Correction du partiel de logique

16 novembre 2010

Exercice 1

1. a) Facile

b) Si $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$, alors $A(X^{(\alpha)}) = X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$ et $X^{(\alpha)}$ est parfait. De plus, par récurrence immédiate, on a $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ si $\beta \geq \alpha$.

c) Supposons que pour tout ordinal $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$, on ait $X^{(\alpha+1)} \subsetneq X^{(\alpha)}$. On prend alors, pour un tel α, $a_\alpha \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Les $(a_\alpha)_{\alpha<(2^{\aleph_0})^+}$ sont deux-à-deux distincts et appartiennent à X. Ceci est impossible car $|X| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

2. Soient des fermés $F_n \subseteq [1/2^{2n+1}, 1/2^{2n}]$, posons $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On remarque que $F \cup [-1, 0]$ est un fermé et qu'on a $A(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(F_n) \cup \{[-1, 0]\}$. De même $F \cup \{0\}$ est un fermé et si un nombre infini de F_n sont non vides, alors $A(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cup \{0\}$.

Supposons β limite.

Par récurrence immédiate, on a pour tout α :

$$Y'^{(\alpha)} = [-1, 0] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^{(\alpha)}.$$

On en déduit que $Y'^{(\alpha+1)} \subsetneq Y'^{(\alpha)}$ pour $\alpha < \beta$ et $Y'^{(\beta+1)} = Y'^{(\beta)} = [-1, 0]$. Ceci implique $CB(Y') = \beta$.

De même, si $\beta = \gamma + 1$ est successeur, pour $\alpha < \gamma$,

$$Y^{(\alpha)} = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^{(\alpha)},$$

car presque tous les $X_n^{(\alpha)}$ sont non-vides. De plus $X^{(\gamma)} = \{0\}$ et enfin $X^{(\beta)} = \emptyset$. On a donc bien $CB(Y) = \beta$.

b) On démontre par récurrence sur α qu'il existe X fermé tel que $CB(X) = \alpha$ et si α est successeur, $X^{(\alpha)} = \emptyset$.

Pour $\alpha = 0$, on prend $X = \emptyset$.

Pour $\alpha = \gamma + 1$, supposons d'abord que γ est aussi successeur. Pour tout $n < \omega$, on peut trouver $X_n \subseteq [1/2^{2n+1}, 1/2^{2n}]$ tel que $CB(X_n) = \gamma$ et $X^{(\gamma)} = \emptyset$. On prend alors $Y = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et par la question précédente, $CB(Y) = \gamma + 1$ et $Y^{(\gamma+1)} = \emptyset$.

Si γ est limite, on prend $f : \omega \to \gamma$ cofinale tel que $f(n)$ est successeur pour tout n. Pour tout $n < \omega$, on dispose de X_n tel que $CB(X_n) = f(n)$ et $X^{(f(n))} = \emptyset$. On peut, quitte à dilater X_n, supposer que $X_n \subseteq [1/2^{2n+1}, 1/2^{2n}]$. On construit alors Y comme en a). Par le même raisonnement qu'en a), $Y^{(\alpha)} = \{0\} \cup \bigcup_{n<\omega} X_n^{(\alpha)}$ pour $\alpha < \gamma$. On en déduit que $Y^{(\gamma)} = \{0\}$ et enfin $Y^{(\alpha)} = \emptyset$ et $CB(Y) = \alpha$ comme demandé.

Pour α limite, on prend f, X_n comme ci-dessus avec $\beta = \alpha$. On pose $Y' = [0,1] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Alors $CB(Y') = \alpha$.

c) Soit X un fermé de $\mathbb{R}$. Supposons $\alpha < CB(X)$. On prend un $a_\alpha \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Alors par définition de $X^{(\alpha+1)}$, a_α est isolé dans $X^{(\alpha)}$. Il existe donc un intervalle I_α à coefficients rationnels tel que $I_\alpha \cap X^{(\alpha)} = \{a_\alpha\}$. Il est clair que si $\alpha \neq \alpha'$, $I_\alpha \neq I_{\alpha'}$ (puisque $I_\alpha \cap X^{(\beta)} = \emptyset$ pour $\beta > \alpha$).

On a donc construit une application injective de $CB(X)$ dans $\mathbb{Q}^2$. Ceci prouve que $CB(X) < \aleph_1$.

3. a) On pose $I = \overline{X \cap (a,b)} \cup (a,b)$. Montrons que $I \cap X$ est parfait. Soit $x \in I \cap X$. Si $x \in (a,b)$, alors pour tout intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x, il existe $a \in X \cap J$ (car $A(X) = X$). Donc $a \in X \cap I$ et $x \in A(X \cap I)$. Si $x \in \{a,b\}$, par construction x est adhérent à $X \cap (a,b)$, donc à $X \cap I$ et $x \in A(X \cap I)$.

Comme X est parfait, il est infini. Soit $\epsilon > 0$, il existe deux points distincts $x_1 < x_2$ de X. On prend alors $a_1 < x_1 < b_1$ et $a_2 < x_2 < b_2$ tels que $b_1 < a_2$ et $b_1 - a_1 < \epsilon$, $b_2 - a_2 < \epsilon$. On pose $X_i = \cap I_1'$ où $I_i' = \overline{X \cap (a_i,b_i)} \cup (a_i,b_i)$. Alors X_i est non vide car $x_i \in X_i$ et parfait par ce qui précède.

b) Soit $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ une suite finie d'éléments de $\{0,1\}$. On définit par récurrence sur $long(s)$ des ensembles X_s^1, X_s^2 parfaits, non vides, inclus dans X et de diamètre $< \frac{1}{2^{long(s)}}$.

On pose $X_\emptyset^1 = X_\emptyset^2 = X$. Supposons X_s construit. Par la question (a), on peut trouver dans X_s deux ensembles $X_{s^\frown 0}$ et $X_{s^\frown 1}$ comme voulus.

Soit $s \in \{0,1\}^\omega$. On remarque que l'intersection $\bigcap_{n<\omega} X_{s\restriction n}$ est non-vide, car c'est une suite décroissante de compacts. On prend alors $x_s \in \bigcap_{n<\omega} X_{s\restriction n}$. Pour $s \neq s'$, il est clair que $x_s \neq x_{s'}$.

On a donc construit une injection $\{0,1\}^\omega \to X$. On sait par ailleurs que $|X| \leq 2^{\alpha_0}$, donc finalement $|X| = 2^{\aleph_0}$.

c) Soit X un fermé quelconque. Soit $\alpha = CB(X)$. Alors $X = X^{(\alpha)} \cup_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)}$. Si $X^{(\alpha)}$ est non vide, $|X^{(\alpha)}| = 2^{\aleph_0}$ et $|X| = 2^{\aleph_0}$. Sinon, $|X| = \sum_{\beta<\alpha} |X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)}|$. Or pour $\beta < \alpha$, $|X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)}| \leq \aleph_0$. En effet, tout point de $X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)}$ est isolé dans $X^{(\beta)}$. On peut choisir un intervalle à extrémités rationnels autour de chacun de ces points, de telle sorte à ce que ces intervalles soient disjoints deux-à-deux. On voit donc qu'il ne peut y avoir qu'un nombre au plus dénombrable de tels points.

Exercice 2

1. a) La théorie des groupes abéliens est exprimable au premier ordre, et contenue dans T donc tout modèle de T est un groupe abélien.

b) Par théorème de Lowenheim-Skolem, il existe un modèle de T de cardinalité $\aleph_1$. Un tel modèle ne peut être finiment engendré en tant que groupe.

c) Soit T_{ab} la théorie des groupes abéliens. Si $G \models T_{ab}$, et $n \geq 2$ est un entier alors G/nG est cyclique d'ordre n si et seulement si :

$$G \models (\exists x)(\forall y) \Big((\exists z. nz = y) \dot\vee (\exists z. nz = y + x) \dot\vee (\exists z. nz = y + 2x) \dot\vee \ldots \dot\vee (\exists z. nz = y + (n-1)x) \Big),$$

où $\dot\vee$ désigne XOR (ou exclusif). Soit ϕ_n cette formule.

On considère aussi les formules $\psi_n : (\forall x)\neg(x = 0) \to \neg(n.x = 0)$, définies pour $n \geq 1$.

Alors $\mathfrak{Z} \models T_{ab} \cup \{\phi_n : n \geq 1\} \cup \{\psi_n : n \geq 1\}$, donc $\mathfrak{G}$ satisfait ces mêmes énoncés et G est comme demandé.

2. a)Immédiat par récurrence sur la complexité d'une formule.

b) On considère $\sigma : x \mapsto -x$. C'est un automorphisme différent de l'identité, et $\sigma(\{1\}) = \{-1\}$. L'ensemble $\{1\}$ n'est donc pas définissable.

c) Soit $n > 1$ un entier. On a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De plus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ est sans torsion. C'est donc un modèle de T.

Supposons que $\{-1, 1\}$ soit définissable dans $\mathbb{Z}$. Soit $\phi(x)$ une formule telle que $\phi[\mathbb{Z}] = \{-1, 1\}$. Alors par équivalence élémentaire, $\phi[\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}]$ est aussi un ensemble à deux éléments composé d'un élément a et de son opposé $-a$ (car tout cela peut s'exprimer par un énoncé du premier ordre). On sait pour la même raison, que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \models \neg(\exists z)n.z = a$.

Donc il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a = (1, r)$ ou $a = (-1, r)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a = (1, r)$. Considérons alors $\sigma : (a, b) \mapsto (a, b+a)$. C'est un automorphisme de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, et $\sigma(\{(1, r), (-1, -r)\}) = \{(1, r + 1), (-1, -r - 1)\}) \neq \{(1, r), (-1, -r)\}$. Ceci contredit le fait que $\{a, -a\}$ est définissable.

3. a) On considère le langage $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{a\}$ et $T' = T \cup \{(\exists b)p.b = a : p \in X\} \cup \{\neg(\exists b)p.b = a : p \notin X\}$.

Soit $T_0 \subset T$ finie. Alors il existe N tel que

$$T_0 \subset T \cup \{(\exists b)p.b = a : p \in X \cap \{1, ..., N\}\} \cup \{\neg(\exists b)p.b = a : p \in \{1, ..., N\} \setminus X\}.$$

On considère l'expansion de $\mathfrak{Z}$ à $\mathcal{L}'$ obtenue en interprétant a par $\prod_{p\in X\cap\{1,...,N\}} p$. C'est clairement un modèle de T_0.

Par compacité, T' est consistante. Soit $\mathfrak{M} \models T'$, alors le point $a^{\mathfrak{M}}$ satisfait la condition demandée.

b) Notons P l'ensemble des nombres premiers.

Pour $X \subset P$, au vu de la démonstration précédente et du théorème de Lowenheim-Skolem, il existe un modèle $\mathfrak{M}_X$ dénombrable satisfaisant la condition de la question a). Pour $\mathfrak{M}$ un modèle de T, notons

$$\Omega(\mathfrak{M}) = \{A \subset P : \exists a \in \mathfrak{M}, \{p \text{ premier } : p \text{ divise } a\} = A\}.$$

Cet ensemble est dénombrable si $\mathfrak{M}$ l'est. De plus, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes, $\Omega(\mathfrak{M}) = \Omega(\mathfrak{N})$.

Soit $E(T)$ l'ensemble des classes d'isomorphies de modèles dénombrables de T. Puisque $X \in \Omega(\mathfrak{M}_X)$, on a $\mathfrak{P}(P) = \bigcup_{\mathfrak{M}\in E(T)} \Omega(\mathfrak{M})$. On voit alors que

$$|\mathfrak{P}(P)| \leq |E(T)|.\aleph_0,$$

donc $|E(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Donc $|X| = \aleph_0$.

Reste à voir qu'il ne peut y avoir strictement plus de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables deux-à-deux non-isomorphes. Ceci est un fait général (*i.e.*, est vrai pour toute théorie dans un langage dénombrable). Tout modèle dénombrable est isomorphe à un modèle dont l'univers est ω. Or, pour tout élément de la signature de $\mathcal{L}$, il y a au plus $2^{\aleph_0}$ manières de choisir une interprétation pour cet élément dans ω (pour une constante, il y a $\aleph_0$ choix, et une relation ou une fonction est donnée par une sous ensemble de ω^k pour un certain k). Puisque la signature est dénombrable (ici, elle est même finie), cela fait en tout $2^{\aleph_0}$ possibilités.

Exercice 3

1. Soit $n = |\phi(\mathfrak{N})|$ et $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$. Alors

$$\mathfrak{M} \models (\exists x_1, ..., x_n) \bigwedge_{i<n+1} \phi(x_i) \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall x.\phi(x) \to \bigvee_{i<n+1} x = x_i.$$

Donc $\mathfrak{N}$ montre cette même formule, ce qui implique que $|\phi(\mathfrak{N})| = n$.

Puisque $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ est élémentaire, pour tout $x \in \phi[\mathfrak{M}]$, $\mathfrak{M} \models \phi[x]$ donc $\mathfrak{N} \models \phi[x]$. Ainsi $\phi[\mathfrak{M}] \subseteq \phi[\mathfrak{N}]$ et comme ces deux ensembles ont même cardinalité, $\phi[\mathfrak{M}] = \phi[\mathfrak{N}]$.

2. Soit $\mathsf{Diag}(\mathfrak{M})$ le diagramme complet de $\mathfrak{M}$. Un modèle de $\mathsf{Diag}(\mathfrak{M})$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$. On ajoute à $\mathcal{L}_M$ des constantes $\{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ et on considère la théorie $T = \mathsf{Diag}(\mathfrak{M}) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta\} \cup \{\phi(c_\alpha) : \alpha < \lambda\}$. Montrons que T est consistante. Soit $A_0 \subset T$ fini. Il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n < \lambda$ tels que $A_0 \subset \mathsf{Diag}(\mathfrak{M}) \cup \{c_{\alpha_i} \neq c_{\alpha_j} : i \neq j\} \cup \{\phi(c_{\alpha_i}) : i \leq n\}$. On peut alors interpréter les c_{α_i} par des points de $\phi[\mathfrak{M}]$ construisant ainsi une expansion de $\mathfrak{M}$ qui soit modèle de A_0. Ainsi T est consistante.

Si $\mathfrak{N} \models T$, alors $\mathfrak{N}$ est extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ et par construction $\phi[\mathfrak{N}] \geq \lambda$.

3. On étend $\mathcal{L}$ par des constantes $\{c^\alpha_\phi : \alpha < \lambda, \phi \in F\}$ où F désigne l'ensemble des formules $\phi(x)$ à une variable libre tels que $\phi[\mathfrak{M}]$ est infini.

Comme en 2., on montre que

$$T = \mathsf{Diag}(\mathfrak{M}) \cup \{c^\alpha_\phi \neq c^\beta_\phi : \alpha \neq \beta, \phi \in F\} \cup \{\phi(c^\alpha_\phi : \alpha < \lambda, \phi \in F\}$$

est consistante.

Par le théorème de Lowenheim-Skolem, T admet un modèle de cardinal λ (remarquer qu'on a ajouté λ constantes). Un tel modèle $\mathfrak{N}$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ dans laquelle $|\phi[\mathfrak{N}]| = \lambda$ pour tout $\phi \in F$.

4. Supposons $\mathfrak{M}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir par récurrence (cf TD) que $\mathfrak{M}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}_{n+k}$ pour tout $k \geq 1$. Soit maintenant $\bar{a}$ un uplet d'éléments de $\mathfrak{M}_n$ et $\phi(\bar{x})$ une formule. On montre par récurrence sur la complexité de ϕ que $\mathfrak{M}_n \models \phi[\bar{a}]$ ssi $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{a}]$.

Si ϕ est sans quanteurs, c'est clair. Si $\phi = \neg\psi$ ou $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$, c'est clair par induction. Supposons $\phi(\bar{x}) = (\exists y)\psi(\bar{x}, y)$. Si $\mathfrak{M}_n \models \phi[\bar{a}]$, alors il existe $b \in \mathfrak{M}_n$ tel que $\mathfrak{M}_n \models \phi[\bar{a}, b]$. Par induction, $\mathfrak{M} \models \psi[\bar{a}, b]$ dons $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{a}]$.

Réciproquement, si $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{a}]$, il existe $m \geq n$ et $b \in \mathfrak{M}_m$ tel que $\mathfrak{M} \models \psi[\bar{a}, b]$. Par hypothèse d'induction, on a $\mathfrak{M}_m \models \psi[\bar{a}, b]$. Donc $\mathfrak{M}_m \models \phi[\bar{a}]$. Comme $\mathfrak{M}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}_m$, on a $\mathfrak{M}_n \models \phi[\bar{a}]$. Ce qui achève la récurrence.

5. Soit $\mathfrak{M}$ une structure sur un langage $\mathfrak{L}$ tel que $\lambda \geq (\mathsf{card}(\mathfrak{M}), \mathsf{card}(\mathfrak{L}))$. On déduit de la question 3. appliquée avec $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_M$ qu'il existe $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ tel que $\phi[\mathfrak{N}] = \lambda$ pour tout $\mathfrak{L}_M$-formule ϕ telle que $\phi[\mathfrak{M}]$ est infini. On construit alors par récurrence une suite

$$\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3 \preccurlyeq \ldots$$

telle que $\phi[\mathfrak{M}_{n+1}] = \lambda$ pour tout $\phi \in L_{M_n}$ tel que $\phi[\mathfrak{M}_n]$ est infini. Soit $\mathfrak{M} = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{M}_n$. Alors $\mathfrak{M}$ a la propriété voulue. En effet, $|\mathfrak{M}| = \sum_{n<\omega} |\mathfrak{M}_n| = \lambda$ et si $\phi(y) \in \mathsf{Fml}(\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}})$, il existe n tel que ϕ est à paramètres dans $\mathfrak{M}_n$. Alors par construction $\phi[\mathfrak{M}_{n+1}] = \lambda$ et par extension élémentaire $\phi[\mathfrak{M}] \supseteq \phi[\mathfrak{M}_{n+1}]$ donc nécessairement $|\phi[\mathfrak{M}]| = \lambda$.