Examen du Cours de logique

3 heures, 26 janvier 2010

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Théorème de plongement)
On se donne deux langages $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}$-théorie T. On considère la $\mathcal{L}'$-théorie $T'_\forall$ (notée $T_\forall$ quand $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$) des conséquences universelles de T dans le langage $\mathcal{L}'$, c.-à-d. l'ensemble des $\mathcal{L}'$-énoncés universels φ' tels que $T \vdash \varphi'$.
Le but de l'exercice est de montrer qu'une $\mathcal{L}'$-structure $\mathfrak{M}'$ se plonge dans (le réduit au langage $\mathcal{L}'$ d') un modèle de T si et seulement si $\mathfrak{M}' \models T'_\forall$.

1. Montrer que la condition énoncée ci-dessus pour que $\mathfrak{M}'$ se plonge dans un modèle de T est bien nécessaire.
2. Soit $\mathfrak{M}'$ une $\mathcal{L}'$-structure qui n'admet pas de plongement dans un modèle de T.
   (a) Que peut-on dire sur $T \cup \Delta(\mathfrak{M}')$, où $\Delta(\mathfrak{M}')$ désigne le diagramme simple de $\mathfrak{M}'$?
   (b) Montrer qu'il existe un $\mathcal{L}'_{M'}$-énoncé sans quanteurs qui est conséquence de T et n'est pas satisfait par $\mathfrak{M}'$.
   (c) Conclure.
3. Application. On dit qu'un groupe $G = (G, \circ, i, e)$ est *ordonnable à gauche* s'il existe un ordre total $<$ sur G tel que $x < y$ entraîne $g \circ x < g \circ y$ pour tout $x, y, g \in G$. Soit $\mathcal{L}_{gp} = \{\circ, i, e\}$ le langage des groupes (i étant la fonction inverse et e la constante pour l'élément neutre). Montrer que la classe des groupes ordonnables à gauche est axiomatisable par une $\mathcal{L}_{gp}$-théorie universelle T_{ord}.
4. Une $\mathcal{L}$-théorie T est *préservée par sous-structure* si toute sous-structure d'un modèle de T est encore un modèle de T. Montrer qu'une théorie T est préservée par sous-structure si et seulement si elle est équivalente à une théorie universelle. [Deux théories sont dites équivalentes si elles ont les mêmes conséquences ; une théorie est universelle si elle est formée d'énoncés universels].

Exercice 2 (Récursivité)
Dans tout l'exercice, $\mathcal{L} = \{0, S, +, \times\}$ désigne le langage de l'arithmétique.

1. Montrer qu'un ensemble $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ est récursif si et seulement s'il existe une fonction récursive (totale) $f \in \mathcal{F}_1$ qui est croissante et dont l'image est égale à X.
2. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. Montrer que T est récursivement axiomatisable si et seulement si $\#\mathrm{Th}(T)$ est récursivement énumérable.
3. Montrer que $\Phi = \{\#\varphi \mid \varphi \text{ est un } \mathcal{L}\text{-énoncé satisfaisable}\}$ n'est pas récursivement énumérable.
4. Soit $\Phi_m = \Big\{\#\varphi \mid \varphi \text{ est un } \mathcal{L}\text{-énoncé satisfaisable par une } \mathcal{L}\text{-structure de domaine } \{0, \ldots, m-1\}\Big\}$, où $m \geq 1$ est un entier. Montrer que Φ_m est primitif récursif.

(*) On considère $\Phi_{\text{fini}} = \{\#\varphi \mid \varphi \text{ est un } \mathcal{L}\text{-énoncé satisfaisable par une } \mathcal{L}\text{-structure finie}\}$. En utilisant la partie précédente et un codage convenable, montrer que Φ_{fini} est récursivement énumérable.
[Indication : On pourra coder les ensembles héréditairement finis dans $\omega = \mathbb{N}$. Pour cela, on construira une bijection $V_\omega \to \omega$, $x \mapsto \ulcorner x \urcorner$, par induction sur le rang : on pose $\ulcorner \emptyset \urcorner = 0$, puis, pour $x \in V_{n+1} \setminus V_n$, on pose $\ulcorner x \urcorner = \sum_{y \in x} 2^{\ulcorner y \urcorner}$. On notera par exemple que la fonction qui à n associe $\ulcorner V_n \urcorner$ et l'ensemble $\{(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner y \urcorner) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in y\}$ sont p.r.]

Exercice 3 (Ordinal de Hartogs et axiome du choix)
On se place dans un modèle de ZF.

1. Soit X un ensemble. Montrer que la classe des ordinaux α admettant une injection $j : \alpha \hookrightarrow X$ est un ensemble puis montrer que c'est un ordinal (l'ordinal de Hartogs de X).
2. A l'aide de la question précédente montrer que dans ZF l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant : "si X et Y sont des ensembles alors X admet une injection dans Y ou Y admet une injection dans X".

Exercice 4 (Théorème des zéros de Hilbert)
Soit k un corps algébriquement clos. On considère la propriété suivante notée $A(k)$: pour tout entier n et toute famille f_i, $1 \leq i \leq m$, de polynômes dans $k[x_1, \cdots, x_n]$, si les f_i n'ont pas de zéro communs dans k^n, alors il existe g_1, ..., g_m dans $k[x_1, \cdots, x_n]$ tels que $1 = \sum_{1 \leq i \leq m} g_i f_i$.

1. Montrer que s'il existe un cardinal λ tel que $A(k)$ est satisfait pour tout corps algébriquement clos de cardinal $\geq \lambda$ alors $A(k)$ est satisfait pour tout corps algébriquement clos.
2. Soit k un corps algébriquement clos. Soit L un corps contenant strictement k. Montrer que L est un k-espace vectoriel de dimension $\geq \mathrm{card}(k)$. [On pourra considérer $x \in L \setminus k$ et les $\frac{1}{x-a}$, $a \in k$.]
3. Soit k un corps algébriquement clos. Soit I un idéal de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Que peut-on dire de la dimension du k-espace vectoriel $k[x_1, \cdots, x_n]/I$?
4. Soit k un corps quelconque. On rappelle que pour tout idéal maximal M de $k[x_1, \cdots, x_n]$ l'anneau $L_M = k[x_1, \cdots, x_n]/M$ est un corps et que l'application canonique $k \to L_M$ obtenue en composant l'inclusion canonique $k \to k[x_1, \cdots, x_n]$ avec le morphisme canonique $k[x_1, \cdots, x_n] \to L_M$ identifie k à un sous-corps de L_M. On admet que pour tout corps k la propriété $A(k)$ est entraînée par la propriété $B(k)$: "pour tout idéal maximal M de $k[x_1, \cdots, x_n]$, l'inclusion $k \to L_M$ est un isomorphisme". [Cette implication est très facile à démontrer.] Déduire de ce qui précède que $A(k)$ est satisfaite pour tout corps algébriquement clos k.