Partiel du Cours de logique

2,5 heures, 16 novembre 2010

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Analyse de Cantor-Bendixson)
Rappelons que si $X \subseteq \mathbb{R}$, un réel r est un *point d'accumulation de* X si pour tout intervalle ouvert I avec $r \in I$ on a $X \cap I \setminus \{r\} \neq \emptyset$. On note $A(X)$ l'ensemble des points d'accumulation de X, et on observe que X est fermé ssi $A(X) \subseteq X$. Si $A(X) = X$, on dit que X est *parfait.*

1. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ fermé. Par induction sur α, on définit $X^{(\alpha)}$ comme suit :
   $X^{(0)} = X \quad , \quad X^{(\beta+1)} = A(X^{(\beta)}) \quad , \quad X^{(\delta)} = \bigcap_{\beta<\delta} X^{(\beta)}$ pour δ limite.

   Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $X^{(\alpha)}$ est fermé pour tout α, et $\alpha \leq \beta \Rightarrow X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\beta)}$.
   (b) Si $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$, alors $X^{(\alpha)}$ est parfait et $X^{(\alpha)} = X^{(\beta)}$ pour tout $\beta \geq \alpha$.
   (c) Il existe un ordinal $\alpha < \left(2^{\aleph_0}\right)^+$ tel que $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$.

2. Pour une partie fermée $X \subseteq \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{CB}(X) := \min\{\alpha < \left(2^{\aleph_0}\right)^+ \mid X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}\}$, appelé le *rang de Cantor-Bendixson* de X.

   (a) Soient β un cardinal et $f : \omega \to \beta$ une fonction croissante au sens large et cofinale, et soient $X_n \subseteq I_n = \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right]$ des parties fermées telles que $\mathrm{CB}(X_n) = f(n)$ et $X_n^{(f(n))} = \emptyset$. On pose

   $$Y' = [-1, 0] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \quad \text{ et } \quad Y = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

   Montrer que $\mathrm{CB}(Y') = \beta$ si β est limite, et $\mathrm{CB}(Y) = \beta$ et $Y^{(\beta)} = \emptyset$ si β est successeur.
   (b) En déduire que pour tout ordinal dénombrable α il existe X tel que $\mathrm{CB}(X) = \alpha$.
   (c) Montrer que $\mathrm{CB}(X) < \aleph_1$. (Indication : On pourra utiliser que si Y est fermé et $y \in Y \setminus A(Y)$, alors il existe un intervalle $I = (q_1, q_2)$ avec $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $I \cap Y = \{y\}$.)

3. Dans cette dernière partie de l'exercice, on se propose de montrer que l'hypothèse du continu est vraie pour les parties fermées de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathrm{card}(X) = 2^{\aleph_0}$ pour tout fermé $X \subseteq \mathbb{R}$ qui est non dénombrable.

   (a) Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ parfait, $x \in X$ et $a < x < b$. Montrer qu'il existe $I \in \{[a,b], (a,b], [a,b), (a,b)\}$ tel que $I \cap X$ soit parfait. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $X_0, X_1 \subseteq X$ et des $I_i = [a_i, b_i]$, $(i = 0, 1)$, tels que $I_0 \cap I_1 = \emptyset$ et tels que, pour $i = 0, 1$, on ait
   - $b_i - a_i \leq \epsilon$;
   - $X_i \subseteq I_i$;
   - X_i est parfait et non vide.

   (b) Montrer que tout ensemble parfait et non vide est de cardinal $2^{\aleph_0}$. (Indication : En utilisant le résultat précédent, on pourra construire une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans X.)
   (c) Conclure.

Exercice 2
On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +\}$ et la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}; 0, + \rangle$ où 0 et + sont interprétés de manière usuelle. On note $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$. Par ensemble "définissable" on entend une partie de $\mathbb{Z}$ qui est définissable par une $\mathcal{L}$-formule (sans paramètres).

1. (a) On observe que tout modèle de T est un groupe. Montrer qu'il existe un modèle de T qui n'est pas finiment engendré en tant que groupe.
   (b) Montrer que tout modèle $\mathfrak{G} = \langle G; 0, + \rangle$ de T est un groupe abélien sans torsion[1] tel que G/nG est cyclique d'ordre n pour tout $n > 1$.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que la réciproque est vraie : tout groupe abélien sans torsion G tel que G/nG est cyclique d'ordre n pour tout $n > 1$ est modèle de T.
2. (a) Soit $\sigma : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ un automorphisme de $\mathcal{L}$-structure, c'est-à-dire une bijection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$, $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ un ensemble définissable. Montrer que $\sigma(D) = D$.
   (b) Donner un automorphisme différent de l'identité de $\mathfrak{Z}$. En déduire que $\{1\}$ n'est pas définissable.
   (c) Montrer que le groupe abélien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ est un modèle de T. En déduire que $\{-1, 1\}$ n'est pas définissable dans $\mathfrak{Z}$. (On pourra considérer les automorphismes $(a, b) \mapsto (a, b + a)$ et $(a, b) \mapsto (a, b/2)$.)
3. (a) Soit a un élément d'un groupe abélien A et $n \geq 1$ un entier. On dit que n *divise* s'il existe $b \in A$ tel que $nb = a$.
   Soit X un ensemble de nombres premiers. Montrer qu'il existe un modèle de T qui contient un élément a tel que $\{p \text{ premier} \mid p \text{ divise } a\} = X$.
   (b) En déduire qu'il existe $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de T deux-à-deux non isomorphes.
   Peut-on trouver $(2^{\aleph_0})^+$ modèles dénombrables de T deux-à-deux non isomorphes ?

Exercice 3 (Extensions élémentaires et ensembles définissables)
Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Pour une $\mathcal{L}$-formule à une variable libre $\varphi(x)$ on note $\varphi[\mathfrak{M}]$ l'ensemble définissable correspondant dans $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire $\varphi[\mathfrak{M}] = \{a \in M \mid \mathfrak{M} \models \varphi[a]\}$.

1. On suppose que $\varphi[\mathfrak{M}]$ est fini. Montrer que $\varphi[\mathfrak{N}] = \varphi[\mathfrak{M}]$ pour toute extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$.
2. On suppose que $\varphi[\mathfrak{M}]$ est infini. Montrer que pour tout cardinal λ il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ telle que $\mathrm{card}(\varphi[\mathfrak{N}]) \geq \lambda$.
3. Soit $\lambda \geq \sup(\mathrm{card}(M), \mathrm{card}(\mathcal{L}))$ un cardinal. Montrer qu'il existe $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ telle que $\mathrm{card}(\varphi[\mathfrak{N}]) = \lambda$ pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x)$ avec $\varphi[\mathfrak{M}]$ infini.
4. Soit $(\mathfrak{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de $\mathcal{L}$-structures, et soit $\mathfrak{M} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_n$ la réunion des $\mathfrak{M}_n$. Montrer que si $\mathfrak{M}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}_{n+1}$ pour tout n, alors $\mathfrak{M}_n \preccurlyeq \mathfrak{M}$ pour tout n.
5. Soit $\lambda \geq \sup(\mathrm{card}(M), \mathrm{card}(\mathcal{L}))$ un cardinal. Montrer qu'il existe $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ telle que $\mathrm{card}(\varphi[\mathfrak{N}]) = \lambda$ pour toute $\mathcal{L}_N$-formule $\varphi(x)$ avec $\varphi[\mathfrak{N}]$ infini. (Rappelons que $\mathcal{L}_N$ est le langage obtenu en rajoutant à $\mathcal{L}$ des nouveaux symboles de constantes pour les éléments de N.)

[1] Un élément a d'un groupe abélien A est appelé *torsion* s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $na = 0$. On dit que A est *sans torsion* si 0 est son seul élément qui est torsion.