Examen du Cours de logique

26 janvier 2011, durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

Le sujet est trop long. Je n'attends pas que vous traitiez tous les exercices.

Exercice 1 (Théorie des ensembles)

I) Cardinaux inaccessibles

On rappelle qu'un cardinal κ est dit *inaccessible* si : (i) $\kappa > \aleph_0$, (ii) κ est régulier, (iii) κ est fortement limite, c'est-à-dire que pour tout $\lambda < \kappa$, on a $2^\lambda < \kappa$.

1. Quel est le plus petit cardinal fortement limite $> \aleph_0$? Est-il inaccessible ?
2. Montrer que pour tout cardinal λ, il existe un cardinal $\kappa \geq \lambda$ tel que $\kappa = \aleph_\kappa$.
3. Montrer que si κ est inaccessible, alors $\kappa = \aleph_\kappa$.
4. Quel est le plus petit cardinal κ vérifiant $\kappa = \aleph_\kappa$?

II) Cardinaux faiblement compacts.

Si X est un ensemble infini, on note $[X]^2 = \{\{a, b\} : a, b \in X, a \neq b\}$ l'ensemble des parties à deux éléments de X.

Pour λ, κ deux cardinaux infinis, on note $\kappa \to (\lambda)^2_2$ si pour toute fonction $f : [\kappa]^2 \to \{0, 1\}$, il existe un sous-ensemble $H \subseteq \kappa$ de cardinalité λ tel que f soit constante sur $[H]^2$. (On dit que H est *homogène* pour f).

1. Soient $\lambda' \leq \lambda$ et $\kappa \leq \kappa'$ des cardinaux infinis, montrer que $\kappa \to (\lambda)^2_2$ implique $\kappa' \to (\lambda')^2_2$.
2. On note $<_\mathbb{R}$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. On fixe une bijection $\sigma : 2^{\aleph_0} \to \mathbb{R}$.
   On considère $f : [2^{\aleph_0}]^2 \to \{0, 1\}$ définie comme suit :
   Pour $\alpha < \beta$, on pose $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$ si $\sigma(\alpha) <_\mathbb{R} \sigma(\beta)$ et $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$ sinon.
   Montrer qu'il n'existe pas de $H \subseteq 2^{\aleph_0}$ de cardinalité $\aleph_1$ homogène pour f.
   Ceci prouve donc $2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1)^2_2$.
   On admettra qu'on peut généraliser ce résultat en montrant que pour tout cardinal κ, $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$. (Il suffit de prendre à la place de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions de κ dans $\{0, 1\}$ ordonnés lexicographiquement. On ne demande pas de le faire.).
3. Montrer que si κ satisfait $\kappa \to (\kappa)^2_2$, alors κ est inaccessible.

Exercice 2 (Décidabilité)

Soit $\mathcal{L}$ un langage fini et T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et *décidable*. (On suppose que l'on a codé les $\mathcal{L}$-formules par les entiers).

On pose $C(T) := \{T' \supseteq T \mid T' \text{ est une } \mathcal{L}\text{-théorie complète}\}$ et $C_d(T) := \{T' \in C(T) \mid T' \text{ est décidable}\}$.

Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $C(T)$ est fini, alors toute complétion de T est décidable, c'est-à-dire $C_d(T) = C(T)$.
2. $C_d(T) \neq \emptyset$ (T admet une complétion décidable.)
3. $\text{card}(C_d(T)) = \min(\text{card}(C(T)), \aleph_0)$.
4. Pour tout cardinal κ avec $1 \leq \kappa \leq \aleph_0$, il existe un langage $\mathcal{L}$ fini et une $\mathcal{L}$-théorie T_κ consistante et décidable telle que $\text{card}(C_d(T_\kappa)) = \kappa$. [Indication : On pourra considérer les corps algébriquement clos.]

Exercice 3 (Théorie des modèles)
Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et $\pi = \pi(v_1, \ldots, v_n)$ un ensemble de $\mathcal{L}$-formules dont les variables libres sont parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. On dit que π est un *n-type partiel (dans T)* si pour toute partie finie $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ de π, la théorie $T \cup \{\exists \overline{v} \bigwedge_{i=1}^k \phi_i\}$ est consistante.

- On dit qu'un modèle $\mathfrak{M}$ de T *réalise* π s'il existe $\overline{a} \in M^n$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi[\overline{a}]$ pour tout $\phi \in \pi$; sinon, on dit que $\mathfrak{M}$ *omet* π.
- π est dit *isolé* s'il existe une formule $\phi = \phi(v_1, \ldots, v_n)$ avec $T \cup \{\exists \overline{v} \phi\}$ consistante et telle que $T \vdash \forall \overline{v}(\phi \to \psi)$ pour toute formule $\psi \in \pi$.

Dans cet exercice, on se propose de montrer le

Théorème d'omission des types :

Soit $\mathcal{L}$ dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. On suppose que, pour $j \in \mathbb{N}$, $\pi_j = \pi(v_1, \ldots, v_{n_j})$ est un type partiel non-isolé. Alors il existe un modèle (dénombrable) de T qui omet tous les π_j.

Dans ce qui suit, on suppose que T et $(\pi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont comme dans l'énoncé du théorème. On se donne $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de nouvelles constantes, et on pose $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup C$.

1. Soit $\psi(v_0)$ une $\mathcal{L}^*$-formule, et soit $T' \supseteq T$ une $\mathcal{L}^*$-théorie consistante telle que $T' \setminus T$ soit fini. Montrer qu'il existe $c \in C$ tel que $T'' = T' \cup \{\exists v_0 \psi \to \psi(c)\}$ soit consistante.
2. Soit $\overline{c} = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{n_j}})$ un n_j-uplet de constantes 2 à 2 distinctes de C, et soit $T' \supseteq T$ une $\mathcal{L}^*$-théorie consistante, avec $T' \setminus T$ finie. Montrer qu'il existe $\phi \in \pi_j$ telle que $T'' = T' \cup \{\neg\phi(\overline{c})\}$ soit consistante.
   [Indication : On pourra utiliser que, à équivalence logique près, T' est donnée par $T \cup \{\chi(\overline{c}, \overline{d})\}$, où $\chi(\overline{x}, \overline{y})$ est une $\mathcal{L}$-formule et $\overline{d}$ un uplet de constantes de C qui est disjoint de $\overline{c}$.]
3. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}^*$-théorie consistante $T^* \supseteq T$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :
   (H) Pour toute $\mathcal{L}^*$-formule $\psi(v_0)$ il existe une constante $c \in C$ qui n'apparaît pas dans ψ et telle que $\exists v_0 \psi \to \psi(c) \in T^*$.
   (O) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout n_j-uplet $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_{n_j}})$ de constantes 2 à 2 distinctes de C il existe une formule $\phi(\overline{v}) \in \pi_j$ telle que $\neg\phi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_{n_j}}) \in T^*$.

   [Indication : En utilisant des énumérations convenables, on pourra construire T^* comme union d'une chaîne croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $T_0 = T$ et $T_n \setminus T$ finie pour tout n.]
4. Soit T^* une $\mathcal{L}^*$-théorie satisfaisant à la propriété (H). Montrer :
   - Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $X_i = \{j \in \mathbb{N} \mid T^* \vdash c_i = c_j\}$ est infini.
   - Si $\mathfrak{M}^* \models T^*$, alors $\{c^{\mathfrak{M}^*} \mid c \in C\}$ est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}^*$.
5. Conclure.

Exercice 4 (Extensions terminales en arithmétique de Peano)
Dans cet exercice, on admettra le Théorème d'omission de types tel qu'énoncé à l'exercice précédent. Les deux exercices peuvent néanmoins se traiter indépendamment.
On note $\mathcal{L}_{ar}$ le langage de l'arithmétique de Peano. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant (dû à MacDowell et Specker) :

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle dénombrable de l'arithmétique de Peano $\mathcal{P}$. Alors il existe une extension élémentaire propre $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{N}$ soit une extension terminale *de $\mathfrak{M}$: pour tout $m \in M$ et tout $n \in N \setminus M$ on a $\mathfrak{N} \models m < n$.*

1. Montrer que le *principe des tiroirs* est vrai dans tout modèle $\mathfrak{M}$ de l'arithmétique de Peano : Si $\theta(v, z)$ est une $\mathcal{L}_{ar}(M)$-formule, alors pour tout $a \in M$ on a

$$\mathfrak{M} \models [\forall x \exists z > x \, \exists v < a \, \theta(v, z)] \to \exists v < a \, \forall x \exists z > x \, \theta(v, z).$$

2. Soit $\mathfrak{M} \models \mathcal{P}$. Soit c une constante qui n'est pas dans $\mathcal{L}_{ar}(M)$. On pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ar}(M) \cup \{c\}$, et on considère la $\mathcal{L}$-théorie $T := D(\mathfrak{M}) \cup \{c > m \mid m \in M\}$, où $D(\mathfrak{M})$ désigne le diagramme complet de $\mathfrak{M}$.
   (a) Observer que T est consistante.
   (b) Soit $a \in M$, et soit $\theta(v, z)$ une $\mathcal{L}(M)$-formule telle que $T \vdash \forall v(\theta(v, c) \rightarrow v < a)$ et telle que $T \cup \{\exists v \theta(v, c)\}$ soit consistante.
   Montrer qu'il existe $m \in M$ avec $m < a$ et telle que $\mathfrak{M} \models \forall x \exists z > x\, \theta(m, z)$.
   (c) Soit $a \in M$ un élément non-standard. On considère l'ensemble de formules
   $$\pi_a(v) := \{v < a\} \cup \{v \neq m \mid m \in M\}.$$
   Montrer que π_a est un 1-type non-isolé dans T. [Ces notions sont définies dans l'exercice 3.]
3. Conclure.