Logique (F. Loeser)

Partiel du 26 novembre 2007

Les documents ne sont pas autorisés. Durée : 2 h

Exercice 1

On dit qu'une suite croissante d'ordinaux $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un ordinal α si α est égal à la réunion des α_n.

a) Montrer que si α est un ordinal dénombrable, alors ω^α est dénombrable. En déduire que la suite $\omega_0 = 1$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$ converge vers un ordinal ε_0. Calculer ω^{ε_0}. L'ordinal ε_0 est-il dénombrable ?

b) Montrer que tout ordinal $\lambda < \varepsilon_0$ admet une écriture unique

$$(*) \qquad \lambda = \omega^{\lambda_1} + \cdots + \omega^{\lambda_m}$$

avec $\lambda > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$.

c) Soit λ un ordinal **limite** $< \varepsilon_0$. On pose $\beta = \omega^{\lambda_1} + \cdots + \omega^{\lambda_{m-1}}$ de sorte que $(*)$ se réécrive $\lambda = \beta + \omega^{\lambda_m}$. Pour n un entier on pose $\{\lambda\}(n) = \beta + \omega^{\lambda_m - 1}n$ si λ_m est un successeur et $\{\lambda\}(n) = \beta + \omega^{\{\lambda_m\}(n)}$ si λ_m est un ordinal limite. On convient que $\{0\}(n) = 0$. Montrer que la suite des $\{\lambda\}(n)$ converge vers λ.

d) Pour $\lambda < \varepsilon_0$, on définit une fonction $H_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante : $H_0(x) = x$, $H_{\lambda+1}(x) = H_\lambda(x+1)$, et $H_\lambda(x) = H_{\{\lambda\}(x)}(x)$ si λ est limite non nul. Montrer que pour tout entier n et tout $\alpha < \varepsilon_0$,

$$H_{\omega^\alpha n}(x) = H^{(n)}_{\omega^\alpha}(x),$$

$H^{(n)}_{\omega^\alpha}$ désignant la n-ième itérée de la fonction H_{ω^α}.

e) On considère la fonction $h_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $h_0(x) = x$ et $h_{n+1} = 2^{h_n}$. Comparer les fonctions $H_{\omega^2 n}$ et h_n. Montrer que $H_{\omega^3}(x) \geq h_x(x)$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Soit L un langage et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des formules de L.

a) Montrer l'existence d'une fonction

$$\varphi : \mathfrak{F} \longrightarrow \{0,1\}$$

telle que $\varphi(F) = 1$ si F commence par un quantificateur existentiel $\exists$, $\varphi(F) = 0$ si F commence par un quantificateur universel $\forall$, si $F = \neg G$, alors $\varphi(F) = 1 - \varphi(G)$ et si $F = (G\alpha H)$ avec $\alpha = \wedge, \vee, \implies$ ou $\iff$, alors $\varphi(F) = \tilde{\alpha}(\varphi(G), \varphi(H))$, avec $\tilde{\alpha} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ correspondant à α.

b) Montrer que si F est un axiome logique, alors $\varphi(F) = 1$.

c) Montrer que si $\varphi(F \implies G) = 1$ et $\varphi(F) = 1$, alors $\varphi(G) = 1$.

d) Montrer qu'il existe des formules démontrables, qui ne sont pas démontrables sans utiliser la règle de généralisation.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

Soit L un langage et $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux L-structures. On écrit $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$ pour exprimer que $\mathfrak{M}_2$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}_1$. Si L' est un langage contenant L et $\mathfrak{N}$ est une L'-structure on notera $\mathfrak{N}^-$ le réduit de $\mathfrak{N}$ à L, c'est à dire $\mathfrak{N}$ considérée comme L-structure. Enfin, si $\mathfrak{M}$ est une L-structure, on note $D(\mathfrak{M})$ le diagramme complet de $\mathfrak{M}$. Rappelons si $L_{\mathfrak{M}}$ désigne le langage obtenu en ajoutant à L un symbole de constante $\underline{a}$ pour chaque élément a de M, $\mathfrak{M}$ s'enrichit naturellement en une $L_{\mathfrak{M}}$-structure $\mathfrak{M}^*$. Le diagramme $D(\mathfrak{M})$ est égal à la théorie complète de $\mathfrak{M}^*$, c'est à dire à l'ensemble des $F[\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}]$, pour $F[v_1, \cdots, v_n]$ formule de L, $(a_1, \cdots, a_n) \in M^n$, avec $\mathfrak{M} \models F[a_1, \cdots, a_n]$.

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant (Lemme de Robinson). Si T est une théorie complète (en particulier consistante) dans un langage L, si L_1 et L_2 sont deux langages contenant chacun L et d'intersection L, et si T_1 et T_2 sont des théories respectivement des langages L_1 et L_2, chacune consistante et contenant T, alors la théorie $T_1 \cup T_2$ dans le langage $L_1 \cup L_2$ est consistante.

a) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T. Montrer que la théorie $T_2 \cup D(\mathfrak{M})$ dans le langage $L_2 \cup L_{\mathfrak{M}}$ est consistante. Pour cela on pourra démontrer que sinon il existe $F[\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}]$ dans $D(\mathfrak{M})$ tel que $T_2 \models \neg F[\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}]$ et aboutir à une contradiction en utilisant que les $\underline{a_i}$ n'appartiennent pas à L_2. En déduire l'existence d'un modèle $\mathfrak{N}$ de T_2 tel que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}^-$.

b) Soit $\mathfrak{N}_1$ un modèle de T_1 tel que $\mathfrak{N}_1^- \prec \mathfrak{M}$. Montrer que la théorie $T' = D(\mathfrak{N}_1) \cup D(\mathfrak{M})$ dans le langage $L_1 \cup L_{\mathfrak{M}}$ est consistante [on pourra à nouveau raisonner par l'absurde et supposer l'existence d'une formule de $D(\mathfrak{M})$ contradictoire avec $D(\mathfrak{N}_1)$]. En déduire l'existence d'une L_1-structure $\mathfrak{N}_2$ avec $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}_2^-$.

c) Montrer l'existence pour tout $i \geq 1$ de L_1-structures $\mathfrak{N}_i$ et de L_2-structures $\mathfrak{N}'_i$ telles que pour tout i, $\mathfrak{N}_i$ soit un modèle de T_1, $\mathfrak{N}'_i$ soit un modèle de T_2, $\mathfrak{N}_i \prec \mathfrak{N}_{i+1}$, $\mathfrak{N}'_i \prec \mathfrak{N}'_{i+1}$, $\mathfrak{N}_i^- \prec \mathfrak{N}_i'^-$ et $\mathfrak{N}_i'^- \prec \mathfrak{N}_{i+1}^-$.

d) Conclure.