Partiel du Cours de logique

2 heures, 1$^{\text{er}}$décembre 2008

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Cardinaux)

1. Soit κ un cardinal infini, s'écrivant comme somme ordinale $\kappa = \alpha+\beta$ de deux ordinaux α et β. Montrer que $\kappa = \alpha$ ou $\kappa = \beta$.
2. Pour un ordinal γ, on pose $\mathrm{Lim}(\gamma) = \{\alpha \in \gamma \,|\, 0 \neq \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$. Montrer que pour tout cardinal $\kappa > \aleph_0$ on a $\kappa = \mathrm{card}(\mathrm{Lim}(\kappa))$.
3. Montrer qu'il existe un ordinal $0 < \alpha < \aleph_1$, α limite, tel que $(\mathrm{Lim}(\alpha), <) \simeq (\alpha, <)$.
4. Pour tout cardinal κ on note $\mathrm{Card}(\kappa) = \{\alpha \in \kappa \,|\, \alpha \text{ est un cardinal}\}$. Calculer $\mathrm{card}(\mathrm{Card}(\aleph_\alpha))$, α étant un ordinal. Montrer qu'il existe un cardinal infiniκ tel que $\mathrm{card}(\mathrm{Card}(\kappa)) = \kappa$.
5. Montrer qu'il existe un cardinal infini κ tel que $\mathrm{card}(\mathrm{Card}(\kappa)) = \kappa$ et tel que de plus $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$.

Exercice 2 (Ordres denses sans extrémités)

1. On considère le langage (égalitaire) $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$. Donner les axiomes des ordres stricts totaux denses sans plus grand ni plus petit élément. (Rappelons qu'un ordre total $(M, <)$ est dense si pour tout $m \in M$ on a $m = \sup\{n \in M \,|\, n < m\} = \inf\{n \in M \,|\, n > m\}$.) On note OD la $\mathcal{L}_{ord}$-théorie obtenue.
2. Donner un modèle de OD.
3. Montrer que OD n'a pas de modèle fini.
4. Soient $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ des modèles de OD et $A \subseteq \mathfrak{M}$, $A' \subseteq \mathfrak{M}'$ des sous-structures finies. Soit $f : A \to A'$ un $\mathcal{L}_{ord}$-isomorphisme (c.à.d. une bijection qui préserve l'ordre) et $b \in M$. Montrer que f se prolonge en un isomorphisme avec domaine $A \cup \{b\}$ et image contenue dans M'.
5. [$\aleph_0$-catégoricité] Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux modèles de OD de cardinal $\aleph_0$, construire par récurrence un isomorphisme entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.
6. Montrer que OD élimine les quantificateurs.
7. En déduire que $(\mathbb{Q}, <)$ est une sous-structure élémentaire de $(\mathbb{R}, <)$.
8. Montrer que OD est complète.

Exercice 3 (Ordres denses (suite))
Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_{\mathbb{N}}$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}_{ord}$ une infinité de constantes $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pour $I \subseteq \mathbb{N}$, soit $\mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_{ord} \cup \{c_i \,|\, i \in I\}$, et OD_I la $\mathcal{L}'_I$-théorie obtenue en ajoutant à OD les axiomes $c_i < c_{i+1}$ pour $i \in I$.

1. Montrer que, pour tout $I \subseteq \mathbb{N}$ fini, OD_I est une théorie complète. On pourra remarquer que la preuve de la question 4 de l'exercice précédent reste valable si l'on remplace $\mathcal{L}_{ord}$ par $\mathcal{L}'_I$.
2. Montrer que $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ est une théorie complète.
3. Soit $\mathfrak{M} \models \mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$, et soit $B(\mathfrak{M})$ la sous-structure de $\mathfrak{M}$ avec ensemble de base $\{m \in M \,|\, \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } m < c_n^{\mathfrak{M}}\}$. Montrer que $B(\mathfrak{M})$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$.
4. Soient $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ deux modèles dénombrables de $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$. Montrer que $B(\mathfrak{M})$ et $B(\mathfrak{N})$ sont isomorphes. [Un isomorphisme entre deux structures est une bijection respectant les interprétations.]
5. Montrer que la théorie $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ possède exactement trois modèles dénombrables à isomorphisme près.

Solution 1 1. Comme $\alpha+\beta=\kappa$, il existe une bijection entre $\alpha\dot\cup\beta$ et κ, d'où $\kappa=\max\{\mathrm{card}(\alpha),\mathrm{card}(\beta)\}$. On a clairement $\alpha,\beta\leq\kappa$. De plus, $\gamma\geq\mathrm{card}(\gamma)$ est vrai pour tout ordinal γ. Donc,

$$\kappa=\max\{\mathrm{card}(\alpha),\mathrm{card}(\beta)\}\leq\max\{\alpha,\beta\}\leq\kappa.$$

2. Tout ordinal α s'écrit (de manière unique) comme $\alpha=\lambda+n$, avec λ limite (ou 0) et $n\in\omega$. On en déduit qu'il existe une injection de α dans $\mathrm{Lim}^0(\alpha)\times\omega$, où $\mathrm{Lim}^0(\alpha)=\mathrm{Lim}(\alpha)\cup\{0\}$. En particulier $\kappa\leq\mathrm{card}(\mathrm{Lim}^0(\kappa)\times\omega)=\mathrm{card}(\mathrm{Lim}^0(\kappa))\cdot\mathrm{card}(\omega)=\mathrm{card}(\mathrm{Lim}^0(\kappa))\cdot\aleph_0\leq\max\{\mathrm{card}(\mathrm{Lim}^0(\kappa)),\aleph_0\}\leq\kappa$. Comme $\kappa>\aleph_0$, cela montre $\kappa=\mathrm{card}(\mathrm{Lim}^0(\kappa))=\mathrm{card}(\mathrm{Lim}(\kappa))$.
3. L'application $f:\omega^\omega\to\omega^\omega$, $\alpha\mapsto\omega\cdot(\alpha+1)$ est un isomorphisme entre $(\omega^\omega,<)$ et $(\mathrm{Lim}(\omega^\omega),<)$. (La preuve est facile. Il sufit d'utiliser la division euclidienne.)

   Donnons un autre argument : soit $\alpha_0\in\aleph_1$ quelconque et soit α_1 l'unique ordinal limite tel que $(\mathrm{Lim}(\alpha_1),<)\simeq(\alpha_0,<)$. Par la partie 2, on a $\alpha_1<\aleph_1$ et on peut continuer. Si $\alpha_n<\aleph_1$ est défini, soit α_{n+1} l'unique ordinal limite ($<\aleph_1$) tel que $(\mathrm{Lim}(\alpha_{n+1}),<)\simeq(\alpha_n,<)$. Il suffit de poser $\alpha:=\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n$.

   Notons que les parties 4 et 5 admettent (trivialement) la solution $\kappa=\aleph_0$. Lors du partiel, nous avons précisé que ce serait mieux de donner un cardinal κ non dénombrable qui satisfait la propriété en question.
4. On a $\mathrm{card}(\mathrm{Card}(\aleph_\alpha\setminus\aleph_0))=\mathrm{card}(\alpha)$ et comme la réunion d'un ensemble de cardinaux est un cardinal, on a de plus que $\aleph_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\aleph_\alpha$ pour tout ordinal limite λ.

   On définit, par induction, une suite $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ de cardinaux. Soit $\kappa_0:=\aleph_0$, puis $\kappa_{n+1}:=\aleph_{\kappa_n}$. On pose $\kappa:=\bigcup_{n\in\omega}\kappa_n$. Alors $\kappa=\bigcup_{n\in\omega}\kappa_n=\bigcup_{n\in\omega}\aleph_{\kappa_n}=\aleph_\kappa$, d'où $\kappa=\mathrm{card}(\mathrm{Card}(\kappa))$.
5. Considérons le cardinal κ que nous venons de construire. Évidemment, on a $\mathrm{cf}(\kappa)=\aleph_0$, et donc $\kappa^{\aleph_0}>\kappa$ par le Lemme de König.

Solution 2 1. Les ordres stricts totaux s'axiomatisent à l'aide de la formule suivante :

$$\varphi\equiv\forall x\forall y\forall z(\neg x<x\wedge(x<y\vee x=y\vee y<x)\wedge((x<y\wedge y<z)\Rightarrow x<z))$$

   Alors OD est axiomatisée par $\varphi\wedge\psi$, où

$$\psi\equiv\forall x\forall y\exists u\exists v\exists w(u<x\wedge x<v\wedge(x<y\Rightarrow(x<w\wedge w<y))).$$

2. Les structures $(\mathbb{Q},<)$ et $(\mathbb{R},<)$ sont des modèles de OD.
3. Un ordre total fini a un plus petit élément.
4. Considérons $f:A=\{a_1,\dots,a_n\}\simeq A'=\{a'_1,\dots,a'_n\}$. On peut supposer que $a_1<a_2<\ldots<a_n$ (ce qui entraîne $a'_1<a'_2<\ldots<a'_n$ via l'isomorphisme f). Soit $b\in M$. Si $b\in A$, il n'y a rien à faire. Si $b<a_1$, il suffit de choisir $b'\in M'$ avec $b'<a'_1$ pour étendre f (b' existe car il n'y a pas de plus petit élément dans M'). On raisonne de la même manière dans le cas $b>a'_n$. Sinon, il existe $1\leq i<n$ tel que $a_i<b<a_{i+1}$. Comme l'ordre sur M' est dense, on trouve $b'\in M'$ avec $a'_i<b'<a'_{i+1}$, ce qui termine la preuve.
5. Supposons maintenant que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont dénombrables, et choisissons des énumérations $M=\{m_i\,|\,i\in\mathbb{N}\}$, $M'=\{m'_i\,|\,i\in\mathbb{N}\}$. À l'aide de la question précédente, nous pouvons construire (par induction) des suites croissantes de sous-structures finies $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{M}$ et $(A'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{M}'$ ainsi que des isomorphismes $f_m:A_m\simeq A'_m$ avec les propriétés suivantes :
   - $m_i\in A_{2i}$ et $m'_i\in A'_{2i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$;
   - si $n\geq m$, alors $f_n\restriction_{A_m}=f_m$

   Notons que toute application entre une sous-structure à un élément $\{a\}\subseteq\mathfrak{M}$ et une sous-structure $\{a'\}\subseteq\mathfrak{M}'$ est un isomorphisme, ce qui garantit que nous pouvons commencer la construction.

   L'application $f:=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}f_m$ est alors un isomorphisme entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$.

6. Soit A une sous-structure commune de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}'$, $\varphi[x, y_1, \ldots, y_n]$ une formule sans quantificateurs, $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $b \in M$ tels que $\mathfrak{M} \models \varphi[b, \overline{a}]$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{M}' \models \exists x \varphi[x, \overline{a}]$. On peut supposer que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, en particulier que A est fini. Par 4. il existe $b' \in M'$ tel que l'application qui est l'identité sur A et qui envoie b sur b' soit un isomorphisme. Donc, l'uplet $(b', a_1, \ldots, a_n)$ satisfait les mêmes formules sans quantificateurs que $(b, a_1, \ldots, a_n)$. En particulier, on a $\mathfrak{M}' \models \varphi[b', \overline{a}']$.
7. On vient de montrer que OD élimine les quantificateurs. On en déduira que tout plongement entre modèles de OD est élémentaire. Pour cela, considérons $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$ avec $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \models \mathsf{OD}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ et $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ une formule. Il faut montrer que $\mathfrak{M} \models \varphi[\overline{a}]$ ssi $\mathfrak{M}' \models \varphi[\overline{a}]$. C'est évident si φ est sans quantificateurs. Or, comme modulo OD toute formule est équivalente à une formule sans quantificateurs, il suffit de vérifier cette propriété pour les formules sans quantificateurs.
8. Comme OD est $\aleph_0$-catégorique et n'a pas de modèle fini, c'est une théorie complète par le critère de Vaught (voir TD, Série 6, Exercice 1). L'argument est comme suit : si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont des modèles de OD, ils (sont donc infinis et) ont des sous-strutures élémentaires dénombrables $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}'$, et on a $\mathfrak{M}_0 \simeq \mathfrak{M}'_0$, d'où $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$, ce qui établit la complétude de OD.

Solution 3 1. Notons d'abord qu'il y a un petit problème avec la première partie de l'exercice. Soit, il faut restreindre l'exercice au cas où I est un *interval*, soit il faut ajouter les axiomes $c_i < c_j$ pour tout $i, j \in I$ avec $i < j$ à la théorie OD pour définir la théorie OD_I.

Soit $= \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$, $i_1 < \ldots < i_n$. Alors OD_I est $\aleph_0$-catégorique, complète et élimine les quantificateurs. En effet, pour des modèles $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ de OD_I, l'application $f_0 : A_0 = \{c_{i_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_{i_n}^{\mathfrak{M}}\} \to \{c_{i_1}^{\mathfrak{M}'}, \ldots, c_{i_n}^{\mathfrak{M}'}\} = A'_0$, $f_0(c_{i_k}^{\mathfrak{M}}) := c_{i_k}^{\mathfrak{M}'}$, est un $\mathcal{L}'_I$-isomorphisme entre les sous-structures $A_0 \subseteq \mathfrak{M}$ et $A'_0 \subseteq \mathfrak{M}'$. Notons que si T est une $\mathcal{L}$-théorie qui élimine les quantificateurs, le langage $\mathcal{L}'$ est obtenu en ajoutant des nouvelles constantes à $\mathcal{L}$ et si $T' \supseteq T$ est une $\mathcal{L}'$-théorie, alors T' élimine les quantificateurs aussi. (Toute $\mathcal{L}'$-formule $\varphi'[\overline{x}]$ est de la forme $\psi[\overline{x}, c_1, \ldots, c_k]$, où $\psi[\overline{x}, y_1, \ldots, y_k]$ est une $\mathcal{L}$-formule. Soit $\chi[\overline{x}, \overline{y}]$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs telle que $T \vdash \forall \overline{x} \forall \overline{y} (\psi \Leftrightarrow \chi)$. Il s'en suit que $T' \vdash \forall \overline{x} (\varphi[\overline{x}] \Leftrightarrow \chi[\overline{x}, c_1, \ldots, c_k])$.)

2. On a $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{OD}_{\{0,\ldots,n\}}$. La théorie $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ est donc une réunion croissante de théories complètes qui éliminent les quantificateurs. On en déduit que $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ est complète et élimine les quantificateurs.
3. Si $\mathfrak{M}$ est un modèle de $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$, alors $B(\mathfrak{M})$ aussi (facile). Nous avons vu que $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ élimine les quantificateurs, d'où $B(\mathfrak{M}) \preccurlyeq \mathfrak{M}$ (on raisonne comme dans Ex. 1(6)).
4. Si $\mathfrak{M}$ est un modèle dénombrable de $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$, alors ses sous-intervals $I_\infty(\mathfrak{M}) := \{m \in M \mid m < c_0^{\mathfrak{M}}\}$ et $I_n(\mathfrak{M}) := \{m \in M \mid c_n^{\mathfrak{M}} < m < c_{n+1}^{\mathfrak{M}}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont tous isomorphes à $(\mathbb{Q}, <)$.

   Si $\mathfrak{M}'$ est un autre modèle dénombrable, l'application qui envoie $c_n^{\mathfrak{M}}$ sur $c_n^{\mathfrak{M}'}$ s'étend donc en un $\mathcal{L}'_{\mathbb{N}}$-isomorphisme entre $B(\mathfrak{M})$ et $B(\mathfrak{M}')$. Pour cela, il suffit de choisir des isomorphismes (d'ensembles ordonnés) $f_p : I_p(\mathfrak{M}) \simeq I_p(\mathfrak{M}')$ pour tout $p \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.
5. Pour déterminer les modèles dénombrables de $\mathsf{OD}_{\mathbb{N}}$ à isomorphie près, on rasionne ainsi. Par ce que nous venons de voir, deux modèles dénombrables $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ seront isomorphes si et seulement si $(M \setminus B(\mathfrak{M}), <)$ et $(M' \setminus B(\mathfrak{M}'), <)$ sont isomorphes. Il y en a trois types à isomorphie près :
   - $M \setminus B(\mathfrak{M} = \emptyset$ (la suite $(c_n^{\mathfrak{M}})_{n \in \mathbb{N}}$ est cofinale)
   - $(M \setminus B(\mathfrak{M}, <)$ a un plus petit élément (la suite $(c_n^{\mathfrak{M}})_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans M). Dans ce cas, $(M \setminus B(\mathfrak{M}), <) \simeq (\mathbb{Q}_{\geq 0}, <)$.
   - $M \setminus B(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$ et il n'y a pas de plus petit élément dans $(M \setminus B(\mathfrak{M}), <)$ (la suite $(c_n^{\mathfrak{M}})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et "irrationnelle", c'est à dire elle n'a pas de limite dans M). Dans ce cas, $(M \setminus B(\mathfrak{M}), <) \simeq (\mathbb{Q}, <)$.

   Remarquons au passage qu'une théorie complète dans un langage dénombrable qui n'est pas $\aleph_0$-catégorique a au moins trois modèles dénombrables non-isomorphes. C'est un théorème de Vaught ("Vaught's Never two").