Logique (F. Loeser)
Examen du 21 janvier 2008

Les documents ne sont pas autorisés. Durée : 3h

Exercice 1

Soient α et β deux ordinaux. On identifie les fonctions $f : \beta \to \alpha$ et les β-suites $(a_\gamma)_{\gamma<\beta}$ d'éléments de α par $(a_\gamma)_{\gamma<\beta} = (f(\gamma))_{\gamma<\beta}$. Un sous-ensemble C de α est non borné si pour tout $a \in \alpha$ il existe $b \in C$ avec $b > a$. Une β-suite $(a_\gamma)_{\gamma<\beta}$ d'éléments de α est non bornée dans α si l'ensemble des a_γ est non borné.

a) Soit κ un cardinal. Montrer que κ est régulier si et seulement toutes les β-suites d'éléments de κ avec $\beta < \kappa$ sont bornées.

On suppose maintenant que κ est un cardinal régulier non dénombrable. Soit C un sous-ensemble non borné de κ. On dit que C est fermé si pour toute β-suite $(a_\gamma)_{\gamma<\beta}$ strictement croissante d'éléments de C, avec $\beta < \kappa$, $\lim\limits_{\gamma\mapsto\beta} a_\gamma := \sup a_\gamma$ appartient à C. On dira alors que C est nbf.

b) Montrer que si C et D sont nbf alors $C \cap D$ est nbf. [On pourra introduire une suite strictement croissante $(\alpha_i)_{i<\omega}$ convenable, avec $\alpha_i \in C$ pour i pair et $\alpha_i \in D$ pour i impair.] L'hypothèse κ non dénombrable est-elle nécessaire ?

c) Soit $(C_\alpha)_{\alpha<\beta}$ une famille de parties nbf avec $\beta < \kappa$. Montrer que $\cap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ est également nbf. [On pourra se ramener au cas où la suite des C_α est décroissante pour l'inclusion.]

d) Soit E l'ensemble des ordinaux $\alpha < \kappa$ de cofinalité ω. Montrer que $E \cap C \neq \emptyset$ pour toute partie C nbf de κ.

e) Soit $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ une famille de parties nbf. On pose

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \cap_{\alpha<\xi} C_\alpha\}.$$

Montrer que $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ est également nbf.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Pour tout entier i on note φ_i^1 la fonction partielle $x \mapsto \varphi^1(i, x)$ avec les notations du cours.

a) Pour tout entier p, on note Z_p l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi_n^1(n)$ soit défini et $\varphi_n^1(n) = p$. Montrer que Z_p est récursivement énumérable.

b) A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbb{N}$, A et B, tels que $A \cap B = \emptyset$ et tels qu'il n'existe aucun sous-ensemble récursif C de $\mathbb{N}$ tel que $A \subset C$ et $C \cap B = \emptyset$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

On considère le langage $\mathcal{L}_0 = \{0, S, +, \times\}$ de l'arithmétique. Par modèle de l'arithmétique on entendra $\mathcal{L}_0$-structure satisfaisant les axiomes de Peano (forts).

a) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle non standard de l'arithmétique. Soit $\vartheta(x, y)$ une formule et soit $a \in M$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{M} \models \vartheta(\underline{n}, a).$$

Montrer qu'il existe $x \in M$ non standard tel que

$$\mathfrak{M} \models \vartheta(x, a).$$

b) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle non standard de l'arithmétique et soit $\eta(x, y)$ une formule avec deux variables libres. On note $S_\eta(\mathfrak{M})$ l'ensemble des $A \subset \mathbb{N}$ tels qu'il existe $a \in M$ tel que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{M} \models \eta(\underline{n}, a)\}.$$

On note $S(\mathfrak{M})$ la réunion des $S_\eta(\mathfrak{M})$, η parcourant l'ensemble des formules avec deux variables libres. Soit $\eta_0(x, y)$ une formule telle que pour toute paire d'ensemble finis disjoints A et B contenus dans $\mathbb{N}$, l'énoncé

$$\exists x(\wedge_{i \in A} \eta_0(i, x) \wedge \wedge_{j \in B} \neg \eta_0(j, x))$$

est démontrable à partir des axiomes de Peano. Montrer en utilisant la question précédente avec ϑ convenablement choisie que $S_{\eta_0}(\mathfrak{M}) = S(\mathfrak{M})$.

c) Montrer qu'il existe une Σ_1-formule η_0 avec deux variables libres telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'énoncé

$$\eta_0(\underline{n}, x) \iff \exists y(\underline{\pi(n)} \times y = x)$$

est satisfait dans tous les modèles de l'arithmétique. Ici $\pi(n)$ désigne le $n + 1$-ème nombre premier. Montrer que $S_{\eta_0}(\mathfrak{M}) = S(\mathfrak{M})$.

d) Dans cette question on veut montrer que si $\mathfrak{M}$ est un modèle non standard de l'arithmétique, alors $S(\mathfrak{M})$ contient un ensemble non récursif. On considère des ensembles A et B comme dans l'exercice 2. Montrer qu'il existe des formules $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ avec quantificateurs bornés tels que dans $\mathbb{N}$, A soit définit par la formule $\exists y \alpha(x, y)$ et B par la formule $\exists y \beta(x, y)$. Montrer que pour tout entier k,

$$\mathfrak{M} \models \forall x, y, z < \underline{k} \neg(\alpha(x, y) \wedge \beta(x, y)),$$

et qu'il existe $\zeta \in M$ non standard tel que

$$\mathfrak{M} \models \forall x, y, z < \zeta \neg(\alpha(x, y) \wedge \beta(x, y)).$$

En déduire, à l'aide de l'exercice 2, que $S(\mathfrak{M})$ contient un ensemble non récursif.

e) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle dénombrable de l'arithmétique. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to M$ une bijection. On pose $x +' y := \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$, $x \times' y := \varphi^{-1}(\varphi(x) \times \varphi(y))$. On dit que $\mathfrak{M}$ est récursif s'il existe une bijection φ telle que les fonctions $+'$ et $\times'$ soient récursives. On suppose que $\mathfrak{M}$ est récursif. Pour c fixé dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ donée par $f(n, m) = 1$ si $m +' \cdots +' m(\pi(n)\text{fois}) = c$ et $f(n, m) = 0$ sinon, est récursive. En déduire que $S(\mathfrak{M})$ ne contient que des ensembles récursifs. Conclusion : il n'existe pas de modèle non standard récursif de l'arithmétique. C'est le théorème de Tennenbaum.