Examen de logique

30 janvier 2009
Durée : 3h. Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Relations d'équivalence emboîtées)
On considère le langage (égalitaire) $\mathcal{L} = \{E_0, E_1\}$, où E_0 et E_1 sont des symboles de relation binaires.

1. Écrire une $\mathcal{L}$-formule φ qui exprime que E_0 et E_1 sont des relations d'équivalence, telles que E_0 soit *plus grossière* que E_1, c'est à dire que toute E_1-classe d'équivalence est contenue dans une seule E_0-classe d'équivalence.
2. Écrire une formule $\psi_n[v]$ à une variable libre v qui exprime que la E_0-classe d'équivalence de v contient au moins n E_1-classes d'équivalences différentes.
3. Soit $p \geq 1$ un entier. Écrire la théorie T_p des relations d'équivalence E_0 et E_1 avec les propriétés suivantes :
   - E_0 est plus grossière que E_1 ;
   - il y a une infinité de E_0-classes d'équivalence ;
   - toute E_0-classe d'équivalence est réunion d'exactement p E_1-classes d'équivalence ;
   - toute E_1-classe d'équivalence est infinie.
4. Soit $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On interprète E_0 par : $E_0^{\mathfrak{M}}(a,b)(c,d)$ si et seulement si $a = c$. Trouver une interprétation $E_1^{\mathfrak{M}}$ de E_1 sur M telle que la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M} = (M, E_0^{\mathfrak{M}}, E_1^{\mathfrak{M}})$ soit un modèle de T_p.
5. Montrer que T_p est une théorie complète qui élimine les quantificateurs.
6. Est-ce que T_p est $\aleph_1$-catégorique ?

Exercice 2 (Théorie des ensembles)
Soit $\mathcal{U}$ un modèle de ZFC vérifiant l'axiome de fondation.

1. Pour x dans $\mathcal{U}$ on définit, par induction sur ω, la suite d'ensembles $x_0 := x$, $x_{n+1} := \bigcup x_n$. Puis, on pose $\mathrm{tr.\,cl}(x) := \bigcup\{x_n \mid n \in \omega\}$, la *clôture transitive* de x. Montrer :
   (a) Pour tout x, y et z dans $\mathcal{U}$ on a $x \subseteq \mathrm{tr.\,cl}(x)$ et $x \in y \subseteq z \Rightarrow \mathrm{tr.\,cl}(x) \subseteq \mathrm{tr.\,cl}(y) \subseteq \mathrm{tr.\,cl}(z)$.
   (b) L'ensemble $\mathrm{tr.\,cl}(x)$ est transitif pour tout $x \in \mathcal{U}$ (rappel : un ensemble x est *transitif* si $z \in y \in x$ implique $z \in x$).
   (c) Si t est un ensemble transitif tel que $t \supseteq x$, alors $t \supseteq \mathrm{tr.\,cl}(x)$.
   (d) L'opération $x \mapsto \mathrm{tr.\,cl}(x)$ est donnée par une relation fonctionnelle : il existe une formule (sans paramètres) $\theta[x,y]$ telle que pour tout u dans $\mathcal{U}$ on ait $\mathcal{U} \models \forall y(\theta[u,y] \iff y = \mathrm{tr.\,cl}(u))$.
   (e) Montrer ou donner un contre-exemple :
   (I) Pour tout x on a $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(\bigcup x))$.
   (II) Pour tout x on a $\mathrm{card}(\mathrm{tr.\,cl}(x)) \leq \aleph_0 \mathrm{card}(x)$.
2. Rappel sur la hiérarchie de von Neumann : Par induction sur $\alpha \in \mathrm{Ord}$ on définit des ensembles V_α. On pose $V_0 := \emptyset$, puis $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ et $V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ si λ est limite. Comme $\mathcal{U}$ satisfait à l'axiome de fondation, on a $\mathcal{U} \models \forall x \exists \alpha\, x \in V_\alpha$.
   Le *rang* d'un ensemble x est défini ainsi : $\mathrm{rg}(x) =$ le plus petit γ tel que $x \in V_{\gamma^+}$.

   Soit κ un cardinal infini. On définit $H_\kappa := \{x \in \mathcal{U} \mid \mathrm{card}(\mathrm{tr.\,cl}(x)) < \kappa\}$. Montrer :
   (a) Si x est transitif et $\mathrm{rg}(y) = \alpha$ pour un $y \in x$, alors pour tout $\beta < \alpha$ il existe $z \in x$ tel que $\mathrm{rg}(z) = \beta$.
   (b) H_κ est transitif et $H_\kappa \cap \mathrm{Ord} = \kappa$.

(c) $H_\kappa \subseteq V_\kappa$ pour tout κ. En déduire que H_κ est un ensemble (a priori, ce n'est qu'une classe).

(d) $H_\omega = V_\omega$.

(e) Pour tout cardinal infini λ il existe $\kappa \geq \lambda$ tel que $V_\kappa = H_\kappa$.

(f) Si κ est régulier et $\kappa > \omega$, alors $(H_\kappa, \in\restriction_{H_\kappa})$ est un modèle de ZFC + AF privé de l'axiome des parties (c'est à dire satisfait aux axiomes suivants : axiome d'extensionalité, axiome de la paire, axiome de la réunion, schéma d'axiome de compréhension, schéma d'axiome de remplacement, axiome de l'infini, axiome de fondation et axiome du choix).

Exercice 3 (Récursivité)
On travaille avec les notations du cours.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que si i est un indice pour la fonction récursive (partielle) f à deux variables, alors $\epsilon(i)$ est un indice pour la fonction $g = f \circ \sigma$, où $\sigma(x, y) = (y, x)$.
2. Soit $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction qui à $i \in \mathbb{N}$ associe le plus petit entier j tel que $\varphi_i^2 \circ \sigma = \varphi_j^2$. Montrer que η n'est pas récursive.
3. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^1_{\delta(n)}$ est la fonction constante égale à n.
4. Dans cette partie, on pourra utiliser la version suivante du théorème du point fixe (différente de celle traitée dans le cours) :

   Soient $n > 0$ et p des entiers et α une fonction totale récursive à $p+1$ variables. Alors il existe une fonction récursive primitive h à p variables telle que, pour $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ on ait $\varphi^n_{\alpha(\overline{x}, h(\overline{x}))} = \varphi^n_{h(\overline{x})}$.

   Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive $h \in \mathcal{F}_2$ telle que l'on ait $\varphi^1_{h(n,i)} = \varphi^1_{\delta(n)}$ pour $i \geq h(n, i)$, et $\varphi^1_{h(n,i)} = \varphi^1_i$ pour $i < h(n, i)$.
5. Montrer que l'ensemble $A_i = \{n \,|\, h(n, i) \leq i\}$ a au plus $i + 1$ éléments pour tout $i \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathcal{F}_1$ récursive primitive telle que $\varphi^1_i = \varphi^1_{\beta(i)}$ et $\beta(i) > i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
Soit T une théorie récursive dans le langage de l'arithmétique. Soit $P_T(x, y)$ une formule Σ_1 représentant $\mathrm{Dem}(T) = \{(\#F, \#\#d)\}$. On considère la fonction primitive récursive $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivante : si n est le nombre de Gödel d'un énoncé F, $N(n)$ est le nombre de Gödel de $\neg F$ sinon $N(n) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ une formule Σ_1 représentant cette fonction. On considère la formule

$$P^R_T(x, y) = P_T(x, y) \wedge \neg \exists z \leq y \, \exists u (P_T(u, z) \wedge \mathcal{N}(x, u)),$$

on note $h^R_T(x)$ la formule $\exists y P^R_T(x, y)$ et $\Delta^R_T = \Delta_{h^R_T}$. Rappelons que $\mathcal{P}_0 \vdash F(\#\Delta_F) \iff \neg \Delta_F$ pour toute formule $F[v]$ à une variable libre.
On se propose de démontrer le résultat suivant (variante de Rosser du théorème de Gödel) : si T est une théorie récursive consistante contenant $\mathcal{P}_0$, alors ni Δ^R_T ni sa négation ne sont démontrables à partir de T.

1. Montrer que si $T \vdash \neg \Delta^R_T$, alors

$$\mathcal{P}_0 \vdash \forall y (P_T(\#\Delta^R_T, y) \implies \exists z \leq y \, \exists u (P_T(u, z) \wedge \mathcal{N}(\#\Delta^R_T, u))).$$

2. Conclure.