement a un sens. Donc elle vaut g sur \mathbb{D}^* , d'où $g \in \Sigma'$. □

Théorème 2.1 (Théorème de l'aire). *Si $g \in \Sigma$, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

Démonstration. Notons tout d'abord qu'un élément de Σ' est une bijection conforme de \mathbb{D}^* dans l'inverse¹ d'un ouvert contenant 0, qui est donc le complémentaire d'un compact $E \ni 0$.

De plus tout élément de Σ est le translaté d'un élément de Σ' : en effet, il n'existe pas de bijection conforme de \mathbb{C} dans un domaine qu'il contient strictement, si bien que pour $g \in \Sigma$, il existe $w \in \mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D}^*)$ et alors $g - w \in \Sigma'$.

En conséquence, tout élément de Σ est une bijection conforme de \mathbb{D}^* dans le complémentaire d'un compact E .

Étant donné $r > 1$, soit C_r l'image par g du cercle $\{|z| = r\}$. Cette courbe fermée simple entoure un domaine $E_r \supset E$. D'après le théorème de Green-Riemann, l'aire de E_r est

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{2i} \int_{C_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(r \cdot e^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{n \cdot i\theta} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot b_n r^{-n-1} e^{-(n+1)i\theta} \right) i \cdot r e^{i\theta} d\theta \\ &= \pi \cdot r \left(r - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \bar{b}_n b_n \cdot r^{-2n-1} \right) = \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2$ converge. l'aire de $E \subset \bigcap_r E_r$ est donc

$$A = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \right) \geq 0$$

□

2.2 Le second coefficient

Théorème 2.2 (Théorème de Bieberbach). *Soit $f \in S$. Alors $|a_2| \leq 2$.*

Démonstration. De même que lorsqu'on a montré que $\Sigma' = \phi(S)$, on définit $\sqrt{f(z^2)}$ à partir du développement de $\sqrt{1+z}$ au voisinage de 0 :

On considère la série entière $z \cdot (1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)^{1/2} = z + a'_3 \cdot z^3 + a'_5 \cdot z^5 + \dots$, dont on remarque qu'elle converge sur \mathbb{D} . Au voisinage de 0 son

¹en définissant l'«inverse» d'un ensemble par $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$

carré est $f(z^2)$, donc c'est le cas sur \mathbb{D} tout entier. On note donc cette fonction $\sqrt{f(z^2)}$.

Elle est injective, du fait de son imparité et de l'injectivité de f . Donc $\sqrt{f(z^2)} \in S$.

Le théorème de l'aire appliqué à $\phi\left(\sqrt{f(z^2)}\right) = z + b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots$ donne $|b_1| \leq 1$.

Or $b_1 = a_2^2 - a^3 = -a_2/2$, donc $|a_2| \leq 2$.

□

Cas d'égalité

Si $|b_1| = 1$, alors $\forall n \geq 2, b_n = 0$. De plus par imparité, $b_0 = 0$. Donc dans le cas d'égalité, $\phi\left(\sqrt{f(z^2)}\right) = z - e^{i\theta}/z$, d'où $f(z^2) = (z^{-1} - e^{i\theta}z)^{-2} = k_\theta(z^2)$.

Donc $f(z) = k_\theta(z) = e^{-i\theta} \cdot k(e^{i\theta}z)$ est la fonction de Koebe à une rotation près.

2.3 Corollaires

Le théorème de Bieberbach a des conséquences importantes sur le comportement géométrique des fonctions de la classe S , qui peuvent se voir comme des déformations du disque unité conservant les angles et équivalentes à l'identité en zéro. Les résultats qui suivent peuvent se voir comme des contraintes sur les déformations possibles du disque unité sans le déchirer ni le faire se recouvrir.

Théorème 2.3 (Théorème de Koebe).

$$\forall f \in S, f(\mathbb{D}) \supset \{w; |w| < 1/4\}$$

Démonstration. Soit $f \in S$ et soit $\omega \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas à l'image de f . Alors

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right)z^2 + \dots$$

est un élément de S . Le théorème de Bieberbach donne $|a_2 + \frac{1}{\omega}| \leq 2$. En utilisant $|a_2| \leq 2$, on obtient $|\omega| \geq \frac{1}{4}$ ce qui est le résultat souhaité.

□

Nous allons maintenant montrer deux théorèmes qui explicitent des conséquences forte de l'injectivité d'une application conforme. Le théorème de distortion fournit un encadrement de $|f'(z)|$. Géométriquement, $|f'(z)|$ est le facteur par lequel est multipliée la longueur d'un arc infinitésimal lorsque l'on prend son image par f et $|f'(z)|^2$ est le facteur par lequel est multiplié un élément d'aire. Le théorème des accroissements, qui en est une conséquence, fournit un encadrement de $|f(z)|$.

Théorème 2.4 (Théorème de distortion). *Si $f \in S$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}$:*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

Démonstration. Soit $\zeta \in \mathbb{D}$. En normalisant la composée de f avec un automorphisme de \mathbb{D} qui envoie 0 sur ζ on obtient une fonction g de S qui s'écrit :

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = z + \alpha(\zeta)z^2 + \dots$$

avec $2\alpha(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta}$. Le théorème de Bieberbach appliqué à g donne alors

$$\left| \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

où l'on a posé $\zeta = re^{i\theta}$. Comme l'inégalité $|\alpha| \leq c$ implique $-c \leq \operatorname{Re}(\alpha) \leq c$, on a

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

Or on remarque que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) = r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re}(\log f'(re^{i\theta}))$$

d'où l'inégalité

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re}(\log f'(re^{i\theta})) \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

Enfin, en fixant θ et en intégrant pour r variant de 0 à R on trouve

$$\log \frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \log |f'(Re^{i\theta})| \leq \log \frac{1+R}{(1-R)^3}$$

ce qui donne le théorème de distortion en passant à l'exponentielle. □

Théorème 2.5 (Théorème des accroissements). *Soit $f \in S$. Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a :*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Démonstration. Soit $f \in S$ et $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. On a

$$|f(z)| = \left| \int_0^r f'(s) ds \right| \leq \int_0^r \frac{1+s}{(1-s)^3} ds = \frac{r}{(1-r)^2}$$

ce qui donne la borne supérieure.

Si $f(z) \geq \frac{1}{4}$ alors l'inégalité $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)|$ est trivialement vérifiée puisque $\frac{1}{4} \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$ lorsque z parcourt \mathbb{D} . Si $f(z) < \frac{1}{4}$ alors par le théorème de Koebe (2.3), le segment $[0, f(z)]$ est contenu dans l'image de f . Si C désigne sa pré-image par f , C est un arc de Jordan joignant 0 et z et en posant s l'abscisse curviligne sur C , on a

$$f(z) = \int_C f'(\zeta) d\zeta = \int_C f'(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} ds$$

Comme l'argument de $f'(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} = \frac{d(f(\zeta))}{ds}$ est constant,

$$|f(z)| = \int_C |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^r \frac{1-s}{(1+s)^3} ds = \frac{s}{(1+s)^2}$$

□

Remarque 1. *Le théorème des accroissements montre que la classe S est localement bornée. Donc S est un compact de $H(D)$. Les applications $f \mapsto |a_n|$ étant continues, on en déduit que pour tout n , $|a_n|$ est borné lorsque f parcourt S . La conjecture de Bieberbach dit que cette borne est n et qu'elle est atteinte pour les rotations de la fonction de Koebe uniquement.*

3 La théorie de Loewner

Cette section utilise essentiellement la densité de certaines classes de fonctions, sur lesquelles il est plus facile de prouver la conjecture de Bieberbach.

En considérant, pour $0 < r < 1$, $f_r(z) = f(z \cdot r)/r$, on a déjà le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Dans S , les fonctions d'image un domaine de Jordan sont denses.*

On cherche à montrer que celles dont l'image est le complémentaire d'un chemin (dont une "extrémité" est "en ∞ ") sont denses. On appellera "déchirures" de telles fonctions.

3.1 Densité des "déchirures"

Étant donné le domaine de Jordan $D = f(\mathbb{D})$, on considère les déchirures associées à une courbe "partant de ∞ " et se refermant en entourant D (comme dans la figure 1).

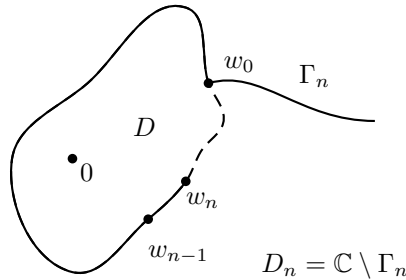


FIG. 1 – approximation par des «déchirures»

La convergence de Carathéodory

Pour un certain type de convergence, on va montrer que le complémentaire D_n de la courbe Γ_n tend vers D , et que cela implique la convergence des déchirures associées vers f , donc le résultat de densité voulu.

Cette convergence ensembliste est la convergence de Carathéodory, définie comme suit :

Définition 3.2. *Étant donné (D_n) une suite de domaines simplement connexes telle que $0 \in D_n \subsetneq \mathbb{C}$, le noyau de (D_n) est*

- *Le plus grand domaine contenant l'origine, dont tous les compacts sont dans chaque D_n à partir d'un certain rang.*
- *S'il n'existe pas de tel domaine (c'est à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, 0 est point frontière de $\bigcap_{n \geq N} D_n$), on pose que le noyau de D_n est 0 .*

On dit que la suite D_n converge vers D si D est le noyau de chaque sous suite de D_n .

Théorème 3.3 (Théorème de convergence de Carathéodory). *Si D_n est une suite de domaine simplement connexes telle que $0 \in D_n \subsetneq \mathbb{C}$, de noyau D , et $f_n : \mathbb{D} \rightarrow D_n$ analytique bijective avec $f_n(0) = 0$ et $f'_n(0) \in \mathbb{R}_+^*$,*

Alors $f_n \rightarrow f$ (au sens de la convergence uniforme sur tout compact) équivaut à $D_n \rightarrow D \neq \mathbb{C}$ (au sens de Carathéodory), et f est, dans le cas de convergence, l'application conforme injective (ou constante) définie sur \mathbb{D} d'image D telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons $f_n \rightarrow f$. f est donc injective ou constante.

1^{er} cas : Si $f \equiv f(0) = 0$, montrons d'abord que $D = \{0\}$. Sinon on pourrait définir les $\phi_n = f_n^{-1}$ sur $B(0, \rho) \subset \bigcap_n D_n$, or $|\phi_n(z)| \leq 1$ donc $|\phi'_n(0)| \leq 1/\rho$ et $|f'(0)| \geq \rho > 0$, ce qui contredit $f_n \rightarrow 0$.

Cela montre aussi que toute sous-suite de D_n a pour noyau 0 , et $D_n \rightarrow 0$.

2^{ème} cas : Si f est injective, soit $\Delta = f(\mathbb{D})$.

Montrons que $\Delta \subset D$: Soit E un compact de Δ , Γ un lacet régulier de $\Delta \setminus E$ l'entourant, $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$, et $\delta = d(E, \Gamma)$, comme en en figure 2.

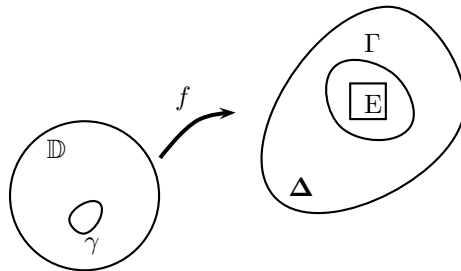


FIG. 2 –

Soit $N : \forall n \geq N, \forall z \in \gamma, |f_n(z) - f(z)| < \delta$. Alors, pour $w_0 \in E$ et $n \geq N$, on a sur γ , $|f(z) - w_0| \geq \delta$ et $|f_n(z) - f_n| < \delta$, donc par le théorème de Rouché,

$f_n(z) - w_0$ s'annule autant de fois que $f(z) - w_0$ à l'intérieur de γ (une fois). Donc $w_0 \in D_n, \forall n \geq N$. De plus Δ est un domaine contenant 0, donc $\Delta \subset D$.

Pour $D \subset \Delta$, montrons que f^{-1} se prolonge à D en une fonction injective, à image dans \mathbb{D} .

$\phi_n = f_n^{-1}$ est définie sur tout compact E de D (à partir d'un certain rang), bornée (par 1), et équicontinue. Elle contient donc une sous-suite uniformément continue sur E . Avec une suite croissante de compacts, par extraction diagonale, il existe une sous-suite ϕ_{n_k} convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction ϕ .

Montrons que $\phi|_{\Delta} = f^{-1}$: Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ et $w_0 = f(z_0)$. Soit $\epsilon > 0$: $C_\epsilon = \{z - z_0\} = \epsilon \subset \mathbb{D}$, $\Gamma_\epsilon = f(C_\epsilon)$ et $\delta = d(w_0, \Gamma_\epsilon)$. Comme précédemment, le théorème de Rouché donne l'existence (à partir d'un certain rang) de z_k : $f_{n_k}(z_k) = w_0$ à l'intérieur de C_ϵ . Donc $|\phi(w_0) - z_0| \leq |\phi(w_0) - \phi_{n_k}(w_0)| + |z_k - z_0| < 2\epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, $\phi|_{\Delta} = f^{-1}$.

Ainsi f^{-1} se prolonge sur D en une fonction à image dans \mathbb{D} . Cela impose $D = \Delta$.

On a donc montré que le noyau de D_n est $f(\Delta)$. Or le raisonnement s'applique à toute sous suite de D_n , permettant de conclure que $D_n \rightarrow D$, au sens de Carathéodory.

(\Leftarrow) Supposons $D_n \rightarrow D \neq \mathbb{C}$

1^{er} cas : si $D = \{0\}$, montrons que $f_n \rightarrow 0$:

Si $f'_n(0) \not\rightarrow 0$, il existe $\psi : f'_{\psi(n)}(0) \geq \epsilon > 0$, alors d'après le théorème de Koebe (2.3), le noyau de $D_{\psi(n)}$ est non nul.

Enfin, le théorème des accroissements (2.5) donne $|f_n(z)| \leq |f'_n(0)| \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$. Or $f'_n(0) \rightarrow 0$, donc $f_n \rightarrow 0$.

2^{ème} cas : si $D \neq \{0\}$. D'après le théorème de Koebe (2.3), $\{f'_n(0)\}$ est bornée (sans quoi une sous suite de D_n aurait pour noyau \mathbb{C}). Donc par le théorème des accroissements (2.5), $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur les compacts, et d'après le théorème de Vitali (1.4) il suffit de montrer que $\forall z, f_n(z) \rightarrow f(z)$. Si pour un certain z_0 , $(f_n(z_0))$ avait plusieurs valeurs d'adhérences on pourrait extraire des sous-suite convergent uniformément vers des fonctions différentes ($f_{\phi(n)} \rightarrow f$ et $f_{\psi(n)} \rightarrow g$ ou $f(z_0) \neq g(z_0)$). On a montré que cela implique que les noyaux de $D_{\phi(n)}$ et $D_{\psi(n)}$ sont distincts, c'est absurde.

On a donc bien $f_n \rightarrow f$. □

Du théorème de convergence de Carathéodory, on conclut :

Théorème 3.4. *Les déchirures sont denses dans S .*

Démonstration. Soit $f \in S$ d'image un domaine de Jordan D . Montrons, en s'inspirant de la figure 1, qu'elle est limite de déchirures.

On considère un arc Γ_0 allant de l'infini à $w_0 \in \partial D$ et une suite de points $w_i \in \partial D$ telle que $w_n \notin \Gamma_{n-1}$, où Γ_n est la courbe prolongeant Γ_0 en entourant D jusqu'à w_n .

On appelle D_n le complémentaire de Γ_n , et g_n la bijection conforme de \mathbb{D} dans D_n avec $g_n(0) = 0$ et $g'_n(0) \in \mathbb{R}_+$.

Alors en imposant de plus que $w_n \rightarrow w_0$, on a la convergence de D_n vers D au sens de Carathéodory, donc $g_n \rightarrow g$ uniformément sur les compacts et $g'_n(0) \rightarrow 1$.

Les $g_n/g'_n(0)$ sont alors des déchirures de S convergeant uniformément vers f sur les compacts. \square

Comportement de petites déchirures

On a considéré pour l'instant de grandes déchirures du plan complexe tout entier, ressemblant par exemple à la fonction de Koebe.

Il existe aussi d'autres types de déchirures, tels la fonction $\sqrt{z^2 + 1}$, qui envoie le demi-plan $\mathbb{H} = \{z; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ sur $\mathbb{H} \setminus [0, 1]$ (en considérant la détermination de la racine qui a une partie réelle positive). Elle se visualise bien comme composée de fonctions.

On notera qu'on peut prolonger cette fonction sur la frontière, mais on perd alors l'injectivité.

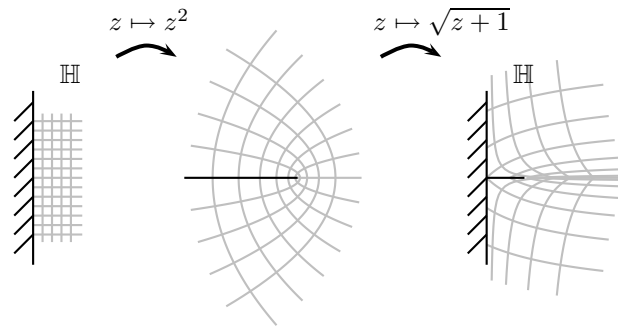


FIG. 3 – Déchirure du demi plan

De même on sera amené à considérer de petites déchirures de \mathbb{D} , au voisinage d'un point de $\partial\mathbb{D}$, qui jouera le rôle que joue l'origine pour $\sqrt{z^2 + 1}$.

Le comportement de $\sqrt{z^2 + 1}$ nous donne alors une idée du comportement que peut avoir une telle déchirure.

3.2 L'équation de Loewner

Paramétrage standard d'une déchirure

Soit $f \in S$ dont l'image est le complémentaire d'un arc Γ partant à l'infini et soit $\psi(t)$, $0 \leq t < T$ une paramétrisation de Γ . On note Γ_t l'arc allant de $\psi(t)$ à l'infini et D_t son complémentaire. Soit alors $g_t(z) = \beta(t)(z + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t)z^i)$ une représentation conforme de \mathbb{D} dans D_t , avec $g_t(0) = 0$ et $g'_t(0) = \beta(t) > 0$ (comme en figure 4).

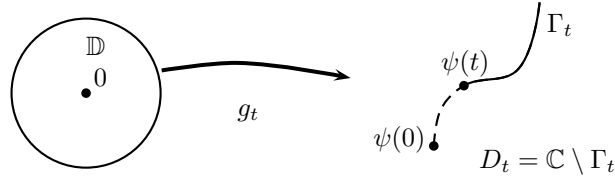


FIG. 4 – Paramétrisation d’une déchirure

Les b_i sont des fonctions continues de t car si t_n est une suite croissante tendant vers t , g_{t_n} converge vers g_t uniformément sur les compacts de \mathbb{D} par le théorème de Carathéodory donc les b_i sont continues à gauche d’après la formule de Cauchy. La continuité à droite est analogue. De plus $t \mapsto \beta(t)$ est strictement croissante d’après le principe de subordination :

Lemme 3.5 (Principe de subordination). *Si f et g sont analytiques sur \mathbb{D} avec f injective, $f(0) = g(0)$ et $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$ alors $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ et $g(\mathbb{D}_r) \subset f(\mathbb{D}_r)$ pour tout $r < 1$ où \mathbb{D}_r désigne le disque $|z| < r$.*

Quitte à composer ψ à droite par $t \mapsto \beta^{-1}(e^t)$, on peut donc supposer que $\beta(t) = e^t$. Une application du principe du maximum montre que dans ce cas $T = \infty$. En résumé on peut choisir ψ de telle sorte que

$$g_t(z) = e^t \left(z + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t) z^i \right) , \quad 0 \leq t < \infty$$

Ce choix de ψ s’appelle la paramétrisation standard de Γ . Considérons à présent la fonction

$$f(z, t) = g_t^{-1}(f(z)) = e^{-t} \left(z + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t) z^i \right) , \quad 0 \leq t < \infty$$

Remarquons que $f(z, 0) = z$ et les a_i sont continues car ce sont des polynômes en les b_i . Nous sommes maintenant en mesure d’énoncer le théorème de Loewner :

L’équation de Loewner

Théorème 3.6. *Soit $f \in S$ une déchirure associée à un arc Γ et soit $\psi(t)$, $0 \leq t < \infty$, la paramétrisation standard de Γ . Alors la fonction $f(z, t)$ définie comme précédemment vérifie l’équation différentielle :*

$$\forall z, t \quad \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = -f(z, t) \cdot \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)}$$

où $t \mapsto \kappa(t)$ est une fonction continue avec $|\kappa(t)| = 1$, $0 \leq t < \infty$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z)$$

et la convergence est uniforme sur les compacts de \mathbb{D} .

Démonstration. Montrons d'abord que $e^t g_t^{-1}(w) \rightarrow w$ avec convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{C} ce qui prouvera la seconde assertion du théorème. Par le théorème des accroissements on a pour $|z| \leq 1$:

$$\frac{e^t |z|}{(1 + |z|)^2} \leq g_t(z) \leq \frac{e^t |z|}{(1 - |z|)^2}$$

Étant donné $w \in \mathbb{C}$, $z = g_t^{-1}(w)$ est bien défini pour t assez grand et

$$(1 - |g_t^{-1}(w)|)^2 \leq e^t \left| \frac{g_t^{-1}(w)}{w} \right| \leq (1 + |g_t^{-1}(w)|)^2$$

En particulier $|g_t^{-1}(w)| \leq 4|w|e^{-t}$ donc $g_t^{-1}(w) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, uniformément sur les compacts de \mathbb{C} . Les inégalités précédentes donnent alors $|e^t \frac{g_t^{-1}(w)}{w}| \rightarrow 1$. Cela entraîne, avec le théorème de Montel, que pour toute suite t_n tendant vers ∞ , il existe une sous suite t_{n_k} telle que $e^{t_{n_k}} \frac{g_{t_{n_k}}^{-1}(w)}{w}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction analytique G . Comme $|G(w)| = 1$ et $G(0) = 1$ on a par le théorème de Liouville $G(w) = 1$. Enfin, comme G est indépendante de la suite t_n , on conclue que $e^t \frac{g_t^{-1}(w)}{w} \rightarrow 1$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C} .

Montrons à présent que $f(z, t)$ vérifie l'équation de Loewner. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Étape 1. On considère la fonction $h(z, s, t) = g_t^{-1}(g_s(z))$ pour $0 \leq s < t < \infty$ (figure 5), application conforme de \mathbb{D} dans $\mathbb{D} \setminus J_{s,t}$, où $J_{s,t}$ est un arc de Jordan partant de la frontière.

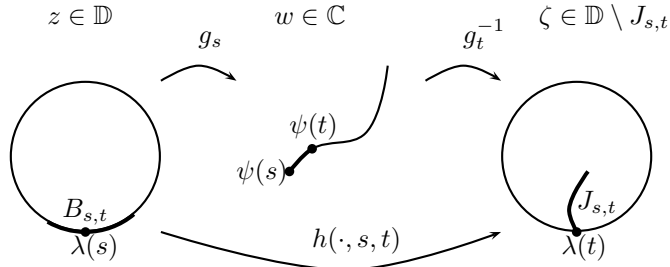


FIG. 5 – fonction $h(\cdot, s, t)$

Prolongeons g_s^{-1} par continuité sur chaque face de la courbe joignant $\psi(s)$ à $\psi(t)$ en utilisant le théorème de prolongement de Carathéodory. On obtient

ainsi un arc $B_{s,t}$ du cercle unité dont l'image par h est l'arc $J_{s,t}$. Notons $\lambda(t) = g_t^{-1}(\psi(t))$ l'extrémité de $J_{s,t}$ qui appartient au cercle unité. Alors $\lambda(s) \in B_{s,t}$. Par continuité de g_s^{-1} sur son prolongement, l'arc $B_{s,t}$ se contracte sur le point $\lambda(s)$ lorsque t tend vers s en décroissant. De même, la continuité de g_t^{-1} montre que l'arc $J_{s,t}$ se contracte sur le point $\lambda(t)$ lorsque s tend vers t en croissant.

Étape 2. Nous allons à présent étendre h à $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$. Par le théorème de prolongement de Carathéodory, h s'étend par continuité sur l'arc $B'_{s,t}$ qui est le complémentaire de $B_{s,t}$ dans le cercle unité. L'image de $B'_{s,t}$ par h est alors le cercle unité privé de $\lambda(t)$. Posons, pour $|z| > 1$:

$$h(z) = \frac{1}{\overline{h(1/\bar{z})}}$$

Le principe du prolongement analytique assure que la fonction h ainsi définie est holomorphe, et réalise une bijection conforme du complémentaire de $B_{s,t}$ dans le complémentaire de $J_{s,t} \cup J'_{s,t}$ où $J'_{s,t}$ désigne l'image de $J_{s,t}$ par $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

D'après le théorème de Koebe (2.3), l'arc $J_{s,t}$ est en dehors du disque $|\zeta| \leq \frac{1}{4}e^{s-t}$, donc $J'_{s,t}$ est à l'intérieur du disque $|\zeta| \leq 4e^{t-s}$. Avec comme conditions aux limites supplémentaire :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{h(z, s, t)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{h(z, s, t)} = e^{t-s}$$

le principe du maximum donne :

$$\left| \frac{h(z, s, t)}{z} \right| \leq 4e^{t-s}$$

sur le complémentaire de $B_{s,t}$.

Si t_n est une suite de points tendant vers s en décroissant, l'arc B_{s,t_n} se contracte sur le point $\lambda(s)$. La famille de fonctions $\frac{h(z, s, t_n)}{z}$ étant normale, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts ne contenant pas $\lambda(s)$ vers une fonction analytique ϕ . Comme ϕ est bornée au voisinage de $\lambda(s)$, elle se prolonge à \mathbb{C} tout entier donc par le théorème de Liouville ϕ est constante égale à 1 (car $\phi(0) = 1$). Cela étant vrai pour toute suite t_n , on conclue que $h(z, s, t) \xrightarrow[r \rightarrow s]{} z$ uniformément sur les compacts ne contenant pas $\lambda(s)$.

Étape 3. Maintenant, montrons que λ est continue. Fixons $s \geq 0$ et $\epsilon \geq 0$. Lorsque $t > s$ est suffisamment proche de s , le cercle C de centre $\lambda(s)$ et de rayon ϵ contient l'arc $B_{s,t}$ (figure 6). Son image C' par h est une courbe de Jordan dont l'intérieur contient $J_{s,t} \cup J'_{s,t}$. En particulier, $\lambda(t)$ est situé à l'intérieur de C' . Comme $h(z, s, t) \rightarrow z$ uniformément sur les compacts ne contenant pas $\lambda(s)$ lorsque $t \rightarrow s$, le diamètre de C' est inférieur à 3ϵ lorsque t est suffisamment proche de s . Étant donné un point w de C , on peut alors écrire :

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq |\lambda(s) - w| + |w - h(w)| + |h(w) - \lambda(t)| \leq \epsilon + \epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon$$

Ceci prouve que λ est continue à droite. Un argument analogue montre que λ est continue à gauche.²

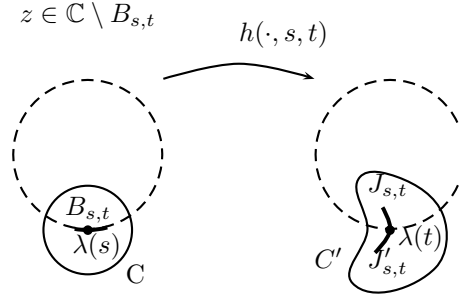


FIG. 6 – Continuité de λ

Étape 4. Montrons enfin l'équation de Loewner. Posons $\Phi(z) = \log\left(\frac{h(z,s,t)}{z}\right)$, un logarithme tel que $\Phi(0) = s - t$, analytique sur \mathbb{D} et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. On a $\text{Re}(\Phi(z)) < 0$ sur l'arc $B_{s,t}$ et $\text{Re}(\Phi(z)) = 0$ sur son complémentaire dans le cercle unité. La formule de Poisson donne donc

$$\text{Re}(\Phi(z)) = \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re}(\Phi(e^{i\theta})) \text{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right) d\theta$$

où $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ désignent les extrémités de l'arc $B_{s,t}$. Le second membre étant une fonction analytique de z , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re}(\Phi(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i\lambda$$

En particulier,

$$\Phi(0) = s - t = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re}(\Phi(e^{i\theta})) d\theta + i\lambda$$

donc $\lambda = 0$. Comme $h(f(z,s), s, t) = f(z,t)$ l'équation précédente se réécrit

$$\log \frac{f(z,t)}{f(z,s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re}(\Phi(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + f(z,s)}{e^{i\theta} - f(z,s)} d\theta$$

Le théorème de la moyenne appliqué séparément à la partie réelle et à la partie imaginaire du second membre donne

$$\log \frac{f(z,t)}{f(z,s)} = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Re}\left(\frac{e^{i\sigma} + f(z,s)}{e^{i\sigma} - f(z,s)}\right) + i \text{Im}\left(\frac{e^{i\tau} + f(z,s)}{e^{i\tau} - f(z,s)}\right) \right] \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re}(\Phi(e^{i\theta})) d\theta$$

²en imposant non plus que $B_{s,t}$ soit dans un cercle de centre $\lambda(s)$, mais que $J_{s,t}$ soit dans un cercle de centre $\lambda(t)$

où $e^{i\sigma}$ et $e^{i\tau}$ sont des points de l'arc $B_{s,t}$. En divisant par $t - s$, puis en faisant tendre t vers s on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s}(\log f(z, s)) = -\frac{\lambda(s) + f(z, s)}{\lambda(s) - f(z, s)}$$

puisque l'arc $B_{s,t}$ tend vers le point $\lambda(s)$. En posant $\kappa(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$, on trouve l'équation de Loewner.

□

3.3 Le troisième coefficient

Théorème 3.7 (Théorème de Loewner). *Soit $f = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ une fonction analytique et injective définie sur \mathbb{D} . Alors $|a_3| \leq 3$.*

Démonstration. Comme S est stable par rotations, il est équivalent de montrer $\operatorname{Re}(a_3) \leq 3$. Ensuite, il suffit de prouver cette inégalité pour les fonctions de S qui sont des déchirures puisque celles-ci sont denses dans S . Avec les notations précédentes, on a pour une déchirure f :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z)$$

où $f(z, t) = e^{-t}(z + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)z^i)$ vérifie l'équation de Loewner et $f(z, 0) = z$. On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = a_i$ et $a_i(0) = 0$ pour $i \geq 2$. En égalant les coefficients d'ordre 2 et 3 dans l'équation de Loewner on trouve :

$$a_2'(t) = -2e^{-t}\kappa(t)$$

$$a_3'(t) = -2e^{-2t}\kappa(t)^2 - 4e^{-t}\kappa(t)a_2(t)$$

Puis :

$$a_2 = \int_0^{\infty} a_2'(t)dt = -2 \int_0^{\infty} e^{-t}\kappa(t)dt$$

et comme $|\kappa(t)| \leq 1$ on obtient :

$$|a_2| \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 2$$

D'autre part on a :

$$a_3'(t) = -2e^{-2t}\kappa(t)^2 + 2a_2(t)a_2'(t)$$

soit en intégrant

$$a_3(t) = -2 \int_0^{\infty} e^{-2t}\kappa(t)^2 dt + 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-t}\kappa(t) dt \right)^2$$

En posant $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$, et en utilisant $\operatorname{Re}(z^2) \leq \operatorname{Re}(z)^2$ on obtient :

$$\operatorname{Re}(a_3) \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-2t}(1 - 2\cos^2\theta(t))dt + 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-t}\cos\theta(t)dt \right)^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient finalement :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_3) &\leq 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \int_0^\infty e^{-t} dt \int_0^\infty e^{-t} \cos^2 \theta(t) dt \\ &= 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) \cos^2 \theta(t) dt \\ &\leq 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) = 3 \end{aligned}$$

□

4 Compléments

4.1 Coefficients supérieurs et preuve de De Branges

La théorie de Loewner permet d'obtenir une équation différentielle vérifiée par $a_n(t)$ pour tout $n \geq 2$. On peut donc imaginer que l'on peut démontrer l'inégalité $|a_n| \leq n$ pour d'autres valeurs de n en suivant la même méthode que pour le cas $n = 3$. En réalité, ce n'est pas possible parce que les équations deviennent trop compliquées pour $n \geq 4$. A titre d'exemple, nous avons calculé les équations différentielles vérifiées par $a_4(t)$ et $a_5(t)$:

$$\begin{aligned} a_4'(t) &= -6\kappa(t)^2 e^{-2t} a_2(t) - 4\kappa(t) e^{-t} a_3(t) - 2\kappa(t) e^{-t} a_2(t)^2 - 2\kappa(t)^3 e^{-3t} \\ a_5'(t) &= -4\kappa(t) e^{-t} a_4(t) - 4\kappa(t) e^{-t} a_2(t) a_3(t) - 6\kappa(t)^2 e^{-2t} a_3(t) - 8\kappa(t)^3 e^{-3t} a_2(t) - 2\kappa(t)^4 e^{-4t} \end{aligned}$$

L'équation en $a_4'(t)$, au vu des résultats précédents, se réécrit

$$a_4'(t) = 3a_3'(t) \cdot a_2(t) + 2a_3(t) a_2'(t) - 5a_2'(t) \cdot a_2(t)^2 - 2\kappa(t)^3 e^{-3t}$$

mais cette expression ne s'intègre pas comme nous l'avons fait pour a_3 .

Garabedian et Schiffer ont démontré l'inégalité $|a_4| \leq 4$ en 1955 par une méthode variationnelle n'utilisant pas l'équation de Loewner. Pederson et Osawa ont prouvé $|a_6| \leq 6$ en 1968 en utilisant les inégalités de Grunsky, établies par Grunsky en 1939. Nehari a obtenu une preuve de $|a_4| \leq 4$ par l'équation de Loewner en 1973. Enfin, Le cas général a été résolu par De Branges en 1984. Sa preuve est basée sur l'équation de Loewner, les inégalités de Grunsky et des méthodes variationnelles.

4.2 Modèle SLE

Le modèle SLE (*Stochastic Loewner Evolution*) décrit les fonctions obtenues en prenant pour κ un mouvement Brownien.

Un tel processus apparaît naturellement lorsque l'on considère une courbe aléatoire progressant dans un domaine, avec une loi de probabilité qui se transporte par bijection conforme. On peut alors associer à cette courbe une fonction

κ , continue et aléatoire. Si de plus on impose que la progression à l'instant t soit indépendante de ce qui précède et si cette loi est "symétrique", les conditions sur la fonction κ lui impose d'être un mouvement Brownien.

L'étude des solutions de l'équation de Loewner pour un mouvement Brownien apparaissent ainsi dans des problèmes physiques tels que la percolation critique[4].

5 Remerciements

Nous tenons à remercier Wendelin Werner pour toute l'aide qu'il nous a apportée lors de la préparation de cet exposé ainsi qu' Olivier Glass et David Madore.

Remercions également Fabrice Catoire pour sa relecture rapide mais attentive du présent rapport.

Références

- [1] P. L. Duren : *Univalent Functions*, Springer, 1983.
- [2] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of functions of a complex variable*, Translations of mathematical monographs, volume 26, 1969.
- [3] P. Zorn, *The Bieberbach Conjecture*, Mathematical magazine, Vol.59, No.3, juin 1986.
- [4] W. Werner, *Random planar curves and Schramm-Loewner evolution*, Lecture notes from the 2002 Saint-Flour summer school, Springer, 2004.