Examen de logique

30 janvier 2009
Durée : 3h. Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Relations d'équivalence emboîtées)
On considère le langage (égalitaire) $\mathcal{L} = \{E_0, E_1\}$, où E_0 et E_1 sont des symboles de relation binaires.

1. Écrire une $\mathcal{L}$-formule φ qui exprime que E_0 et E_1 sont des relations d'équivalence, telles que E_0 soit *plus grossière* que E_1, c'est à dire que toute E_1-classe d'équivalence est contenue dans une seule E_0-classe d'équivalence.
2. Écrire une formule $\psi_n[v]$ à une variable libre v qui exprime que la E_0-classe d'équivalence de v contient au moins n E_1-classes d'équivalences différentes.
3. Soit $p \geq 1$ un entier. Écrire la théorie T_p des relations d'équivalence E_0 et E_1 avec les propriétés suivantes :
   - E_0 est plus grossière que E_1 ;
   - il y a une infinité de E_0-classes d'équivalence ;
   - toute E_0-classe d'équivalence est réunion d'exactement p E_1-classes d'équivalence ;
   - toute E_1-classe d'équivalence est infinie.
4. Soit $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On interprète E_0 par : $E_0^{\mathfrak{M}}(a,b)(c,d)$ si et seulement si $a = c$. Trouver une interprétation $E_1^{\mathfrak{M}}$ de E_1 sur M telle que la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = (M, E_0^{\mathfrak{M}}, E_1^{\mathfrak{M}})$ soit un modèle de T_p.
5. Montrer que T_p est une théorie complète qui élimine les quantificateurs.
6. Est-ce que T_p est $\aleph_1$-catégorique ?

Solution 1

1. La formule $\varphi_i \equiv \forall x \forall y \forall z (E_i xx \wedge (E_i xy \Rightarrow E_i yx) \wedge ((E_i xy \wedge E_y z) \Rightarrow E_i xz))$ axiomatise les $\mathcal{L}$-structures dans lesquelles E_i définit une relation d'équivalence. Il suffit de poser $\varphi \equiv \varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \chi$, où $\chi \equiv \forall x \forall y (E_1 xy \Rightarrow E_0 xy)$.
2. La formule suivante convient : $\psi_n[v] \equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{i=1}^n E_0 v x_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg E_1 x_i x_j \big)$
3. La théorie T_p est axiomatisée par $\{\varphi, \chi_p\} \cup \{\rho_n, \sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, où $\chi_p \equiv \forall v (\psi_p[v] \wedge \neg \psi_{p+1}[v])$,
$$\rho_n \equiv \forall v \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{i=1}^n E_1 v x_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = x_j \big) \text{ et}$$
$$\sigma_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg E_0 x_i x_j$$
4. L'interprétation suivante de E_1 sur M convient :
$$E_1^{\mathfrak{M}}(a,b)(c,d) \text{ ssi } a = c \text{ et } c \equiv d \mod p$$
5. On va procéder comme dans l'exercice 2 du partiel.
On commence par montrer :
   (†) Soient $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ des modèles de T_p et $A \subseteq \mathfrak{M}$, $A' \subseteq \mathfrak{M}'$ des sous-structures finies. Soit $f : A \to A'$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme et $b \in M$. Alors f s'étend en un isomorphisme avec domaine $A \cup \{b\}$ et image contenue dans M'.

Une fois (†) montré, on peut continuer comme dans l'exercice 2 (questions 5 et 6) du partiel, c'est à dire on déduit de (†) que T_p élimine les quantificateurs et est $\aleph_0$-catégorique. (Pour ce dernier résultat, on utilise que les sous-structures à un élément de modèles de T_p sont toutes isomorphes.) Comme T_p n'a pas de modèle fini, c'est une théorie complèete par le critère de Vaught.

Preuve de (†). Considérons $f : A = \{a_1, \dots, a_n\} \simeq A' = \{a'_1, \dots, a'_n\}$ et soit $b \in M$. Il y a plusieurs cas à traiter :

1^er cas $b \in A$. Dans ce cas, il n'y a rien à faire.

2^e cas Il existe $a_i \in A$ tel que $\mathfrak{M} \models E_1 a_i b$. Il suffit de choisir $b' \in M' \setminus A'$, l'élément b' étant E_1-équivalent à $a'_i = f(a_i)$. C'est possible puisque toute E_1-classe d'équivalence de $\mathfrak{M}'$ est infini. Comme E_0 est plus grossière que E_0, on obtient un isomorphisme qui étend f en envoyant b sur b'.

3^e cas L'élément b n'est pas E_1-relié à A, mais il existe $a_i \in A$ tel que $\mathfrak{M} \models E_0 a_i b$. En particulier, il y a au plus $p-1$ $E_1^{\mathfrak{M}}$-classes différentes et contenues dans la classe $a_i/E_0^{\mathfrak{M}}$ qui ont un représentant dans A. Par isomorphie, la même chose est vraie dans $\mathfrak{M}'$ quand on remplace $E_i^{\mathfrak{M}}$ par $E_i^{\mathfrak{M}'}$ $(i = 0, 1)$, a_i par a'_i et A par A'. Comme $\mathfrak{M}' \models T_p$, il existe $b' \in M'$ tel que $\mathfrak{M}' \models E_0 a'_i b' \wedge \bigwedge_{i=1}^n \neg E_1 a'_i b'$. On peut donc étendre f à $A \cup \{b\}$.

4^e cas L'élément b n'est pas E_0-relié à A. Il suffit de choisir $b' \in M'$ qui n'est pas E_0-relié à A' (un tel b' existe car M' contient une infinité de E_0-classes).

6. La théorie T_p n'est pas $\aleph_1$-catégorique :

   D'une part, sur $M_1 := \aleph_1 \times \mathbb{N}$ on définit $E_0^{\mathfrak{M}_1}(\alpha, b)(\gamma, d)$ ssi $\alpha = \gamma$, ainsi que $E_1^{\mathfrak{M}_1}(\alpha, b)(\gamma, d)$ ssi $\alpha = \gamma$ et $b \equiv d \mod p$. La $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = (M_1, E_0^{\mathfrak{M}_1}, E_1^{\mathfrak{M}_1})$ est un modèle de T_p dans lequel toutes les E_1-classes d'équivalence sont dénombrables.

   D'autre part, on peut construire $\mathfrak{M}_2 \models T_p$ de cardinal $\aleph_1$ contenant au moins une E_0-classe de cardinal $\aleph_1$. Pour cela, il suffit de "gonfler" une classe dans $\mathfrak{M}_1$: On considère un ensemble X de cardinal $\aleph_1$, $M_2 := X \dot\cup M_1$, on choisit un élément $m_1 \in M_1$ et on pose $E_i^{\mathfrak{M}_2} = E_i^{\mathfrak{M}_1} \cup (X \cup \{m_1\}) \times (X \cup \{m_1\})$ pour $i = 0, 1$.

   Il est clair que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 2 (Théorie des ensembles)
Soit $\mathcal{U}$ un modèle de ZFC vérifiant l'axiome de fondation.

1. Pour x dans $\mathcal{U}$ on définit, par induction sur ω, la suite d'ensembles $x_0 := x$, $x_{n+1} := \bigcup x_n$. Puis, on pose $\operatorname{tr.cl}(x) := \bigcup\{x_n \mid n \in \omega\}$, la *clôture transitive* de x. Montrer :
   (a) Pour tout x, y et z dans $\mathcal{U}$ on a $x \subseteq \operatorname{tr.cl}(x)$ et $x \in y \subseteq z \Rightarrow \operatorname{tr.cl}(x) \subseteq \operatorname{tr.cl}(y) \subseteq \operatorname{tr.cl}(z)$.
   (b) L'ensemble $\operatorname{tr.cl}(x)$ est transitif pour tout $x \in \mathcal{U}$ (rappel : un ensemble x est *transitif* si $z \in y \in x$ implique $z \in x$).
   (c) Si t est un ensemble transitif tel que $t \supseteq x$, alors $t \supseteq \operatorname{tr.cl}(x)$.
   (d) L'opération $x \mapsto \operatorname{tr.cl}(x)$ est donnée par une relation fonctionnelle : il existe une formule (sans paramètres) $\theta[x, y]$ telle que pour tout u dans $\mathcal{U}$ on ait $\mathcal{U} \models \forall y(\theta[u, y] \iff y = \operatorname{tr.cl}(u))$.
   (e) Montrer ou donner un contre-exemple :
   (I) Pour tout x on a $\operatorname{card}(x) \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(\bigcup x))$.
   (II) Pour tout x on a $\operatorname{card}(\operatorname{tr.cl}(x)) \leq \aleph_0 \operatorname{card}(x)$.

2. Rappel sur la hiérarchie de von Neumann : Par induction sur $\alpha \in \mathrm{Ord}$ on définit des ensembles V_α. On pose $V_0 := \emptyset$, puis $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ et $V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ si λ est limite. Comme $\mathcal{U}$ satisfait à l'axiome de fondation, on a $\mathcal{U} \models \forall x \exists \alpha\, x \in V_\alpha$.

   Le *rang* d'un ensemble x est défini ainsi : $\operatorname{rg}(x) =$ le plus petit γ tel que $x \in V_{\gamma^+}$.

   Soit κ un cardinal infini. On définit $H_\kappa := \{x \in \mathcal{U} \mid \operatorname{card}(\operatorname{tr.cl}(x)) < \kappa\}$. Montrer :
   (a) Si x est transitif et $\operatorname{rg}(y) = \alpha$ pour un $y \in x$, alors pour tout $\beta < \alpha$ il existe $z \in x$ tel que $\operatorname{rg}(z) = \beta$.

(b) H_κ est transitif et $H_\kappa \cap \mathrm{Ord} = \kappa$.

(c) $H_\kappa \subseteq V_\kappa$ pour tout κ. En déduire que H_κ est un ensemble (a priori, ce n'est qu'une classe).

(d) $H_\omega = V_\omega$.

(e) Pour tout cardinal infini λ il existe $\kappa \geq \lambda$ tel que $V_\kappa = H_\kappa$.

(f) Si κ est régulier et $\kappa > \omega$, alors $(H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa})$ est un modèle de ZFC + AF privé de l'axiome des parties (c'est à dire satisfait aux axiomes suivants : axiome d'extensionalité, axiome de la paire, axiome de la réunion, schéma d'axiome de compréhension, schéma d'axiome de remplacement, axiome de l'infini, axiome de fondation et axiome du choix).

Solution 2 1. (a) On a $x \subseteq y_1$, donc $x_n \subseteq y_{n+1}$ et $y_n \subseteq z_n$ pour tout $n \in \omega$ (par induction). L'assertion en découle.

(b) Soit $z \in y \in \mathrm{tr.cl}(x)$. Il existe $n \in \omega$ tel que $y \in x_n$. Donc $z \in x_{n+1} \subseteq \mathrm{tr.cl}(x)$.

(c) Un ensemble t est transitif si et seulement si pour tout $a \subseteq t$ on a $\bigcup a \subseteq t$. On conclut donc par induction sur ω.

(d) Par les deux parties précédentes, on a $\mathrm{tr.cl}(x) = \bigcap\{t \,|\, t \supseteq x, t \text{ transitif}\}$. On peut alors exprimer $t = \mathrm{tr.cl}(x)$ par la formule $\theta[x,t] = \forall z(z \in t \iff \forall t'(\forall b(b \in t \Rightarrow b \subseteq t') \wedge x \subseteq t') \Rightarrow z \in t')$, où on utilise "$a \subseteq b$" comme abbréviation pour la formule $\forall c(c \in a \Rightarrow c \in b)$.

(e) L'application naturelle $x \to \mathcal{P}(\bigcup x)$ est injective (par extensionalité), d'où $\mathrm{card}(x) \leq 2^{\mathrm{card}(\bigcup x)}$. En revanche, l'assertion (II) est fausse. L'ensemble $x = \{\aleph_1\}$ fournit un contre-exemple.

2. (a) S'il existe $\beta < \alpha$ tel que $\beta \notin \mathrm{im}(\mathrm{rg}\restriction_x)$, on considère β_0 minimal avec cette propriété. Soit α_0 minimal tel que $\alpha_0 > \beta_0$ et $\alpha_0 \in \mathrm{im}(\mathrm{rg}\restriction_x)$ et soit $z \in x$ tel que $\mathrm{rg}(z) = \alpha_0$. Alors $\mathrm{rg}(u) < \alpha_0$ pour tout $u \in z$. Comme x est transitif, $z \subseteq x$ et donc $\mathrm{rg}(u) < \beta_0$ pour tout $u \in z$. Par conséquent, $z \subseteq V_{\beta_0}$ d'où $\mathrm{rg}(z) \leq \beta_0$. Contradiction.

(b) Soit $y \in x \in H_\kappa$. Par 1(a), $\mathrm{tr.cl}(y) \subseteq \mathrm{tr.cl}(x)$, d'où $\mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(y)) \leq \mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(x)) < \kappa$ et $y \in H_\kappa$. Quant à la seconde partie, il suffit de noter que tout ordinal est un ensemble transitif. Par conséquent, $\alpha \in H_\kappa$ si et seulement si $\mathrm{card}(\alpha) < \kappa$, c'est à dire $H_\kappa \cap \mathrm{Ord} = \kappa$.

(c) Notons d'abord que tout x est dans un V_α par l'axiome de fondation. On déduit des parties précédentes que si $x \in H_\kappa$, alors il existe $\beta < \kappa$ tel que $\mathrm{rg}(u) < \beta$ pour tout $u \in \mathrm{tr.cl}(x)$, en particulier, $x \in V_{\beta+1} \subseteq V_\kappa$. Il s'en suit que $H_\kappa = \{x \in V_\kappa \,|\, \mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(x)) < \kappa\}$. L'opération $x \mapsto \mathrm{tr.cl}(x)$ étant donnée par une relation fonctionnelle, on conclut par compréhension.

(d) Par induction sur $n \in \omega$, on montre que V_n est fini (et transitif). Il s'en suit que $V_\omega \subseteq H_\omega$, d'où $V_\omega = H_\omega$ par la partie 2(c).

(e) Soit λ un cardinal infini. On construit une suite croissante de cardinaux $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ avec $\kappa_0 = \lambda$. Pour κ_n donné, on pose $\kappa_{n+1} = \mathrm{card}(V_{\kappa_n})^+$. Par définition et 2(c), on a $H_{\kappa_n} \subseteq V_{\kappa_n} \subseteq H_{\kappa_{n+1}}$ pour tout $n \in \omega$. Alors $H_\kappa = V_\kappa$ pour $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n$, par continuité des deux hiérarchies.

(f) La structure $(H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa})$ satisfait à l'*axiome d'extensionalité*, car H_κ est un ensemble transitif.

- *Axiome de la paire.* Soit $x, y \in H_\kappa$, et $z = \{x, y\}$. Alors $\mathrm{tr.cl}(z) = z \cup \mathrm{tr.cl}(x) \cup \mathrm{tr.cl}(y)$, d'où $\mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(z)) \leq 2 + \mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(x)) + \mathrm{card}(\mathrm{tr.cl}(y)) < \kappa$.
- *Axiome de la réunion.* C'est une conséquence de $\mathrm{tr.cl}(\bigcup x) \subseteq \mathrm{tr.cl}(x)$ et de la transitivité de H_κ (car alors la réunion au sens de $\mathcal{U}$ est égale à la réunion au sens de H_κ).
- *Compréhension.* Soit $x \in H_\kappa$ et $F[v]$ une formule à une variable libre. On considère la relativisée $F^{H_\kappa}[v]$ (que l'on peut obtenir par induction sur la construction de F) qui a la propriété que pour tout $a \in H_\kappa$ on a $\mathcal{U} \models F^{H_\kappa}[a]$ si et seulement si $(H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa}) \models F[a]$.
  Alors $\{z \in x \,|\, (H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa}) \models F[z]\}$ est bien donné par un ensemble b dans $\mathcal{U}$. Comme $b \subseteq x$, on a $b \in H_\kappa$.
- *Remplacement.* Soit $x \subseteq H_\kappa$ de cardinal $< \kappa$. Alors $x \in H_\kappa$, car $\mathrm{tr.cl}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{tr.cl}(y) \,|\, y \in x\}$ est de cardinal $< \kappa$ par régularité de κ et le fait que $\kappa > \omega$. À l'aide le la relativisée, on peut donc établir le schéma de remplacement dans $(H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa})$.

- *Axiome de l'infini.* C'est une conséquence de $\omega \in H_\kappa$.
- *Axiome de fondation.* Comme H_κ est transitif, c'est une conséquence directe de l'axiome de fondation dans $\mathcal{U}$.
- *Axiome du choix.* Soit $x \in H_\kappa$. On choisit (dans $\mathcal{U}$, où AC est satisfait) une bijection $f : \lambda \to x$, où $\lambda < \kappa$. Or, par une preuve similaire à celle dans le cas de l'axiome de la paire, on montre que $x \times \lambda \in H_\kappa$. Comme $f \subseteq x \times \lambda$, on en déduit que $f \in H_\kappa$.

Exercice 3 (Récursivité)
On travaille avec les notations du cours.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que si i est un indice pour la fonction récursive (partielle) f à deux variables, alors $\epsilon(i)$ est un indice pour la fonction $g = f \circ \sigma$, où $\sigma(x, y) = (y, x)$.
2. Soit $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction qui à $i \in \mathbb{N}$ associe le plus petit entier j tel que $\varphi_i^2 \circ \sigma = \varphi_j^2$. Montrer que η n'est pas récursive.
3. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^1_{\delta(n)}$ est la fonction constante égale à n.
4. Dans cette partie, on pourra utiliser la version suivante du théorème du point fixe (différente de celle traitée dans le cours) :

   Soient $n > 0$ et p des entiers et α une fonction totale récursive à $p+1$ variables. Alors il existe une fonction récursive primitive h à p variables telle que, pour $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ on ait $\varphi^n_{\alpha(\overline{x}, h(\overline{x}))} = \varphi^n_{h(\overline{x})}$.

   Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive $h \in \mathcal{F}_2$ telle que l'on ait $\varphi^1_{h(n,i)} = \varphi^1_{\delta(n)}$ pour $i \geq h(n, i)$, et $\varphi^1_{h(n,i)} = \varphi^1_i$ pour $i < h(n, i)$.
5. Montrer que l'ensemble $A_i = \{n \mid h(n, i) \leq i\}$ a au plus $i + 1$ éléments pour tout $i \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathcal{F}_1$ récursive primitive telle que $\varphi^1_i = \varphi^1_{\beta(i)}$ et $\beta(i) > i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Solution 3
1. Soit F la fonction (partielle) qui à (i, x, y) associe $\varphi_i^2(y, x)$. On choisit un indice i_0 pour F, c'est à dire $\varphi_i^2(y, x) = F(i, x, y) = \varphi^3_{i_0}(i, x, y)$ pour tout i, x, y. Par le théorème SMN, il existe une fonction récursive primitive $s_1^2 \in \mathcal{F}_2$ telle que $\varphi_j^3(z, x, y) = \varphi^2_{s_1^2(j,z)}(x, y)$. La fonction $\epsilon \in \mathcal{F}_1$, $\epsilon(i) = s_1^2(i_0, i)$, est donc récursive primitive et a la propriété requise.
2. Soit $f_0 = \varphi_0^2 \in \mathcal{F}_2$. Si η était récursive, alors $X_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid \eta(\epsilon(i)) = 0\}$ serait un ensemble récursif. Mais X_0 est l'ensemble des indices de f_0 et n'est donc pas récursif par le théorème de Rice.
3. La fonction f qui à (n, x) associe n est récursive et il existe donc un indice i_0 tel que $f = \varphi^2_{i_0}$. Il suffit de poser $\delta(n) = s_1^1(i_0, n)$.
4. On définit une fonction (récursive totale) $\gamma \in \mathcal{F}_3$ comme suit :

   $$\gamma(n, i, y) = \begin{cases} \delta(n) \text{ si } i \geq y\,; \\ i \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Pour établir l'existence d'une fonction h comme requise, il suffit d'appliquer le théorème du point fixe (dans la version indiquée) à la fonction γ.
5. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \neq m$ deux éléments de A_i. Alors $\varphi^1_{h(n,i)} = \varphi^1_{\delta(n)} \neq \varphi^1_{\delta(m)} = \varphi^1_{h(m,i)}$, ce qui montre que A_i s'injecte dans $\{0, \ldots, i\}$.
   On définit $\alpha(i) = \mu\, n \leq i + 1\, (h(n, i) > i)$. La fonction $\beta \in \mathcal{F}_1$, $\beta(i) = h(\alpha(i), i)$, est récursive primitive et a les propriétés cherchées.

Exercice 4
Soit T une théorie récursive dans le langage de l'arithmétique. Soit $P_T(x,y)$ une formule Σ_1 représentant $\mathrm{Dem}(T) = \{(\#F, \#\#d)\}$. On considère la fonction primitive récursive $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivante : si n est le nombre de Gödel d'un énoncé F, $N(n)$ est le nombre de Gödel de $\neg F$ sinon $N(n) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ une formule Σ_1 représentant cette fonction. On considère la formule

$$P_T^R(x,y) = P_T(x,y) \wedge \neg \exists z \leq y\, \exists u (P_T(u,z) \wedge \mathcal{N}(x,u)),$$

on note $h_T^R(x)$ la formule $\exists y P_T^R(x,y)$ et $\Delta_T^R = \Delta_{h_T^R}$. Rappelons que $\mathcal{P}_0 \vdash F(\#\Delta_F) \iff \neg\Delta_F$ pour toute formule $F[v]$ à une variable libre.
On se propose de démontrer le résultat suivant (variante de Rosser du théorème de Gödel) : si T est une théorie récursive consistante contenant $\mathcal{P}_0$, alors ni Δ_T^R ni sa négation ne sont démontrables à partir de T.

1. Montrer que si $T \vdash \neg\Delta_T^R$, alors

$$\mathcal{P}_0 \vdash \forall y (P_T(\#\Delta_T^R, y) \implies \exists z \leq y\, \exists u (P_T(u,z) \wedge \mathcal{N}(\#\Delta_T^R, u))).$$

2. Conclure.

Solution 4 1. Supposons que $T \vdash \neg\Delta_T^R$. Il résulte qu'il existe un entier naturel e code d'une démonstration de $\neg\Delta_T^R$, et donc $\mathcal{P}_0 \vdash P_T(\#\neg\Delta_T^R, e)$. De plus, T étant consistante, pour tout entier naturel e' on a $\mathcal{P}_0 \vdash \neg P_T(\#\Delta_T^R, e')$.Comme les entiers naturels forment un ségment initial dans tout modèle de $\mathcal{P}_0$, il résulte que

$$\mathcal{P}_0 \vdash \forall y (P_T(\#\Delta_T^R, y) \implies \exists z \leq y\, \exists u (P_T(u,z) \wedge \mathcal{N}(\#\Delta_T^R, u))).$$

2. Comme ce dernier énoncé est logiquement équivalent à $\neg h_T^R(\#\Delta_T^R)$, on déduit de la première partie que si $T \vdash \neg\Delta_T^R$, alors $\mathcal{P}_0 \vdash \Delta_T^R$, contradiction.
   Maintenant, on suppose que $T \vdash \Delta_T^R$. C'est un argument tout à fait similaire qui mène à une contradiction. Le voici.
   Il existe un entier naturel e tel que $\mathcal{P}_0 \models P_T(\#\Delta_T^R, e)$. Comme T est consistante, on a $\mathcal{P}_0 \models \neg P_T(\#\neg\Delta_T^R, e')$ pour tout entier naturel e'. Comme T contient $\mathcal{P}_0$, on a également $T \models P_T(\#\Delta_T^R, e)$ et $T \models \neg P_T(\#\neg\Delta_T^R, e')$ pour tout entier e'. Par ailleurs $T \vdash \neg h_T^R(\#\Delta_T^R)$. Il suffit d'expliciter cette dernière formule pour voir que c'est une contradiction.