Algèbre I (F. Loeser)
Examen du 26 janvier 2007

Les documents ne sont pas autorisés. Durée : 3 h

Exercice 1

Soit A un anneau intègre qui n'est pas un corps. On suppose que A est euclidien, c'est à dire qu'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que si a et b sont non nuls dans A, il existe q et r dans A avec $a = bq + r$ et $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$.

a) Montrer que l'ensemble des $\varphi(a)$ pour a non inversible et non nul a un plus petit élément $\varphi(x)$ avec x non inversible et non nul dans A.

b) Montrer que l'application $A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$ est surjective (ici $A^\times$ désigne l'ensemble des éléments inversible de A).

c) Montrer que l'idéal (x) est maximal.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

a) Décrire les idéaux premiers du sous-anneau $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ de $\mathbb{C}(Z)$.

b) On considère les anneaux $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ et $B = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. Montrer que B est isomorphe à $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$.

c) Montrer que tout idéal maximal de B est de la forme $\mathfrak{n}_{x,y} = \{f \in B | f(x, y) = 0\}$ où (x, y) est un point de $\mathbb{C}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$.

d) Montrer que tout idéal non nul de B est de la forme $\mathfrak{n}_{x_1,y_1}^{k_1} \cdots \mathfrak{n}_{x_r,y_r}^{k_r}$. (On rappelle que $\mathfrak{n}_{x_1,y_1}^{k_1} \cdots \mathfrak{n}_{x_r,y_r}^{k_r}$ est l'idéal engendré par les produits $f_1 \cdots f_r$ avec f_i dans $\mathfrak{n}_{x_i,y_i}^{k_i}$ et que $\mathfrak{n}_{x_i,y_i}^{k_i}$ est l'idéal engendré par les produits de k_i éléments de $\mathfrak{n}_{x_i,y_i}$.)

e) Pour (x, y) un point de $\mathbb{C}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ on note $\mathfrak{m}_{x,y} = \mathfrak{n}_{x,y} \cap A$. Décrire $A/\mathfrak{m}_{x,y}$.

f) Soit I un idéal de A. Montrer que $I = IB \cap A$, avec IB l'idéal de B engendré par I. Montrer que tout idéal I non nul de A est de la forme $\mathfrak{m}_{x_1,y_1}^{k_1} \cdots \mathfrak{m}_{x_r,y_r}^{k_r}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les k_i pour que I soit principal.

g) On considère maintenant les anneaux $A' = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$ et $B' = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$.
Montrer que B' est isomorphe à B.

h) Décrire les idéaux de A' et B'. Montrer que A' est principal. A' est-il isomorphe à A ?

i) Quels sont les éléments inversibles de A' ?

j) A l'aide de l'exercice précédent montrer que A' n'est pas euclidien.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit V un k-espace vectoriel de dimension n et soit V^* son dual. On munit $V \oplus V^*$ de la forme bilinéaire $b((x,f),(y,g)) = f(y) + g(x)$ et on note $\mathbb{H}(V) := (V \oplus V^*, b)$.

a) Montrer que $\mathbb{H}(V)$ est non dégénéré et que V et V^* sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

b) Soit W un k-espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire φ non dégénérée. Montrer que W contient un sous-espace totalement isotrope de dimension n si et seulement si $(W, \varphi) \simeq \mathbb{H}(V)$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $q = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i X_i^2$ une forme quadratique sur le k-espace vectoriel $V = k^n$. Pour tout corps L contenant k on note q_L la forme quadratique $q_L = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i X_i^2$ sur le L-espace vectoriel $V_L = L^n$.

On se propose de démontrer le résultat suivant, dû à T. Springer : si L/k est une extension finie de degré m impair, et si (V, q) est anisotrope, alors (V_L, q_L) est également anisotrope.

a) Expliquer la restriction sur la parité de m.

b) Expliquer pourquoi il suffit de traiter le cas où $L = k[X]/(p(X))$ avec $p(X)$ irréductible.

c) Dans ce cas supposons q_L isotrope. Montrer que l'on peut écrire

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i g_i(X)^2 = p(X)h(X).$$

avec les $g_i(X)$ dans $k[X]$ des polynômes non tous constants de degré $< m$ et sans facteur commun, et h dans $k[X]$. Montrer qu'alors h est non nul de degré impair $< m$.

d) Conclure.