Introduction au domaine de Recherche

Marches aléatoires branchantes

Loïc de Raphelis
Sous la direction de Zhan Shi

Octobre 2012

Table des matières

1 Introduction

1.1 Quelques préliminaires sur les arbres

L'objet que nous étudions se place dans le cadre général des arbres avec racine. Un arbre avec racine est un graphe non orienté, acyclique et connexe, dont on a distingué un sommet (la racine). Dès lors qu'il y a présence de racine, il s'oriente naturellement, et on peut ainsi parler de *parent*, d'*ancêtre commun* ou de sommets *frères*, notions qui sont celles que l'on intuite. Formellement, on définit un arbre $\mathbb{T}$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{*n} \cup \emptyset$ (l'ensemble des suites finies d'entiers et de la suite nulle, notée $\emptyset$) vérifiant les propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathbb{T}$,
- si $u = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) \in \mathbb{T}$, c'est-à-dire que son *parent* est dans $\mathbb{T}$
- si $u \in \mathbb{T}$, il existe $N(u) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq N(u)$ $u.j \in \mathbb{T}$ (c'est-à-dire que l'on indice les sommets sans sauter de numéro),

où . est l'opération de concaténation de suites. Si x et y sont deux sommets d'un arbre $\mathbb{T}$, on notera $|x|$ sa génération dans l'arbre (c'est-à-dire sa longueur), $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses ancêtres à la génération $1, 2, \ldots, n$, $\overleftarrow{v}$ son parent,$x \leq y$ si x est un ancêtre de y, et $\Omega(x)$ l'ensemble de ses sommets frères (c'est-dire les $y \neq x$ ayant le même parent).

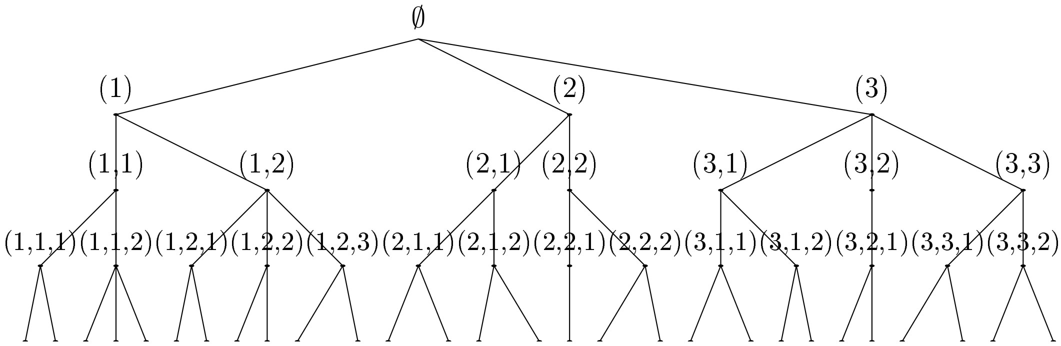

Figure 1 : Un arbre représenté sur 5 générations

On munit l'ensemble des arbres de la tribu $\mathscr{H}_\infty$ engendrée par les ensembles $\{\mathbb{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ arbre tel que $u \in \mathbb{T}\}$ pour $u \in \mathcal{U}$. La filtration qui intervient naturellement est donc celle constituée des $\mathscr{H}_n$ engendrées par les $\{\mathbb{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ arbre tel que $u \in \mathbb{T}\}$ pour $|u| \leq n$. On peut dès lors déterminer des lois sur les arbres, et donc parler d'arbre aléatoire. Un exemple classique d'arbre aléatoire est l'arbre de Galton-Watson, qui modélise l'évolution d'une population dont les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres, et selon la même loi. Sa construction se fait par récurrence de la manière suivante :

Définition 1.1. *Soit μ une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(Z_i^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ,*

- *La génération 0 est constituée d'un seul individu. Il donne naissance à un nombre Z_0^0 d'individus.*
- *La génération 1 est constituée des Z_0^0 fils de l'individu de la génération* 0*. Chacun de ces Z_0^0 individus donne naissance à $Z_1^1, Z_2^1, \ldots, Z_{Z^0}^1$ enfants.*

– *On continue ainsi indéfiniment, ou jusqu'à ce que la population s'éteigne.*
L'arbre $\mathbb{T}$ *ainsi construit s'appelle un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction* μ*, et le processus* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sharp\{x \in \mathbb{T}, |x| = n\}$ *est le processus de Galton-Watson associé.*

On peut s'intéresser à la probabilité d'extinction de cet arbre, c'est-à-dire à $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, Z_n = 0)$. Celle-ci est déterminée simplement à partir de la fonction génératrice de la loi de reproduction :

Proposition 1.1. *Soit* q *la probabilité d'extinction d'un arbre de Galton-Watson* $\mathbb{T}$ *de loi* μ*. Alors* q *est la plus petite solution de l'équation* $\mathbb{E}[q^Z] = q$*, où* $Z \sim \mu$*. Entre autres,* $q = 1$ *si et seulement si* $\mathbb{E}[Z] \leq 1$ *et* $Z \neq 1$*p.s.*

1.2 Introduction aux marches aléatoires branchantes

Il est possible d'enrichir la notion d'arbre en associant à chaque sommet $x \in \mathbb{T}$ une valeur que l'on notera $V(x)$, définissant ainsi les arbres marqués (un arbre marqué est donc la donnée d'un arbre et d'une fonction V définie sur l'ensemble des sommets, et à valeurs réelles). On la munit de la filtration $\mathscr{F}_n$ engendrée par $\mathscr{H}_n$ et les $(V(x), |x| \leq n)$. La valeur associée peut être vue comme une composante spatiale propre à chaque sommet, et pour ce qui est des arbres marqués aléatoires on souhaite évidemment pour que l'étude soit intéressante que celle-ci soit en partie héritée du parent. Une marche aléatoire branchante est un arbre marqué aléatoire, dont l'évolution se fait de la manière suivante :

Définition 1.2. *Soit* $\mathcal{L} = (x^i)_{i=1}^L$ *un processus ponctuel.*
- *A l'instant 0 il n'y a qu'une seule particule, située en 0*
- *A l'instant 1 cette particule meurt et donne naissance à un nombre aléatoire de particules distribuées selon le processus* $\mathcal{L}$*.*
- *Ensuite chacune de ces particules recommence l'opération précédente, indépendamment du passé et de ses soeurs (c'est ce que l'on appelle la propriété de branchement), en donnant naissance à un nombre aléatoire de particules chacune selon une copie indépendante de* $\mathcal{L}$ *translatée de leur position.*
- *L'opération continue ainsi indéfiniment, ou jusqu'à ce que la population s'éteigne.*

L'objet ainsi défini est une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $\mathcal{L}$*.*

Dans la suite, pour toute particule x de notre processus on désignera par $|x|$ sa génération, et par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ses ancêtres à la première, deuxième, n-ième génération (x_0 désignant toujours la particule initiale de l'instant 0).

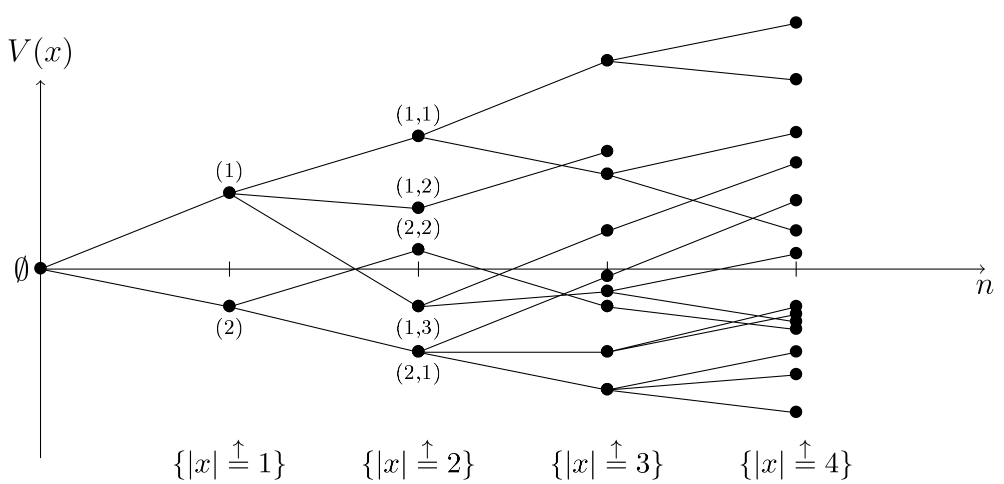

figure 1 : une marche aléatoire branchante représentée sur 4 générations

2 Manipulation des marches aléatoires branchantes

La marche aléatoire branchante est un processus dont la complexité croît de manière exponentielle au fur et à mesure qu'il évolue. Les expressions faisant intervenir l'intégralité des individus présents à une génération peuvent apparaître particulièrement compliquées. Il est cependant possible de s'affranchir de cette complexité de façon à n'avoir plus qu'à étudier la trajectoire d'une seule particule bien choisie.

2.1 Un outil fondamental : la méthode de l'épine dorsale [12]

Dans [12], Lyons introduit un changement de mesure de la marche aléatoire branchante, très utile en ce sens qu'il permet de rapporter l'étude de celle-ci à celle de la marche aléatoire simple. Ce changement fait intervenir la notion d'arbre marqué avec chemin distingué (un chemin ξ dans un arbre marqué $(\mathbb{T}, V)$ est une suite infinie de sommets $\xi_1, \xi_2, \ldots$ de $\mathbb{T}$ tels que pour tout i $|\xi_i| = i$ et $\xi_i = \overleftarrow{\xi_{i+1}}$). On munit l'ensemble des arbres aléatoires marqués de la filtration $(\mathscr{F}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrée par $\mathscr{F}_n$ et les événements $\{x = \xi_n\}$ pour $x \in \mathbb{T}$, $|x| \leq n$.

Nous allons nous intéresser à un arbre aléatoire marqué avec chemin distingué particulier, que l'on notera $\hat{\mathcal{B}}$, associé à notre marche aléatoire branchante :

Définition 2.1. *Soit $\hat{\mathcal{L}}$ un processus ponctuel dont la loi a pour dérivée de Radon-Nikodym $\sum_{x\in\mathcal{L}} \mathrm{e}^{-x}$ par rapport à $\hat{\mathcal{L}}$, on construit $\hat{\mathcal{B}}$ de la manière suivante :*

- *A l'instant 0, il n'y a qu'une seule particule w_0 située en 0. Celle-ci génère des enfants selon un processus $\hat{\mathcal{L}}_0$ (copie indépendante de $\hat{\mathcal{L}}$).*
- *Parmi les enfants u de w_0 issus de $\hat{\mathcal{L}}_0$, on en choisit un comme étant w_1 (choisi selon la probabilité $\mathbf{P}(w_1 = u|\hat{\mathcal{L}}_0) = \frac{\mathrm{e}^{-V(u)}}{\sum_{x\in\hat{\mathcal{L}}_0} \mathrm{e}^{-x}}$).*
- *Les enfants de la génération 1 autres que w_1 créent des marches aléatoires branchantes indépendantes du reste, selon le procédé donné dans la section 1.2.*
- *w_1 génère des enfants selon un processus $\hat{\mathcal{L}}_1$ (copie indépendante de $\hat{\mathcal{L}}_0$ et $\hat{\mathcal{L}}$).*
- *On choisit w_2 parmi les enfants de w_1, les autres donnent des marches aléatoires branchantes indépendantes, et ainsi de suite.*

$\hat{\mathcal{B}}$ est alors bien un arbre marqué avec chemin distingué $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$, que l'on appellera dans la suite épine.

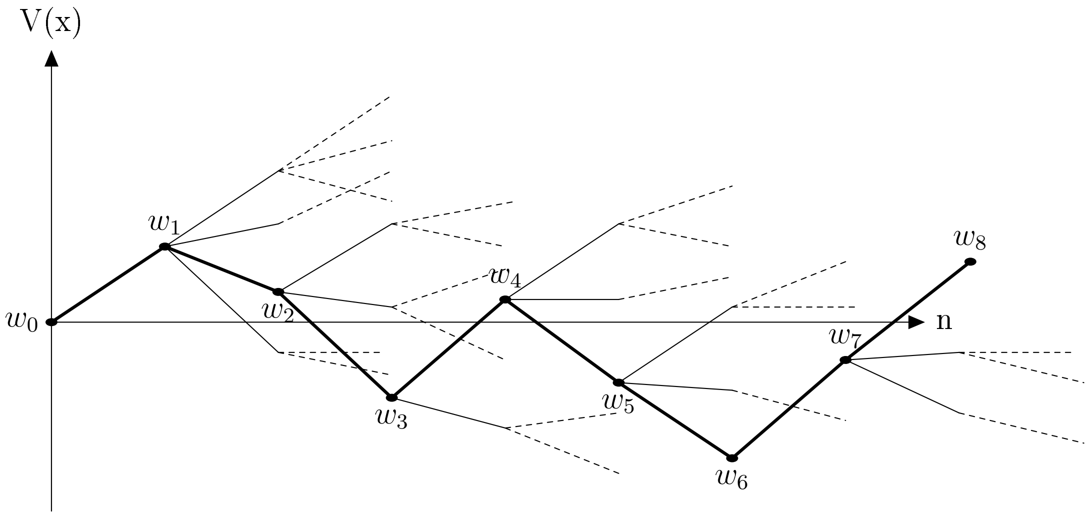

Figure 2 : marche aléatoire branchante avec épine. L'épine est en gras, les particules hors de l'épine commencent des marches aléatoires branchantes indépendantes.

On introduit maintenant une mesure sur l'ensemble des arbres marqués, dont on verra le lien avec notre processus $\hat{\mathcal{B}}$ ensuite.
Soit

$$m = \mathbf{E}[\sum_{|x|=1} \mathrm{e}^{-V(x)}], \qquad W_n := \frac{\sum_{|u|=n} \mathrm{e}^{-V(u)}}{m^n} \tag{2.1}$$

que l'on définit pour $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par la position des particules $(V(u), |u| \leq n)$ et la connaissance de l'arbre $\mathbb{T}$ jusqu'à la génération n, mais que celle-ci ne donne aucune information sur l'épine. Alors $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathscr{F}_n$-martingale. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[\sum_{|u|=n+1} \mathrm{e}^{-V(u)}|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[\sum_{|u|=n}\sum_{x\in\mathcal{L}^u} \mathrm{e}^{-(x+V(u))}|\mathcal{F}_n] \\
&= \frac{\sum_{|u|=n} \mathrm{e}^{-V(u)}}{m^n}\frac{1}{m}\mathbf{E}[\sum_{x\in\mathcal{L}^u} \mathrm{e}^{-x}|\mathcal{F}_n] \\
&= W_n \times 1
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^u$ est le processus ponctuel issu de u, et où la dernière égalité vient du fait que $\mathcal{L}^u$ est indépendant de $\mathcal{F}_n$ (par la propriété de branchement). Ainsi d'après le théorème d'extension de Kolmogorov, on peut introduire pour tout $a \in \mathbb{R}$ la mesure de probabilité $\hat{\mathbf{P}}_a$ sur $\mathscr{F}_\infty := \bigvee_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$ définie par

$$\hat{\mathbf{P}}_a\,|_{\mathscr{F}_n} = \mathrm{e}^a W_n \bullet \mathbf{P}_a\,|_{\mathscr{F}_n}. \tag{2.2}$$

où $\mathbf{P}_a$ est la mesure de la marche aléatoire branchante dont la première particule est située en a. On notera $\hat{\mathbf{E}}_a$ l'espérance associée à $\hat{\mathbf{P}}_a$. Cette mesure est liée au processus $\hat{\mathcal{B}}$ de la manière suivante :

Proposition 2.1. ([12]) *Soit $\mathcal{B}$ la projection de $\hat{\mathcal{B}}$ sur $\mathscr{F}_\infty$. Alors, sous $\hat{\mathbf{P}}_a$, la marche aléatoire branchante est de même loi que $a + \mathcal{B}$.*

Tout l'intérêt de cette proposition vient du comportement particulier de l'épine sous la probabilité $\hat{\mathbf{P}}$, et de la façon dont celle-ci est choisie parmi les autres sommets. R. Lyons décrit cela dans [12], dont on tire la proposition suivante :

Proposition 2.2. ([12]) *Pour tout $|x| = n$, on a*

$$\hat{\mathbf{P}}_a\{w_n = x \,|\, \mathscr{F}_n\} = \frac{\mathrm{e}^{-V(x)}}{W_n}. \tag{2.3}$$

On remarque qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable positive et X_n une variable aléatoire $\mathscr{F}_n$-mesurable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_a\Big[\sum_{|x|=n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)X_n\Big] &= \hat{\mathbf{E}}_a\Big[\sum_{|x|=n} \frac{1}{W_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)X_n\Big] \\
&= \hat{\mathbf{E}}_a\Big[\sum_{|x|=n} \mathrm{e}^{V(x)}\hat{\mathbf{E}}_a[\mathbf{1}_{w_n=x}|\mathscr{F}_n]g(x_1, x_2, \ldots, x_n)X_n\Big] \\
&= \hat{\mathbf{E}}_a\Big[\hat{\mathbf{E}}_a\Big[\sum_{|x|=n} \mathrm{e}^{V(x)}\mathbf{1}_{w_n=x}g(x_1, x_2, \ldots, x_n)X_n|\mathscr{F}_n\Big]\Big] \\
&= \hat{\mathbf{E}}_a\Big[\mathrm{e}^{V(w_n)}g(w_1, w_2, \ldots, w_n)X_n\Big]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En particulier, si $X_n = 1$, on déduit un lemme qui permet de ramener l'étude de la marche aléatoire branchante à celle de la marche aléatoire simple. On observe tout d'abord que sous $\hat{\mathbf{P}}_a$, $(V(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire simple partant de a.
On déduit de ceci le lemme *many-to-one*

Lemme 2.3. *(Many-to-one) Sous les conditions (3.1), il existe une marche aléatoire centrée $(S_n, n \geq 0)$ telle que pour tous $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,*

$$\mathbf{E}_a\Big[\sum_{|x|=n} g(V(x_1), \ldots, V(x_n))\Big] = \mathbf{E}_a\Big[\mathrm{e}^{S_n - a}g(S_1, \ldots, S_n)\Big] \tag{2.5}$$

En particulier $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $(V(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$, et S_1 est de variance finie sous la condition (3.2).

2.2 Lignes de niveau et convergence de martingales associées [6]

L'évolution discrète de la marche aléatoire branchante amène à l'étude de nombreuses martingales, telles que W_n introduite précédemment, ou de D_n qui intervient dans le théorème de convergence en loi du minimum. Il s'avère qu'il peut être pratique d'observer l'évolution de la marche aléatoire branchante autrement que génération par génération, et l'on souhaiterait que les résultats de convergence sur les martingales perdurent. On introduit ici ce qu'est une ligne de niveau (optional line dans [6]), notion qui joue un rôle similaire à celle de génération, ainsi que les résultats de convergence de certains types de martingales ramenées sur ces lignes de niveau. Ces définitions et résultats proviennent du chapitre 6 de [6].

Définition 2.2. *Soit γ un sous-ensemble de sommets de l'arbre $\mathbb{T}$. On dit que cet ensemble est une ligne si et seulement si*

$$\forall u \in \mathbb{T},\ (u \in \gamma) \Rightarrow (u_i \notin \gamma\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, |u|\}).$$

De façon informelle, une ligne coupe l'arbre $\mathbb{T}$ de sorte que chaque branche ne se fasse couper qu'au plus une fois. Par exemple, $\{u \in \mathbb{T},\ |u| = n\}$ est une ligne pour tout $n \in \mathbb{N}$. On associe à une ligne γ la tribu $\mathscr{F}_\gamma$ engendrée par les $\{u \in \mathbb{T}\}$ et $V(u)$ tels que il existe $v \in \gamma$ tel que $u \leq v$.

Définition 2.3. *Soit Γ une ligne aléatoire. On dit que Γ est une ligne de niveau si pour toute ligne fixée γ, $\{\Gamma \leq \gamma\} \in \mathscr{F}_\gamma$. Une ligne de niveau Γ est dite très simple si et seulement si $\forall u \in \mathbb{T}$ $\{u \in \Gamma\} \in \mathscr{F}_{|u|}$.*

(où l'on note $\{\gamma_1 \leq \gamma_2\}$ si pour tout $u_2 \in \gamma_2$ il existe $u_1 \in \gamma_1$ tel que $u_1 \leq u_2$).
Pour toute ligne γ et toute $\mathscr{F}_n$-martingale H_n de la forme $\sum_{|x|=n} h(x)$ on associe la variable aléatoire $H_\gamma = \sum_{x \in \gamma} h(x)$. Le théorème 6.1 de [6] permet d'obtenir d'obtenir un résultat de convergence liant la martingales et lignes de niveau :

Théorème 2.4. *Soit $\{\Gamma(i),\ i \geq 0\}$ des lignes de niveau simples croissantes en i, et $H_n = \sum_{|x|=n} h(x)$ une $\mathscr{F}_n$-martingale positive. On suppose que $\sup\{|u|,\ u \in \Gamma\} < +\infty$ presque sûrement (les $\Gamma(i)$ sont alors dites coupantes). Alors $(H_{\Gamma(i)}, \mathscr{F}_{\Gamma(i)})$ est une martingale positive. De plus, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $H_{\Gamma(i) \cap \{x, |x| \leq n\}}$ tend presque sûrement vers H_n, alors $H_{\Gamma(i)}$ tend vers H_∞ presque sûrement.*

Exemple : On introduit une famille de lignes de niveau vérifiant les hypothèses de notre théorème. Soit $A \geq 0$, on note $\mathcal{Z}[A]$ l'ensemble des particules qui passent au-dessus de A pour la première fois :

$$\mathcal{Z}[A] := \{u \in \mathbb{T} \,:\, V(u) \geq A,\, V(u_k) < A \,\forall\, k < |u|\}.$$

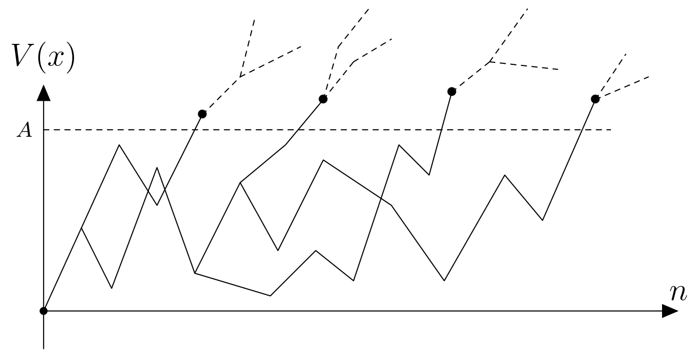

Figure 3 : L'ensemble $\mathcal{Z}[A]$

$\mathcal{Z}[A]$ est une ligne de niveau simple, coupante car $M_n \to \infty$ presque sûrement. De plus les $\mathcal{Z}[A]$ sont manifestement croissantes en A. Ainsi au lieu d'étudier l'évolution de la marche aléatoire de manière "horizontale" on peut l'étudier de manière "verticale" selon les lignes $\mathcal{Z}[\mathcal{A}]$, tout en conservant les propriétés de convergences de certaines martingales.

3 Résultats sur le minimum d'une marche aléatoire branchante

De nombreux articles portent sur l'étude du comportement du minimum de notre marche aléatoire branchante au temps n

$$M_n := \min\{V(x), |x| = n\}$$

avec la convention $\min \emptyset := \infty$. On suppose que notre processus vérifie les conditions suivantes, introduites par Biggins et Kyprianou dans [7] comme étant le "boundary case" (cas limite) :

$$\mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} 1\right] > 1, \qquad \mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} \mathrm{e}^{-V(x)}\right] = 1, \qquad \mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} V(x)\mathrm{e}^{-V(x)}\right] = 0. \tag{3.1}$$

En notant $\mathbb{T}$ l'arbre associé à notre marche aléatoire branchante, on remarque qu'il s'agit d'un arbre de Galton-Watson, dont le processus associé est $(\sharp\{x \in \mathbb{T} | |x| = n\})_{n\in\mathbb{N}}$. La première condition nous assure donc que l'on évite le cas trivial où l'on a extinction du processus presque sûrement (Proposition (1.1)).
Les deux autres conditions sont des renormalisations qui nous permettent de simplifier des calculs ultérieurs ; entre autres sous ces conditions la marche aléatoire introduite en 2.5 est centrée, et le m introduit en 2.1 vaut 1. Sous des hypothèses assez larges, toute marche aléatoire branchante peut remplir ces deux conditions, par simple transformation affine.

Les travaux successifs de J.M. Hammersley [9], J.F.C Kingman [11] et J.D. Biggins [5] ont permis d'établir l'asymptotique au premier ordre de M_n :

Théorème 3.1. *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que sur l'événement de non-extinction on ait presque sûrement $\frac{M_n}{n} \to \gamma$. En particulier, dans les conditions (3.1), $\gamma = 0$.*

Le second ordre n'est pas encore un $0(1)$. En effet dans [12], Lyons démontre que $W_n \to 0$ p.s. ; ainsi $\mathrm{e}^{-M_n} \leq \sum_{|x|=n} \exp(-V(x)) \to 0$ p.s. et $M_n \to \infty$ p.s. En fait, Y. Hu et Z. Shi [10] ont montré qu'il était égal à $3/2 \ln(n)$ en probabilité. Plus précisément,

Théorème 3.2. [10] *On suppose que l'on est dans le boundary case, et qu'il existe $\delta > 0$, $\delta_- > 0$ et $\delta_+ > 0$ tels que*

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{|x|=1} 1\right)^{1+\delta}\right] < \infty, \mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} \mathrm{e}^{-(1+\delta_+)V(x)}\right] < \infty \text{ et } \mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} \mathrm{e}^{\delta_- V(x)}\right] < \infty.$$

Alors sur l'événement de non extinction

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} = \frac{3}{2} \qquad \text{p.s.,}$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} = \frac{1}{2} \qquad \text{p.s.,}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} M_n = \frac{3}{2} \qquad \textit{en probabilité.}$$

Les deux premières conclusions nous assurent qu'il est impossible d'obtenir une convergence presque sûre, étant données les fluctuations. La troisième nous donne le second ordre.

Dans [2], Elie Aïdékon montre la convergence en loi de $M_n - 3/2\ln(n)$, sous quelques hypothèses que l'on donne ici :

- Les points du processus $\mathcal{L}$ ne sont pas presque sûrement à valeur dans un ensemble de la forme $a\mathbb{Z}+b$ (on dit que sa distribution est *non-lattice*).
- $\sum_{|x|=1} 1 < \infty$ p.s.
- on a

$$\mathbf{E}\left[\sum_{|x|=1} V(x)^2 \mathrm{e}^{-V(x)}\right] < \infty, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{E}\left[X(\ln_+ X)^2\right] < \infty, \qquad \mathbf{E}\left[\tilde{X}\ln_+ \tilde{X}\right] < \infty. \tag{3.3}$$

où

$$X := \sum_{|x|=1} \mathrm{e}^{-V(x)}, \qquad \tilde{X} := \sum_{|x|=1} V(x)_+ \mathrm{e}^{-V(x)}. \tag{3.4}$$

La condition (3.2) se comprend très bien à l'aide de la proposition (2.5), et permet d'assurer que lorsque l'on ramène l'étude de notre marche aléatoire branchante à une marche aléatoire simple, celle-ci soit de variance finie. Les deux conditions de (3.3) seront justifiées après l'énoncé du théorème principal, dont on donne maintenant l'énoncé :

Théorème 3.3. ([2]) *Il existe une constante $C^* \in (0,\infty)$ telle que pour tout réel x,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(M_n \geq \frac{3}{2}\ln n + x\right) = \mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{-C^* \mathrm{e}^x D_\infty}\right]. \tag{3.5}$$

où D_∞ est la limite presque sûre de

$$D_n := \sum_{|x|=n} V(x)\mathrm{e}^{-V(x)}. \tag{3.6}$$

que l'on appelle *martingale dérivée* définie pour $n \geq 0$. L'existence d'une limite presque sûre est assurée par le théorème 12 de [6]. Et en fait, les conditions (3.3) nous assurent que $D_\infty > 0$ sur l'événement de non-extinction (voir proposition A.3 de l'aritcle [2]). On remarque que la condition *non-lattice* sur $\mathcal{L}$ est nécessaire, car il est impossible d'avoir une convergence en loi autour de $3/2\ln(n)$ si $\mathcal{L} \in a\mathbb{Z}+b$: en effet on aurait entre autres pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(M_n - 3/2\ln(n) \in [x, x+a/2[) = 0$ pour une infinité de n. On ne sait cependant pas si un résultat similaire existe dans le cas *lattice*.

Références

[1] Addario-Berry, L. et Reed, B. (2009). Minima in branching random walks. *Ann. Probab.* **37**, 1044–1079.

[2] Aïdékon, E. (2011). Convergence in law of the minimum of a branching random walk. *arXiv :1101.1810.*

[3] Aïdékon, E. et Shi, Z. (2010). Weak convergence for the minimal position in a branching random walk : A simple proof. *Periodica Math. Hungar.*, **61**, 43–54.

[4] Aïdékon, E. et Shi, Z. (2010+). The Seneta-Heyde scaling for the branching random walk. (preprint)

[5] Biggins, J.D. (1976). The first- and last-birth problems for a multi type age-dependent branching process. *Adv. Appl. Prob.* **8**, 446–459.

[6] Biggins, J.D. et Kyprianou, A.E. (2004). Measure change in multitype branching. *Adv. Appl. Probab.* **36**, 544–581.

[7] Biggins, J.D. et Kyprianou, A.E. (2005). Fixed points of the smoothing transform : the boundary case. *Electron. J. Probab.* **10**, Paper no. 17, 609–631.

[8] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* II, 2nd ed. Wiley, New York.

[9] Hammersley, J.M. (1974). Postulates for subadditive processes. *Ann. Probab.* **2**, 652–680.

[10] Hu, Y. et Shi, Z. (2009). Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees. *Ann. Probab.* **37**, 742–789.

[11] Kingman, J.F.C. (1975). The first birth problem for an age-dependent branching process. *Ann. Probab.* **3**, 790–801.

[12] Lyons, R. (1997). A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk. In : *Classical and Modern Branching Processes* (Eds. : K.B. Athreya et P. Jagers). *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* **84**, 217–221. Springer, New York.