Cascades multiplicatives, distances aléatoires et dimension de Hausdorff

Yang LU et Michaël ULRICH

4 novembre 2009

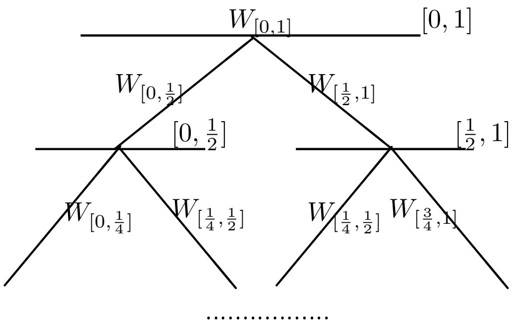
1 Remerciements

Nous tenons à remercier Monsieur Grégory MIERMONT qui nous a proposés ce sujet et nous a encadrés tout au long du semestre.

2 Introduction

Nous allons considérer l'ensemble de réels sur $[0,1]$ muni respectivement de deux distances différentes, d'une part de la distance euclidienne usuelle, et d'autre part d'une distance aléatoire.(i.e. une fonction distance qui dépend d'un aléa ω). Soient $x < y$ dans [0,1], et μ une mesure sans atome et à support plein sur $[0,1]$ (i.e. il n'existe pas de sous intervalle de [0,1] sur laquelle la mesure est nulle), on définit $\rho(x,y) := \mu([x,y])$, on vérifie facilement que ρ ainsi définie vérifie les axiomes pour les distances. Donc pour définir une distance aléatoire, il suffit de construire une mesure aléatoire. Pour ce faire, on utilise ici la méthode suivante dite de "cascade multiplicative".

On se donne une suite de variables aléatoires positives, W_I, i.i.d, de moyenne 1, indexée par I, l'ensemble des sous segments dyadiques de $[0,1]$. On pose d'abord μ_1 la mesure aléatoire à densité $W_{[0,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Ensuite on définit μ_2 par : elle est à densité $W_{[0,\frac{1}{2}]}$ (resp. $W_{[\frac{1}{2},1]}$) par rapport à μ_1 sur $[0,1/2]$ (resp. $[1/2,1]$). Ainsi on définit par récurrence les μ_n. On verra que (cf.page 13), presque sûrement, cette suite converge étroitement vers une mesure limite aléatoires μ possédant les propriétés voulues sous certaines hypothèses. C'est ce que l'on appelle cascade multiplicative.



Pour étudier le lien entre ces deux espaces métriques, nous allons donner une formule reliant leurs dimensions de Hausdorff. La dimension de Hausdorff est une généralisation de la notion usuelle de dimension dans un espace vectoriel, étendue à tout sous-ensemble d'un espace métrique. Elle mesure en quelque sorte la «taille» d'un (sous-)espace métrique, par exemple, pour un ensemble dénombrable, cette valeur est 0, pour $\mathbb{R}^n$,elle vaut n, et on verra que pour tout s réel dans [0,1], on peut construire un ensemble de Cantor sur [0,1] ayant s pour sa dimension de Hausdorff. La formule que nous donnerons dit que la dimension de Hausdorff de tout compact par rapport à la distance **aléatoire** définie ci-dessus est **déterministe**.

La motivation de ce travail vient d'une formule trouvée en physique, appelée KPZ du nom de ses inventeurs, Knizhnik, Polyakov, Zamolodchikov, dans le cadre des tentatives pour formuler une théore de la gravitation quantique. Cependant, la preuve rigoureuse et l'origine mathématique de cette formule KPZ est toujours inconnue à nos jours. Pour mieux comprendre cette dernière, les mathématiciens cherchent à étudier un cas plus simple (en dimension 1 plutôt que 2 comme dans KPZ), c'est le cas pour la formule que nous aborderons, prouvée par Benjamini et Schramm [1], qui permet de faire apparaître une analogie de KPZ. Dans la suite on note cette formule mKPZ (KPZ modifiée). Pour plus de détail sur cette formule, voir par exemple l'introduction de l'article [1].

Dans le reste de ce mémoire, on introduira d'abord la notion de mesures et de dimensions de Hausdorff, ainsi que le lemme de Frostman, un outil fort utile pour le calcul de dimensions de Hausdorff. Ensuite, on définira les cascades multiplicatives et on verra quelques propriété classiques de ces dernières qui seront servies ultérieurement. Enfin, la troisième partie sera consacrée à la preuve de la formule mKPZ.

3 Dimension de Hausdorff dans un espace métrique

Dans toute la suite de cette partie, E désignera un espace métrique de distance d.

3.1 Construction des mesures de Hausdorff

On prend $s \in [0, \infty[$, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E, \zeta_s(A) = d(A)^s$ où A$\in \mathcal{P}(E)$ et $d(A)$ désigne le diamètre de A.

3.1.1 Définitions

Définition : On appelle s-mesure de Hausdorff la quantité suivante :

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A)$$

où

$$H^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_s(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, d(A_i) \leq \delta, A_i \in P(E) \right\}$$

Il existe en fait une construction pls générale que nous donnerons ici à titre indicatif.. Soient F une famille de parties de E, ζ une fonction positive.On suppose en outre :

- Pour tout δ strictement positif, on peut se donner $E_1, \dots E_i, \dots$ dans $P(E)$ tel que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ et $d(E_i) \leq \delta \forall i \geq 1$
- Pour tout δ strictement positif, il existe A dans $P(E)$ tel que $\zeta(A) \leq \delta$ et $d(A) \leq \delta$

On définit alors (Carathéodory) pour $A \subset E$:

$$\psi_\delta(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, d(A_i) \leq \delta, A_i \in F$$

Il est alors clair que les s-mesures, que l'on obtient pour ζ qui vaut le diamètre des parties A_i, ne sont que des cas particuliers de la construction de Carathéodory. Notons aussi que la première hypothèse permet d'assurer que l'ensemble sur lequel on prend la borne inférieure est non vide et la seconde hypothèse assure que $\psi_\delta(\emptyset) = 0$.
On a en outre que $\psi_\delta(A)$ est positive et, si on fixe A, est décroissante en δ car l'ensemble sur lequel on prend l'infimum est croissant quand δ croît. On a donc que $\psi_\delta(A)$ admet une limite $\psi(A)$ quand δ tend vers 0. Ceci justifie la définition précédente des s-mesures à l'aide d'une limite.

3.1.2 Quelques proprietés

Lemme 3.1.1. *Soit μ une mesure (extérieure) n'admettant pas d'atomes sur E.Supposons que pout tout A, B parties de E tels que $d(A,B) > 0$, on ait*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Alors, μ est une mesure borélienne (ie les boréliens sont μ-mesurables).

Démonstration. Soit A un ouvert, X une partie quelconque. Par définition d'une mesure extérieure, on a $\mu(X) \leq \mu(A \cap X) + \mu(A^c \cap X)$.
Posons $A^\epsilon := \{x \in A | d(x, A^c) > \epsilon\}$ .En appliquant l'hypothèse, on trouve alors :

$$\mu(X \cap A^\epsilon) + \mu(X \cap A^c) = \mu(X_\epsilon) \leq \mu(X)$$

où X_ϵ désigne les éléments de X qui ne sont pas dans $A - A^\epsilon$
On remarque que comme A est ouvert, A^c est fermé et donc tout point de A est à distance strictement positive de A^c. Donc

$$\cup_\epsilon A_\epsilon = A$$

.
Or, μ n'a pas d'atomes donc pour un certain α fixé, on a ϵ assez petit tel que $\mu(A - A^\epsilon) < \alpha$ et donc

$$\mu(X \cap A) + \mu(X \cap A^c) \leq \mu(X) + \alpha$$

et en faisant tendre α vers 0 on trouve l'autre inégalité. En utilisant aussi celle qui est issue de la définition de la mesure extérieure, on trouve que A est μ-mesurable.
Or, l'ensemble des parties mesurables est une tribu ; elle contient donc en particulier tout les boréliens. □

Théorème 3.1.1 (Proprietés fondamentales). *On a les proprietés suivantes :*

i *ψ est une mesure extérieure*

ii *Les boréliens sont ψ-mesurables*

iii *Si F est constitué de boréliens, alors ψ est régulière au sens suivant :*

$$\forall A \subset E \exists B \subset B \in \mathcal{B}(E), A \subset B \subset E, \psi(A) = \psi(B)$$

où $\mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne.

Démonstration. i ψ est positive.
ψ est croissante, car si $(A_i)_{i \geq 1}$ recouvre A alors il recouvre aussi tout sous-ensemble de A.
ψ est sigma-sous-additive, car si on se donne $(B_i)_{i \geq 1}$ une famille de parties de E et si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(B_{i,j})_{i \geq 1}$ est un recouvrement de B_i, alors $(B_{i,j})_{i,j \geq 1}$est un recouvrement de $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.
Donc ψ est une mesure extérieure.

ii Les s-mesures de Hausdorff sont sans atomes car un singleton peut être recouvert par une partie de diamètre arbitrairement petit. On va donc utiliser le lemme 1.1.1. Soient A, B deux parties dont la distance est strictement positive, que l'on notera κ. Comme la s-mesure est une limite quand δ tend vers 0, on peut supposer que l'on se restreint à la situation où $\delta < \kappa/2$.
Par définition d'une mesure (extérieure), on a

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

De plus, si j'ai un δ-recouvrement de $A \cup B$, comme on a supposé $\delta > \kappa/2$, on peut le diviser en un recouvrement de A et un recouvrement de B qui soient disjoints. Donc :

$$H^s_\delta(A) + H^s_\delta(B) \leq H^s\delta(A \cup B)$$

et en faisant $\delta \to 0$, on a l'inégalité inverse. Donc par le lemme, les s-mesures sont bien boréliennes.

iii Soit $A \subset E$. Pour tout $i \in IN$, on se donne $(A_{i,j})_{j\geq 1}$ ouverts tel que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \text{ et } \sup_j \mathrm{diamA_{i,j}} \to 0 \text{ quand } i \text{ tend vers } 0$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_{i,j}) \leq \psi(A) + 1/i$$

On peut bien choisir $A_{i,j}$ ouvert par le théorème 3.1.2.
Alors, on pose $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$ qui est borélien et qui vérifie $\psi(A) = \psi(B)$.

□

Le théorème suivant permet de se restreindre à certaines classes d'ensemble dans le calcul des mesures de Hausdorff.

Théorème 3.1.2. *Les s-mesures de Hausdorff sont aussi engendrées par les classes d'ensembles suivantes :*

i $F = U \subset E$ *tel que* U *soit ouvert*

ii $F = R \subset E$ *tel que* R *soit fermé*

iii Si $E = IR^n$, $F = K \subset E$ *tel que* K *soit convexe*

Démonstration. i Si $A_i \subset E$ intervient dans le recouvrement de A, alors $B_i = \{x \text{ tel que } d(x, A_i) < \epsilon\}$ est ouvert et son diamètre est d'au plus $d(A_i) + 2\epsilon$

ii L'adhérence d'un ensemble a le même diamètre que l'ensemble lui-même.

iii Un ensemble a le même diamètre que son enveloppe convexe.

□

Ceci signifie donc que les s-mesures de Hausdorff définissent des mesures boréliennes régulières

3.2 Définition de la dimension de Hausdorff

Lemme 3.2.1. *On prend $0 \leq s < t < \infty$. Alors :*

i Si $H^s(A) < \infty$, alors $H^t(A) = 0$

ii Si $H^t(A) > 0$ alors $H^s(A) = \infty$

Démonstration. i Puisque $H^s(A) < \infty$, il existe δ strictement positif tel que $H^s_\delta(A)$ soit aussi borné. On se donne donc $(A_i)_{i\geq 1}$ qui recouvre A avec des parties de diamètre inférieur à δ et tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^s \leq H^s_\delta(A) + 1$$

Alors :

$$H^t_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^s \leq H^s_\delta(A) + 1\big)\delta^{t-s}$$

ce qui tend vers 0 quand δ tend vers 0.

ii Par contraposée.

□

Ceci justifie alors la définition suivante :

Définition 3.2.1. *La dimension de Hausdorff de $A \subset E$ est :*

$$\mathrm{dim_H A = inf\{s : H^s(A) = 0\} = sup\{s : H^s(A) = \infty\}}$$

Théorème 3.2.1 (Proprietés immédiates)**.** *i dim est croissant*

ii $dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup dim A_i$

iii $dim IR^n = n$

Démonstration. i H^s est croissant, donc $\{s : H^s(A) = \infty\} \subset \{s : H^s(B) = \infty\}$ pour $A \subset B$

On a

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i)$$

Donc si$\forall i \in \mathbb{N}$, $H^s(A_i) = 0$, alors $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$. Donc, pour tout ϵ strictement positif,

$$\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq \sup dim A_i + \epsilon$$

L'inégalité réciproque est obtenue par le même type de raisonnement, en disant cette fois que si $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$, alors l'un au moins des A_i doit être de s-mesure de Hausdorff infinie.

ii Soit B boule de $\mathbb{R}^n$ de centre O et de diamètre 1 pour la norme infinie. Soit $p \in \mathbb{N}$. On peut alors recouvrir B par p^n boules de rayons exactement $1/p$. Donc $H^n_{1/p}(B) \leq 1$ et donc $\mathrm{dim_H B} \leq \mathrm{n}$
En fait, il y a égalité dans la relation précédente. On peut déjà se ramener à des recouvrements uniquement par des boules pour la norme uniforme. En effet, le théorème 3.1.2 dit qu'on peut se ramener aux recouvrements ouverts. De plus, si A_i ouvert appartient à un recouvrement de B, alors on peut remplir A_i par des boules plus petites. Or, pour les boules pour la norme uniforme de rayon ϵ le volume est ϵ^n. Comme on a un recouvrement de B, la somme des volumes doit valoir au moins 1. Donc on a $\mathrm{dim_H B = n}$ et par le point i, on a $\mathrm{dim_H \mathbb{R}^n = n}$.

□

On remarquera que le point ii implique que la dimension de Hausdorff généralise de manière cohérente la notion de dimension d'un espace vectoriel...

3.3 Un exemple : l'ensemble de Cantor

Nous allons appliquer ce que nous avons vu dans un cas classique : l'ensemble de Cantor.

Définition 3.3.1 (Ensemble de Cantor). *Soit $\mu \in]0, 1/2[$. On définit par réccurence :*

initialisation : $I_{0,0} = [0, 1]$

récurrence : Soit $n \in IN$. Supposons avoir construit $I_{0,0}, I_{1,0}, I_{1,1}, \ldots, I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}$. On définit alors $I_{n+1,1}, \ldots, I_{n+1,2^{n+1}}$ en otant à chaque intervalle du rang n un intervalle ouvert de longeur $(1 - 2\lambda)\lambda^n$ en son milieu.

On définit alors l'ensemble de Cantor par :

$$C(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$$

Cet ensemble est muni de la distance euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}$.Cet ensemble possède les proprietés remarquables suivantes :

Théorème 3.3.1. *$C(\lambda)$ est un ensemble compact, non dénombrable, d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. On voit clairement, par le théorème des segments emboités, que les éléments de $C(\lambda)$ sont en bijection avec l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ (auquel il faut elever les suites stationnaires à 2, mais elles sont en nombre dénombrable) qui est de cardinal indénombrable.

On voit qu'au rang n, la mesure de Lebesgue du n^{ime} iteré est $(2\lambda)^n$, ce qui tend vers 0.

A chaque étape de l'itération, on a un fermé, par réunion finie de fermés. Par intersection, l'ensemble de Cantor est donc fermé, et clairement borné, donc compact.

On vient de voir que les segments composant la n^{ime} itération sont de longeur λ^n, séparés par un intervalle de longeur $(1-2\lambda)^n$, donc soit $x \in C(\lambda)$, aucune boule de centre x et de rayon strictement positif ne peut donc être incluse dans $C(\lambda)$.

□

On peut naturellement se demander quelle est sa dimension de Hausdorff.

Théorème 3.3.2. *La dimension de Hausdorff de $C(\lambda)$ est $s_0 = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}$*

Démonstration. **Une majoration des s-mesures de Hausdorff**
C peut se recouvrir par les intervalles $(I_{n,j})_{1\leq j\leq 2^n}$ à n fixé. On a donc :

$$H^s_{\lambda^n}(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} d(I_{n,j})^s \leq (2\lambda^s)^n$$

Or, pour $s = s_0$, la s-mesure de Hausdorff ne peut valoir l'infini. Donc $\dim_{\mathrm{H}}\mathrm{C} \leq \mathrm{s}_0$.
Et on conclut... Il suffit pour conclure de montrer que $H^{s_0}(C)$ est non nul. Cela découle directement du lemme qui suit. En effet, on peut se restreindre à des intervalles ouverts par le théorème 3.1.2. □

Lemme 3.3.1. *Soit $(I_j)_{j\geq 1}$ une famille d'intervalles ouverts recouvrant $C(\lambda)$. Alors, on a*

$$\sum_j d(I_j)^{s_0} \geq 1/4$$

Démonstration. C est compact, donc on peut se restreindre aux sommes finies. C est en outre d'intérieur vide. Rien ne nous empeche donc, quitte à augmenter les I_j d'une quantité ϵ arbitrairement petite, de suppose que les bords des intervalles d'appartiennent pas à C. Soit γ la plus petite distance de C au bords d'un des intervalles. On peut donc choisir n_0 assez grand pour que les intervalles de la n_0-ième génération soit toujours contenus dans un des I_j.
Démontrons une petite inégalité
Soit I un intervalle ouvert quelconque de $[0,1]$. Soit n_1 le plus petit rang n à partir duquel un des $I_{n,j}$ appartient à I. Comme n_1 est minimal, I rencontre $p \leq 4$ intervalles de la génération n_1, soient les I_{n_1,j_k} où k parcourt les entiers de 1 à p.On en déduit :

$$4d(I)^{s_0} \geq \sum_{1\leq k\leq p} d(I_{n_1,j_k})^{s_0} \geq \sum_{1\leq k\leq p} \sum_{I_{l,j}\subset I_{n_1,j_k}} d(I_{l,j})^{s_0} \geq \sum_{I_{l,j}\subset I} d(I_{l,j})^{s_0}$$

à l fixé. On a utilisé pour démontrer la deuxième inégalité la concavité de $x \mapsto x^{s_0}$ et l'inégalité de Jensen, car

$$\sum_{I_{l,j}\subset I_{n_1,j_k}} d(I_{l,j}) \leq d(I_{n_1,j_k})$$

.

On a presque fini :
Par conséquent, on peut conclure en disant que :

$$4\sum_j d\left(I_j\right)^{s_0} \geq \sum_j \sum_{I_{n_0,j}\subset I_j} d\left(I_{n_0,j}\right)^{s_0} \geq \sum_{i=1}^{2^{n_0}} d\left(I_{n_0,i}\right)^{s_0} = 1$$

□

3.4 t-énergie et lemme de Frostman

On vient de voir que la partie la plus difficile lorsqu'on veut détermner une dimension de Hausdorff est la minoration de la dimension. En effet, pour la majorer, il suffit de trouver un recouvrement telle que la s_0-mesure soit bornée et ce recouvrement est en général naturel. La minoration demande elle plus de travail. Pour remédier à cela, il existe le lemme de Frostman, que nous allons à présent introduire.

Définition 3.4.1. *Soit μ une mesure.*
On appelle t-énergie, pour t réel strictement positif la quantité, notée $I_t(\mu)$, suivante :

$$\int\int |x-y|^{-t} d\mu(x)\, d\mu(y)$$

où l'intégration se fait sur tout l'espace.

Nous allons avoir besoin des deux résultats suivant pour pouvoir démontrer la formule KPZ.

Théorème 3.4.1. *Supposons que μ soit une mesure sur $\mathbb{R}^n$ de masse totale finie et non identiquement nulle.*

i Supposons que

$$\mu\left(B\left(x,r\right)\right) \leq cr^s \tag{1}$$

pour un certain s strictement positif. Soit t strictement positif et strictement inférieur à s. Alors la t-énergie est finie.

ii Si la t-énergie est finie, alors on a $\nu\left(B\left(x,r\right)\right) \leq cr^s$ où ν est la restriction[1] *de μ à un sous-ensemble de l'espace.*

En fait, il s'agit de conditions controlant que μ ne charge "pas trop" des régions restreintes de l'espace.

Démonstration. i

$$\int |x-y|^{-t} d\mu(y) = \int_0^\infty \mu\left(\left\{y : |x-y|^{-t} \geq u\right\}\right) du = \int_0^\infty \mu\left(B\left(x, u^{-1/t}\right)\right) du$$

1. la restriction d'une mesure α à un ensemble M est la mesure qui associe à une partie A de E la valeur $\alpha\left(A \cap M\right)$

$$= t\int_0^\infty r^{-t-1}\mu\left(B\left(x,r\right)\right)dr,$$

par un changement de variable. En injectant l'hypothèse 1, on obtient le résultat voulu.

ii On pose $R_M := \left\{x : \int |x-y|^{-s}d\mu\left(y\right) \leq M\right\}$ Comme la t-énergie est finie, l'intégrande en x est bornée presque partout, donc il existe M tel que R_M soit de μ-mesure non nulle. On prendra alors ν la restriction de la mesure à ce R_M. Alors :

$$r^{-s}\nu\left(B\left(x,r\right)\right) \leq \int_{B(x,r)} |x-y|^{-s} \leq M$$

car $|x-y| \leq r$ dans la boule de centre x et de rayon r. La proprieté est donc vraie pour tout $x \in R_M$ avec $c = M$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Deux cas se présentent : si $B\left(x,r\right)$ ne rencontre pas R_M, alors la ν-mesure de l'ensemble est nulle, et il n'y a rien à vérifier,et s'il y a z à la fois dans R_M et dans la boule, alors la boule est recouverte par $B\left(z,2r\right)$ qui vérifie la proprieté précédente :

$$r^{-s}\nu\left(B\left(x,r\right)\right) \leq 2^s(2r)^{-s}\nu\left(B\left(z,r\right)\right) \leq 2^sM$$

D'où le résultat avec finalement $c = 2^sM$.

□

Définition 3.4.2 (Ensembles F_σ et cubes dyadiques)**.** *Un borélien B est appelé ensemble F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés.*
Un cube dyadique de $\mathbb{R}^n$ est un cube de $\mathbb{R}^n$ dont les arètes ont pour longueur un nombre du type $2^{-k}, k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 3.4.2 (Lemme de Frostman)**.** *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$. La s-mesure de Hausdorff de B est strictement positive si et seulement si il existe une mesure de Radon μ, de masse totale finie, non nulle, à support compact inclu dans B tel que $\mu\left(B\left(x,r\right)\right) \leq r^s$ pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout r strictement positif. On peut de plus imposer $\mu\left(B\right) \geq cH^s\left(B\right)$ où $c > 0$ ne dépend que de n.*

Démonstration. i Condition suffisante : Soit un tel μ. On a $H^s\left(B\right) \geq H^s_\delta\left(B\right)$ et donc si on se donne ϵ strictement positif arbitraire, et par définition de l'infimum, on peut trouver :

$$H^s\left(B\right) + \epsilon \geq \sum_i d\left(A_i\right)^s$$

où les A_i sont de diamètre inférieur à δ. On note $r_i = d\left(A_i\right)$. En utilisant l'hypothèse sur la mesure μ, on obtient :

$$H^s\left(B\right) + \epsilon \geq \sum_i \mu\left(B\left(x_i,r_i\right)\right) \geq \mu\left(B\right)$$

où on a pris x_i dans A_i. Comme μ a été supposée non triviale et de support inclu dans B, on a $\mu\left(B\right) > 0$. En faisant maintenant tendre ϵ vers 0, on a le résultat voulu.

ii Condition nécessaire : On se limitera au cas où B est un ensemble compact. Soit D_k la famille des cubes dyadiques de cotés de longueur 2^{-k}. Soit k un entier. On va construire une suite de mesures :

$$\forall D \in D_k \ \mu^k_{k|D} = 2^{ks} \lambda(D)^{-1} \lambda_{|D}$$

si D rencontre B et

$$\mu^k_{k|D} = 0$$

sinon. On a posé λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
On continue alors par récurrence : Pour tout p entier, si la mesure μ^k_{k-p} a été construite,on définit alors pour tout $C \in D_{k-p-1}$

$$\mu^k_{k-p-1|C} = \eta(C)\, \mu^k_{k-p|C}$$

où on a posé

$$\eta(C) = min\left\{1, 2^{(-k+p+1)s} \mu^k_{k-p}(C)^{-1}\right\}$$

On arrête le processus lorsque on a p_0 tel que B soit inclu dans un cube dyadique de rang $k - p_0$ et on pose $\mu^k := \mu^k_{k-p_0}$. On remarquera que la récurrence consistait à vérifier que chaque cube dyadique ne reçoit pas une masse trop importante. En fait, la masse d'un cube donnée étant décroissante en $k - p$ pour μ^k_{k-p}, on a pour tout $C \in D_{k-p}$ pour tout p entier relatif,

$$\mu^k(C) \leq 2^{(p-k)s}$$

avec pour chaque $x \in B$ l'égalité qui est réalisée pour au moins un cube dyadique contenant x.

Pour chaque x dans B on prend C le plus grand cube dyadique réalisant l'égalité précédente. On a donc recouvert B par $C_1, C_2, \dots$ cubes disjoints. Chaque de ces cubes est chargé d'une masse non nulle, donc $\mu^k = \mu^k_{k-p_0}$ est une mesure non nulle sur $\mathbb{R}^n$ de support inclu dans $\bigcup_i C_i$. On a :

$$\mu^k(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{r} \mu^k(C_i) = n^{s/2} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{diam}(\mathrm{C_i})^{\mathrm{s}} \geq \mathrm{n}^{-\mathrm{s}/2}\mathrm{C}$$

où C est une constante strictement positive minorant les sommes intervenant dans $H^s_\infty(B)$, ce qui est possible car cette quantité est non nulle car $H^s(B)$ est non nulle. L'égalité du milieu provient de ce que $\mu^k(C_i) = 2^{s(p-k)}$ et que C_i a une diagonale de longueur $\sqrt{n}2^{k-p}$, ce qui correspond à son diamètre. Pour simplifier, on va normaliser μ^k en le divisant par sa masse totale. On supposera donc $\mu^k(\mathbb{R}^n) = 1$. Pour tout C cube dyadique, on a donc

$$\mu^k(C) \leq 1/Cn^{s/2} 2^{(p-k)s}$$

On a donc une suite $\left(\mu^k\right)_k$ de mesures de probabilité sur le compact B. Or, les probabilités sur un compact sont compact, et donc quitte à extraire, on

suppose $\mu^k \to \mu$ où μ est une mesure de proba sur B.
Soit $B(x,r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. On peut alors recouvrir cette boule par au plus [2] 2^n cubes dyadiques de rang m vérifiant

$$r \leq 2^{-m}/2 \leq 2r \tag{2}$$

ce qui donne en particulier

$$n^{1/2}2^{-m} \leq 4n^{1/2}r \tag{3}$$

. Soit U l'intérieure de la réunion de ces cubes. On a alors :

$$\mu^k(U) \leq 2^n 1/Cn^{s/2}2^{-ms}$$

En injectant l'hypothèse 3, on a que $\mu^k(U)$ est bornée par une constante A indépendante de k, de x et de r, multipliée par r^s. Alors :

$$\mu(B(x,r)) \leq \mu(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu^n(U) \leq Ar^s$$

□

Nous allons à présent minorer la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor $C(1/3)$ grâce au lemme de Frostman de manière plus élégante et plus naturelle qu'avec le procédé ci-dessus.

Théorème 3.4.3. $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{C}(1/3) \geq \log 2/\log 3$

Démonstration. On note C_n la n-ième itération du procédé de construction de l'ensemble de Cantor et on pose pour tout n dans (N) $\mu_n = \frac{3}{2}^n \lambda_{|C_n}$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On vérifie sans peine que les μ_n sont des mesures de probabilités et par compacité, quitte à extraire, μ_n converge vers une mesure de probabilité μ.
μ est à support dans $C(1/3)$ car si $A \subset C(1/3)^c$, alors il existe n tel que A n'est pas inclu dans C_n et alors à partir de ce rang, les μ_p, $p \geq n$ chargent A d'une mesure nulle.
Soit $B(x,r)$. Supposons dans un premier temps que r s'écrivent sous la forme $r = 3^{-p}$.
On a $\mu([0,1/2] \cap C(1/3)) + \mu([1/2,1] \cap C(1/3)) = \mu(C(1/3)) = 1$ et donc par symétrie, on a $\mu([0,1/2] \cap C(1/3)) = 1/2$. Par récurrence, les intervalles élémentaires de $C(1/3)$ de niveau n sont chargés par μ d'une masse $(1/2)^n$.
Donc $B(x,3^{-p})$ a une μ-masse d'au plus $(1/2)^p = r^{\log 2/\log 3}$.
Si maintenant $r = m3^{-p}$ où m est en entier, par additivité de μ, sa masse est d'au plus $m(1/2)^p \leq r^{\log 2/\log 3}$.
Or les nombres tryadiques sont denses dans $\mathbb{R}$. Par conséquent $\mu(B(x,r) \cap C(1/3)) \leq r^{\log 2/\log 3}$ reste vraie pour tout nombre r réel. En utilisant alors le théorème 3.4.2, on a $H^{\log 2/\log 3}(C(1/3)) > 0$, d'où $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{C}(1/3) \geq \log 2/\log 3$. □

2. En fait, $B(x,r)$ est contenu dans exactement un cubes de coté 2^{-m} tel que $r \leq 2^{-m}/2 \leq 2r$, mais comme les cubes dyadiques doivent en plus avoir un centre qui est à coordonnées entières, il suit que dans le pire des cas, la boule peut-être recouvert par 2^n tels cubes.

3.5 Digression : D'autres dimensions dans un espace métrique

Les résultats suivants ne nous serviront pas dans la démonstration de KPZ. Ils sont donnés uniquement pour compléter le propos.

Définition 3.5.1. *i La s-capacité de $A \subset IR^n$ est*

$$C_s(A) = sup\left\{I_s(\mu)^{-1} | \mu \in M\right\}$$

où M est l'ensemble des mesures de Radon, non nulles, à support inclu dans A et de masse totale 1.

ii Soit $A \subset IR^d$. On appelle dimension capacitive de A la quantité suivante : $dim_c A = \sup\{s | \exists$ mesure non triviale de masse totale finie, à suport compact inclu dans A et telle que $\mu(B(x,r)) \leq r^s$ pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout r strictement positif.
D'après la définition précédente et le théorème 1.4.1, on a aussi

$$dim_c(A) = sup\{s | C_s(A) > 0\}$$

Théorème 3.5.1 (Rapport entre dimension capacitive et dimension de Hausdorff)**.** *Soit A borélien de IR^n. Alors $dim_c(A) = dim(A)$*

Démonstration. i Si $H^s(A) > 0$, alors, par le lemme de Frostman, on se donne une mesure μ convenable. Par le théorème 3.4.1, on obtient que $I_t(\mu) < \infty$ pour $t < s$. Donc $C_s(A) > 0$. Il suit que $dim_c(A) \geq dim(A)$.

ii Supposons $C_s(A) > 0$. On se donne donc une mesure μ convenable. $Is(\mu) < \infty$.
Soit ϵ_1 strictement positif et u strictement supérieur à s fixés.. par le théorème 3.4.1, on se donne ν restriction de μ à un certain sous-ensemble tel que :

$$\nu(B(x,r)) \leq cr^u$$

Alors, on se donne (A_i) un recouvrement de A en notant r_i le diamètre de A_i.

$$c(H^u(A) + \epsilon) \geq c\sum_i r_i^u \geq \sum_i \nu(B(x_i,r)) \geq \nu(A)$$

où les x_i sont pris à chaque fois dans $A_i \cap A$.
En faisant tendre ϵ vers 0, on a $H^u(A)$ qui est strictement positif pour tout u strictement supérieur à s. On vient donc de montrer que $dim_c(A) \leq \mathrm{dim_H}(\mathrm{A})$

□

Ce résultat est très satisfaisant, car nous obtenons la même dimension sur des ensemble sur lesquels les deux définitions ont un sens.

Dans la définition de la dimension de Hausdorff, nous nous sommes autorisés à des recouvrements par des sous-ensembles quelquonques. Regardons ce que nous obtenons si l'on se restreint à des boules :

Définition 3.5.2 (Dimension de Minkovski). *Soit $A \subset IR^n$ que l'on suppose borné. Pour $\epsilon > 0$, on pose $N(\epsilon)$ le nombre minimal de boules de rayons ϵ nécessaires pour recouvrir A. La dimension supérieure de Minkovski se définit alors par :*

$$\mathrm{dimsup_M A = inf\left\{s \middle| \limsup N\left(\epsilon\right) \epsilon^s = 0\right\}}$$

et la dimension inférieure de Minkovski par :

$$\mathrm{diminf_M A = inf\left\{s \middle| \liminf N\left(\epsilon\right) \epsilon^s = 0\right\}}$$

On en déduit :

Théorème 3.5.2. *On a la série d'inégalité suivante :*

$$\mathrm{dim_H A \leq diminf_M A \leq dimsup_M A \leq n}$$

Démonstration. Les trois premières inégalités sont évidentes vu que l'on s'est juste restreint dans le type d'ensemble que l'on peut prendre dans les s-mesures de Hausdorff et par définition de liminf et limsup. La troisième inégalité provient de ce que A étant borné et de ce qu'un cube de longeur d'arête l est recouvert par au plus $(2 * l/\epsilon)^n$ boules. □

4 Quelques éléments sur les cascades multiplicatives

4.1 Construction des mesures et propriétés

Pour définir la métrique aléatoire sur $[0, 1]$, il nous faut définir une mesure par un procedé de cascade multiplicative

Définition 4.1.1. *On pose $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des intervalles dyadiques de longueur 2^{-n} de $[0, 1]$, I la réunion de tous ces intervalles. On se donne $(W_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi W. On suppose que la moyenne de W vaut 1.*
On va définir les mesures suivantes :
μ_0 est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$
$\mu_n = w_n \mu_0$ avec $w_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(x)}$ où $I_j(x)$ désigne l'intervalle dyadique de $\mathcal{I}_j$ qui contient x.

Théorème 4.1.1 (Existence de la limite). *μ_n converge presque sûrement étroitement.*

Démonstration. Soit $0 < r < 1$. On supposera dans un premier temps que r est dyadique. Montrons que $\mu_n([0, r])$ est une martingale (pour la filtration naturellement engendrée par les variables aléatoires W_I, à savoir $\mathcal{F}_n := \sigma(\{W_I$ où I est un intervalle dyadique de niveau inférieur ou égale à $n\}))$.

$$E\left(\mu_{n+1}\left[0,r\right]|F_n\right) = \sum_{I\in\mathcal{I}_{n+1}, I\subset[0,r]} E\left(W_{I_1}\ldots W_{I_{n+1}} * 2^{-n-1}|\mathcal{F}_n\right)$$

d'après la définition de μ et où on a posé $I_j \in \mathcal{I}_j$ pour tout j et $I_{n+1} \subset I_n \subset \ldots \subset I_1$. Donc :

$$E\left(\mu_{n+1}\left[0,r\right]|\mathcal{F}_n\right) = \sum_{I\in\mathcal{I}_{n+1}, I\subset[0,r]} W_{I_1}\ldots W_{I*_n} E\left(W\right) 2^{-n-1}$$

En rassemblant deux intervalles dyadiques de rang $n+1$ on obtient un intervalle dyadique de rang n, et donc on a bien que c'est une martingale.
Comme cette martingale est en plus positive, elle converge presque sûrement.
Donc il existe F forme linéaire continue sur les fonctions en escalier sur $[0,1]$ dont la subdivision adaptée associée à des extremités sous forme de dyadiques tel que $\int \phi d\mu_n \to F\left(\phi\right)$.
Les fonctions ϕ de la forme précédentes sont denses dans les fonctions continues sur $[0,1]$. On pose alors

$$F\left(\psi\right) = \lim F\left(\phi_n\right) \text{ lorsque } \phi_n \to \psi$$

avec ψ une fonction continue donnée à l'avance, et ϕ_n des fonctions en escalier avec des subdivisions dyadiques. La continuité de F sur les fonctions en escalier dyadique assure que F est bien définie sur toutes les fonctions continues.
F est continue. En effet :

$$\left|F\left(\phi\right) - F\left(\zeta\right)\right| \leq \left|F\left(\psi\right) - F\left(\psi_n\right)\right| - \left|F\left(\psi_n\right) - F\left(\psi_n\right)\right| - \left|F\left(\psi_n\right) - F\left(\phi\right)\right|$$

Le théorème de représentation de Riesz assure alors que F est représenté par une emsure μ qui est la limite étroite des μ_n. □

Lemme 4.1.1. *Si on suppose que $E\left(W\log_2 W\right) < 1$, ce qu'on supposera dorénavant dans la suite, alors presque sûrement μ n'a pas d'atomes et $\mu\left[0,1\right] > 0$.*

Démonstration. i On posera à partir de maintenant dans toute la suite $l = \mu\left[0,1\right]$.
On note Z la μ-mesure du plus grand atome de μ (Z est bien mesurable par rapport à la loi de probabilité car $Z = \max_{x\in[0,1]} \mu\left(\{X\}\right)$). On posera également Z_1, Z_2 variables aléatoires de même loi que Z tel que Z, Z_1, Z_2, W soient indépendants. Alors, par construction de μ et parce que la mesure de Lebesgue μ_0 est "homogène" d'ordre 1, la mesure du plus grand atome de μ sur $[0,1/2]$ a la même loi que $W * Z_1/2$ et la mesure du plus grand atome de μ sur $[1/2,1]$ a la même loi que $W * Z_2/2$. Donc la loi de Z est la même que celle de $W \max\left(Z_1, Z_2\right)/2$. Donc :

$$E\left(Z_1 + Z_2\right)/2 = E\left(Z\right) = E\left(W \max\left(Z_1, Z_2\right)/2\right) = E\left(\max\left(Z_1, Z_2\right)/2\right)$$

par indépendance des variables. Or $Z_1 + Z_2 \geq \max\left(Z_1, Z_2\right)$ et donc on a l'égualité presque sûrement. Si l'une des deux variables Z_1, Z_2 étaient strictement positive, alors l'autre devrait être nulle. Par indépendance des variables, les deux doivent être nulles presque sûrement.

ii Posons $a = E(Wlog_2 W) < 1$. On pose aussi $l_n = \mu_n[0,1]$ et $b_n = E(l_n log_2 l_n)$. Comme avant, on voit que si l'on se donne l'_n, l''_n de même loi que l, indépendant entre eux et avec W, alors l_{n+1} a la même loi que $W(l'_n + l''_n)/2$. Donc :

$$b_{n+1} = E(W/2(l'_n + l''_n) log_2 W) + E(W/2(l'_n + l''_n) log_2(l'_n + l''_n)) + E(W/2(l'_n + l''_n) log_2 1/2)$$

Il est en outre facile de voir que $E(l_n) = 1$. Donc :

$$b_{n+1} = a + E(l'_n log_2(l'_n + l''_n)) - 1$$

Ou encore

$$b_{n+1} - b_n = a - 1 + E(l'_n log_2(l'_n + l''_n)) - E(l'_n log_2 l'_n) = a - 1 + E\left(l'_n log_2\left(\frac{l'_n + l''_n}{l'_n}\right)\right)$$

Or $x \mapsto log(1 + x/l'_n)$ est concave et on peut donc appliquer Jensen (en une seule variable : l''_n) :

$$b_{n+1} - b_n \leq a - 1 + E(l'_n log_2(1 + E(l''_n)/l'_n)) = a - 1 + E(l'_n log(1 + 1/l'_n))$$

On a alors une infinité de n tels que $b_{n+1} - b_n > \frac{a-1}{2}$ car sinon, comme $a < 1$, b_n décroitrait vers l'infini, ce qui est absurde, compte tenu du fait que $b_n \geq \inf_{0<x<1} x \log_2 x > -\infty$.
Pour un tel n, on a alors : $E(l_n log_2(1 + 1/l_n)) > (1-a)/2$. Or $x \mapsto x \log_2(1 + 1/x)$ est aussi majoré par, disons c, donc on a la chaine d'inégalités suivantes :

$$(1-a)/2 < E(l_n \log_2(1 + 1/l_n)) \leq cP(l_n \geq \epsilon) + sup_{0<x<\epsilon}\{x \log_2(1 + 1/x)\}$$

pour tout ϵ strictement positif. En prenant ce dernier assez petit, le dernier terme du membre de droite peut être rendu plus petit que, disons, $(1-a)/4$. Donc la probabilité que l_n soit plus grand qu'un certain ϵ strictement positif est non nulle pour ϵ bien choisi : $P(l > 0) > 0$.
Prenons $l' = 2\mu[0,1/2]/W_{[0,1]}$ et $l'' = 2\mu[1/2,1]/W_{[0,1]}$. Or, $l = 0$ si et seulement si $l' = 0, l'' = 0$ et de plus ces deux variables aléatoires ont la même loi que l.Donc :

$$P(l = 0) = P(l' = 0 et l'' = 0) = P(l = 0)^2$$

Donc (c'est une sorte de loi du 0-1), cette probabilité vaut 0 ou 1. On a montré qu'elle est strictement inférieure à 1 : elle vaut donc 0.

□

Lemme 4.1.2. *Avec les notations précédentes, supposons que pour un r strictement positif, on ait $E(W^{-r})$ qui soit fini. Alors, il existe r_0 tel que $E(l^{-r_0})$ soit fini.*

Démonstration. On a par hypothèse que $E\left(W^{-r}\right) < \infty$. L'inégalité de Markov nous permet d'affirmer que $x^{-r}P\left(W < x\right) = x^{-r}P\left(W^{-r} < x^{-r}\right) \leq E\left(W^{-r}\right)$. Donc,

$$x^{-s}P\left(X < x\right) \to 0 \tag{4}$$

pour tout $s < r$, lorsque x tend vers 0.

On pose de plus $l_1 = 2\mu\left[0,1/2\right]/W, l_2 = 2\mu\left[1/2,1\right]/W$, qui ont même loi que l et l_1, l_2, W sont indépendants.
Pour b, x tels que $bx > 0$, on a : si $l < bx/2$, alors on ne peut clairement pas avoir à la fois $w \geq x, l_1 + l_2 \geq b$. Donc :

$$P\left(l < bx/2\right) \leq P\left(W < x\right) + P\left(l_1 + l_2 < b\right) \leq P\left(W < x\right) + P\left(l < b\right)^2 \tag{5}$$

On se donne pour tout j dans $\mathbb{N}$, $\epsilon_j = 2^{-2^j-1}$ et $b_0 > 0$ tel que $P\left(l < b_0\right) \leq \epsilon_0$. Un tel b_0 existe car l est presque sûrement non nulle, par le lemme 4.1.1. On pose en outre :

$$x_j = \sup\left\{x|P\left(W < x\right) \leq \epsilon_j^2\right\}$$

On définit alors :

$$b_{j+1} = b_j x_j/2$$

On veut alors utiliser 5 pour dire que $P\left(l < b_j\right) \leq \epsilon_j$, dans la mesure où on l'a supposé vrai au rang 0 et que cela passe à la réccurence par la formule suivante :

$$P\left(l < b_{j+1}\right) \leq P\left(W < x_j\right) + \epsilon_j^2 \leq 2\epsilon_j^2 = \epsilon_{j+1}$$

Supposons que $P\left(W < \epsilon_j^{2/r}\right) > \epsilon_j^2$ pour un nombre infini de j, alors $\epsilon_j^{-2}P\left(W < \epsilon_j^{2/r}\right) > 1$, ce qui est exclu par l'équation 4. Donc, on a $x_j \geq \epsilon_j^{2/r}$ sauf peut-être pour un nombre fini de j. Donc, $b_j = 2^{-j}b_0\prod_{k=0}^{j-1}x_k \geq A2^{-j}\prod_{k=0}^{j-1}\epsilon_k^{2/r}$.
Donc

$$b_j = A2^{-j-2\left(j-1+2^j\right)/r}$$

On arrive donc à la conclusion que :

$$E\left(l^{-\delta}\right) \leq b_0^{-\delta} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1}^{-\delta}P\left(b_{j+1} \leq l < b_j\right)$$

Or, on a à partir d'un certain rang que $(j+1) + 2j \leq 2^j$, donc $j + 1 + 2\left(j + 2^{1+j}\right)/r \leq 5 * 2^j/r$. On a donc $b_j^{-\delta} \leq 2^{5*\delta 2^j/r}$.
De plus $P\left(b_{j+1} \leq l < b_j\right) \leq P\left(l < b_j\right) \leq \epsilon_j = 2^{-^j-1}$. Le terme général de la série est donc majoré par $2^{-2^j-1+5\delta 2^j/r}$. C'est une série convergente (géométrique) pour $\delta < r/5$.

□

Lemme 4.1.3. *Soit $r > 0$. Supposons que $E\left(W^{-r}\right)$ soit fini. Alors, $E\left(l^{-r}\right)$ est aussi fini (avec les notations précédentes).*

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du lemme précédent pour l_1, l_2. On a donc $l = W\frac{l_1+l_2}{2}$. Comme $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, on a $W\sqrt{l_1 l_2} \leq l$.Donc :

$$E\left(l^{-s}\right) \leq E\left(W^{-s}\right) E\left(l_1^{-s/2}\right)^2$$

On va appeller $S = \{s > 0 | E\left(l^{-s}\right) < \infty\}$. D'après le lemme précédent, il est non vide. En fait, en reprenant la démonstration du lemme précédent, on a que tout $[0, \delta_0 = r/5]$ est inclu dans S.
De plus $s \mapsto E\left(l^{-s}\right)$ est convexe, donc S est un intervalle contenant $[0, \delta_0]$.
Avec un argument de convexité, et comme $E(1) < \infty(!)$ et $E\left(W^{-r}\right) < \infty$, on a que l'espérance que W^{-s} est finie sur $[0, r]$.
L'inégalité que nous avons obtenue avant nous montre alors que $[0, r] \cap 2S \subset S$.
Donc S contient tout $[0, r]$, car sinon, si $S = [0, a], a < r$ par exemple, alors $[0, r] \cap [0, 2a] \subset [0, a]$, ce qui est absurde.

□

5 La formule mKPZ et sa preuve

Dans cette partie on va prouver une formule qui relie la dimension de Hausdorff par rapport à une distance aléatoire et celle par rapport à la distance euclidienne sur $[0, 1]$. La preuve qui suit est modifiée à partir de l'article initial [1]. Le lecteur intéressé par l'origine physique de cette formule pourra consulter par exemple l'article [5].

Théorème 5.0.2 (mKPZ). *On suppose que*

$$E\left[W^{-s}\right] < \infty, \forall s \in [0, 1[\tag{6}$$

Et, $E[W \log_2 W] < 1, E[W] = 1, P[W > 0] = 1$.*Soit* $K \subset [0, 1]$ *un ensemble non vide fixé borélien, soit* ξ_0 *la dimension de Hausdorff de* K *par rapport à la distance euclidienne, et* ξ *la dimension de Hausdorff par rapport à la distance aléatoire* ρ*, alors, p.s,* ξ *est l'unique solution de l'équation*

$$2^{\xi_0} = \frac{2^{\xi}}{E\left[W^{\xi}\right]}$$

d'inconnu ξ *dans* $[0, 1]$

On commence par remarquer que (cf.Introduction) la mesure (aléatoire) μ définit bien une distance (aléatoire). A savoir, μ n'a pas d'atome,(ce que l'on a déjà montré) et que son support est plein(i.e. μ n'attribue pas une masse nulle à un intervalle non trivial). Pour le deuxième point, voir la remarque à la fin du lemme 4.0.5.

Avant de donner la preuve, discutons deux cas particuliers de ce théorème :
Quand $\log W$ est une variable aléatoire gaussienne, disons $\log W \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

où la moyenne m et la variance σ^2 sont telles que $E[W] = 1$, par un calcul rapide, on obtient $m = -\sigma^2/2$. Dans ce cas, $E[W \log_2 W] < 1$ est équivalente à $\sigma^2 < \log 4$ .Et la formule mKPZ précédente donne

$$\xi_0 - \xi = \frac{\sigma^2}{\log(4)} \xi(1-\xi)$$

C'est d'abord sous cette forme que les physiciens ont découvert la formule de KPZ, sans pouvoir en donner une preuve.
Deuxième cas particulier, on prend $W = 1 \pm \sigma$, suivant la loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. Alors la condition $E[W \log_2 W] < 1$ devient $|\sigma| < 1$ et la formule s'écrit

$$\xi_0 = 1 + \xi - \log_2(\frac{1}{2}(1-\sigma)^\xi + \frac{1}{2}(1+\sigma)^\xi)$$

La preuve de cette formule est longue et elle s'appuie sur les lemmes et théorèmes suivants :

Lemme 5.0.4 (L'unicité de solution pour l'équation précédente)**.** *Si on pose* $\phi(s) := s - \log_2 E[W^s]$*, alors* ϕ *est continue, strictement croissante et bijective de* $[0,1]$ *dans lui-même.*

Démonstration. Comme W est une v.a. strictement positive, $W^s \leq \max(W,1) \leq (W+1)$ qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, $\psi(s) = E[W^s]$ est continue en s, donc ϕ est continue.
ϕ est concave en s par l'inégalité de Hölder. Donc elle est dérivable à gauche et à droite dans $]0,1[$. Or $\mathrm{E}[W \log_2 W] < 1$ donc par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, elle est aussi dérivable à gauche en 1, et

$$\phi'(1) = 1 - \frac{E[W \log_2 W]}{E[W]} = 1 - E[W \log_2 W] > 0$$

Par concavité ϕ est strictement croissante sur $[0,1]$. On conclut en remarquant que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. On a donc bien l'unicité dans le théorème. $\square$

Lemme 5.0.5 (une formule dont la preuve est élémentaire mais importante pour bien comprendre les cascades multiplicatives. Ce résultat sera utilisé plusieurs fois dans la suite)**.** *Soit* $[a,b]$ *un intervalle dyadique* $\in I_n$*, alors*

$$E[\mu[a,b]^s] = 2^{-ns} E[W^s]^n E[\mu[0,1]^s] = 2^{-ns} E[W^s]^n E[l^s] \ (7)$$

Démonstration. Pour $m \geq n$,

$$\mu_m[a,b] = \int_a^b \prod_{j=0}^{m-1} W_{I_j(x)} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(x)} \prod_{j=n}^{m-1} W_{I_j(x)} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(a)} \prod_{j=n}^{m-1} W_{I_j(x)}\, \mathrm{d}x$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(a)} \int_a^b \prod_{j-n=0}^{m-1-n} W_{I_j(x)}\, \mathrm{d}x$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(a)} 2^{-n} \int_a^b \prod_{j-n=0}^{m-1-n} W_{I_j(x)} 2^n\, \mathrm{d}x$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(a)} 2^{-n} \int_0^1 \prod_{j-n=0}^{m-1-n} W_{I_j(f(y))}\, \mathrm{d}y$$

avec f la transformation affine naturelle qui envoie $[0,1]$ sur $[a,b]$ dont la jacobienne est évidemment 2^n. Dans ce dernier produit, le deuxiéme terme suit la même loi que

$$\int_0^1 \prod_{l=0}^{m-1-n} W'_{I_j(y)}\, \mathrm{d}y = \mu'_{m-n-1}[0,1]$$

Où on désigne par $(W'_I)_I$, une autre famille de v.a. i.i.d. suivant la même loi que W et indépendante de $(W_I)_I$, et $(\mu'_{m-n-1})_{n\geq 0}$ la suite de mesures obtenues par la même construction que $(\mu_n)_{n\geq 0}$. En particulier, cette nouvelle suite de mesures de proba converge aussi étroitement par les mêmes arguments.
On fait tendre m vers $+\infty$ et on obtient $\mu[a,b] = \prod_{j=0}^{n-1} W_{I_j(a)} 2^{-n} \mu'[0,1]$, avec μ' aussi limite étroite d'une suite de mesures suivant la même loi que μ donc par indépendance

$$E\left[\mu[a,b])^s\right] = 2^{-ns} E\left[W^s\right]^n E\left[\mu'[0,1]^s\right] = 2^{-ns} E\left[W^s\right]^n E\left[\mu[0,1]^s\right]$$

□

Remarque : ce résultat décrit une sorte d'invariance par changement d'échelle, qui est un phénomène assez courant en mathématiques. On peut penser par exemple aux ensembles de Cantor. Avec la même méthode, on peut montrer que p.s., si μ possède un atome, alors l'ensemble des atomes est dense dans [0,1], et encore, si μ s'annule sur un sous intervalle non trivial de [0,1], alors elle est nulle partout.
Avec ce lemme, on peut montrer facilement le prochain résultat, qui sera servi pour la preuve du théorème :

Lemme 5.0.6 (un résultat préliminaire). *Soient $x, y \in [0,1]$, et soit $s \in (0,1]$, ρ la distance aléatoire , alors*

$$E\left[\rho(x,y)^s\right] \leq 8|x-y|^{\phi(s)}$$

Démonstration. Le lemme précédent montre que, soit $[a,b] \in I_n, E\left[\rho(a,b)^s\right] = 2^{-ns}E\left[W^s\right]^n E\left[l^s\right] = |a-b|^{\phi(s)}E\left[l^s\right]$, Or par l'inégalité de Jensen $E\left[l^s\right] \leq E\left[l\right]^s$, on a donc le résultat quand $[x,y]$ est un intervalle dyadique.
Maintenant si $|y-x| \in]2^{-n-1}, 2^{-n}]$, alors $[x,y]$ peut être couvert par (au plus) deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ appartenant à I_n. Comme la distance aléatoire ρ est positive, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\rho(x,y)^s] &\leq E\left[\rho(a,b) + \rho(b,c)^s\right] \\
&\leq E\left[(2\rho(a,b))^s + (2\rho(b,c))^s\right] \\
&= 2^{1+s}E\left[\rho(a,b)^s\right] \\
&\leq 2^{1+s}|a-b|^{\phi(s)} \\
&\leq 2^{1+s+\phi(s)}|x-y|^{\phi(s)}
\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $\phi(s) \leq 1$ □

Théorème 5.0.3. *Soit K compact de [0,1], ξ_0 et ξ dimensions de Hausdorff de K respectivement par rapport à la distance euclidienne et la distance aléatoire définie précédemment, alors presque sûrement, $\phi(\xi) \leq \xi_0$*

Remarquons qu'ici, on n'exige pas que (6) soit nécessairement vraie.

Démonstration. On prouve

$$\mathcal{P} : \forall s \in [0,1], \phi(s) > \xi_0 \implies s \geq \xi \ p.s$$

cela concluera car sinon cette propriété $\mathcal{P}$ contredirait la continuité de ϕ. Montrons donc $\mathcal{P}$: Suppose que $t = \phi(s) > \xi_0$, par définition de la dimension de Hausdorff, $H^t(K) = 0$, donc quelque soit $\epsilon > 0$,K peut être recouvert par une famille au plus dénombrable d'intervalles $([x_i, y_i])_{i\geq 0}$ telle que $\sum_i |x_i - y_i|^t < \epsilon$ Par convergence monotone et le lemme précédent, on a

$$E\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s\right] \leq 8\sum_i |x_i - y_i|^t \leq 8\epsilon$$

En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$P\Big(\sum_i \rho(x_i, y_i)^s \geq 8\sqrt{\epsilon}\Big) \leq \frac{E\left[\sum_i \rho(x_i, y_i)^s\right]}{8\sqrt{\epsilon}} \leq \frac{8\epsilon}{8\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon}$$

C'est-à-dire, avec probabilité au moins égale à $1-\sqrt{\epsilon}$, K peut être recouvert par des boules (au plus dénombrables) dont la somme de rayons pour la distance ρ

vérifie $\sum_i r_i^s \leq 8\sqrt{\epsilon}$. Donc si on prend $\delta > 0$ quelconque, par définition,

$$P(H^s(K) \leq \delta) \geq 1 - \sqrt{\epsilon}, \forall \epsilon \,\text{tel que}\, 0 < 8\sqrt{\epsilon} < \delta.$$

Donc $P(H^s(K) \leq \delta) = 1$, et ce pour tout δ rationnel. Donc $P(H^s(K) = 0) = 1$. Il s'ensuit que $s \geq \xi$ p.s. La propriété $\mathcal{P}$ a été prouvée. □

Théorème 5.0.4. *Soit K, ξ_0 et ξ définis comme dans l'énoncé du théorème KPZ, alors p.s.,*

$$\xi \geq \sup\Big\{ s \in (0,1) : \phi(s) < \xi_0,\, E\left[W^s\right] < \infty \Big\}.$$

Démonstration. Soit s $\in (0,1)$ tel que $t := \phi(s) < \xi_0$ et $E\left[W^s\right] < \infty$, il faut prouver que $\xi \geq s$. Remarquons d'abord que $t \geq s$, car $t - s = -\log_2 E\left[W^s\right]$, ce terme vaut 0 quand $s = 0$ ou 1. Par concavité, $-\log_2 E\left[W^s\right] \geq 0$, quelque soit $s \in [0,1]$.
Or $t < \xi_0$, donc $H^t(K) = +\infty$,par le lemme de Frostman, il existe une mesure de probabilité sur K telle que :

$$\mathcal{E}_t(\nu_0) := \int\int |x-y|^{-t} d\nu\,(x)\, d\nu\,(y) < \infty$$

On pose $a := E\left[W^s\right], Z_I := W_I^s/a$ et on définit

$$f_n(x) := \prod_{j<n} Z_{I_j(x)}, \nu_n := f_n \nu_0$$

Comme pour chaque $a \in [0,1]$, la suite $(\nu_n[0,a])_n$ est une martingale positive (par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, avec $\mathcal{F}_n := \sigma(W_I, I \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j))$ donc elle converge p.s., et le même raisonnement montre que $(\nu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement. Donc le support de ν est contenu dans celui de ν_0, donc dans K
On définit

$$\rho_n(x,y) := \rho(x,y) \vee \mu(I_n(x)) \vee \mu(I_n(y))$$

Il est facile de vérifier que ρ_n est une mesure positive sur $[0,1]$. On veut estimer l'espérance de

$$\mathcal{E}(\nu_n;\rho_n) := \int\int \frac{d\nu_n\,(x)\, d\nu_n\,(y)}{\rho_n(x,y)^s}.$$

Il paraît donc naturel de calculer , pour x, y fixés dans [0,1],

$$E\left[f_n(x) f_n(y) \rho_n(x,y)^{-s}\right]$$

Soit k le plus petit entier tel que $[x,y]$ contienne certains intervalles de I_k.
Alors

$$|x-y| < 4 \cdot 2^{-k} \tag{8}$$

Soit $J \in I_k$ tel que $J \subset [x,y]$. On note J' l'unique élément de I_{k-1} tel que

$J' \subset J$. Alors par minimalité de k, on a soit $x \in J'$, soit $y \in J'$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \in J'$. On définit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par la famille finie de v.a. $\langle W_{I_j(x)}, W_{I_j(x)} : j < n \rangle$. On traite d'abord le cas où $k \leq n$. Sous cette hypothѷe, on a

$$E\left[\rho(x,y)^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq E\left[\mu(J)^{-s}|\mathcal{G}\right] = 2^{ks} E\left[l^{-s}\right] \prod_{j=0}^{k-1} {W_{I_j(x)}}^{-s} \tag{9}$$

La première inégalité est due simplement au fait que $J \subset [x,y]$ et que μ est une mesure positive. La deuxième utilise exactement la même preuve que dans le lemme 2 de cette section. On sait que $E\left[W^{-s}\right] < \infty$, par le lemme 2.1.3 on a aussi $E\left[l^{-s}\right] < \infty$. En utilisant (8), on obtient

$$(E\left[\rho_n(x,y)^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq) E\left[\rho(x,y)^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq C_s\,|x-y|^{-s} \prod_{l=0}^{k-1} {W_{I_l(x)}}^{-s},$$

où la constante C_s ne peut dépendre que de s et la loi de W. Or

$$f_n(x) = a^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} {W_{I_j(x)}}^{s},$$

et pareil pour $f_n(y)$. D'où,

$$E\left[f_n(x) f_n(y) \rho_n(x,y)^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq C_s\, a^{-2n} |x-y|^{-s} \prod_{j=k}^{n-1} {W_{I_j(x)}}^{s} \prod_{l=0}^{n-1} {W_{I_l(y)}}^{s} \tag{10}$$

Où l'on a utilisé une propriété spécifique de l'espérance conditionnelle et le fait que $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont $\mathcal{G}$-mesurables. $|x-y| > 2^{-k}$ (car $[x,y]$ contient $J \in I_k$) donc pour tout j entier $\geq k$, on a $I_j(x) \neq I_j(y)$. En prenant l'espérance et en utilisant l'indépendance des variables, on obtient (en notant C'_s une autre constante)

$$E\left[f_n(x) f_n(y) \rho_n(x,y)^{-s}\right] \leq C'_s\,|x-y|^{-s} a^{-k} \leq C'_s\,|x-y|^{-s+log_2 a} = C'_s\,|x-y|^{-t}$$

Où dans la dernière inégalité, on a utilisé $|x-y| > 2^{-k}$

Traitons maintenant le cas contraire où $k > n$. Ce qui change par rapport au cas précédent, c'est que les $(W_{I_j(x)})_{0 \leq j \leq k-1}$ ne sont plus toutes mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{G}$. En effet, pour $n < j < k$, $W_{I_j(x)}$ est indépendante de $\mathcal{G}$, donc (10) n'est plus vraie. En revanche, de manière analogue, on a

$$E\left[\rho_n(x,y)^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq E\left[\mu(I_n(x))^{-s}|\mathcal{G}\right] \leq C''_s\, 2^{sn} \prod_{j=0}^{n-1} {W_{I_j(x)}}^{-s}$$

et

$$E\left[f_n(x) f_n(y) \rho_n(x,y)^{-s}\right] \leq C''_s\, 2^{ns} a^{-n} \leq C''_s\,|x-y|^{-t}$$

Où la dernière inégalité vient du fait $\frac{2^s}{a} \leq \frac{2^0}{1} \leq 1$, $k > n, t = \frac{2^s}{a}$ et $|x-y| > 2^{-k}$. Ce petit calcul est laissé au lecteur comme exercice.

Conclusion, dans les deux cas, on a une majoration uniforme du type

$$E\left[f_n(x)f_n(y)\rho_n(x,y)^{-s}\right] \leq C\,|x-y|^{-t},$$

pour tout $x, y \in [0,1]$. Avec une constante C indépendante de n. En intégrant cette inégalité par rapport à la mesure produit $d\mu_0(x)d\mu_0(y)$, on obtient

$$E\left[\mathcal{E}_s(\nu_n;\rho_n)\right] = E\left[\int\int \frac{f_n(x)f_n(y)}{\rho_n(x,y)^s} d\nu_0\,(x)\,d\nu_0\,(y)\right]$$

$$\leq C\int\int |x-y|^{-t} d\nu_0\,(x)\,d\nu_0\,(y) = C\,\mathcal{E}_t(\nu_0)$$

Où on a utilisé le théorème de Fubini-Tonnelli pour permuter l'espérance et l'intgrale double (tout est positive). Par construction de ρ_n, on a $\rho_n(x,y) \leq l$ quelque soit $x, y \in [0,1]$, donc toujours par Fubini, on obtient également,

$$E\left[l^{-s}(\nu_n[0,1])^2\right] \leq E\left[\mathcal{E}_s(\nu_n;\rho_n)\right] \leq C\mathcal{E}_t(\nu_0) \tag{11}$$

On utilise ensuite Hölder, et l'inégalité $E\,[l] \leq 1$

$$E\left[(\nu_n[0,1])^{2/(1+s)}\right] \leq E\left[l^{-s}(\nu_n[0,1])^2\right]^{1/(1+s)} E\,[l]^{s/(1+s)} \leq C'\mathcal{E}_t(\nu_0)^{1/(1+s)}$$

Donc la martingale $(\nu_n[0,1])_{n\geq 0}$ est bornée dans L^p avec $p = 2/(1+s) > 1$. Donc cette martingale converge aussi dans L^1, en particulier $E\left[(\nu[0,1])\right] = E\left[\nu_0[0,1]\right] = E\,[1] = 1$, donc l'événement $\{\nu[0,1] > 0\}$ a une probabilité > 0. Or cet événement est indépendant de n'importe quelle tribu engendrée par un nombre fini de v.a. Z_I.(Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la méthode utilisée dans le lemme 4.0.5, pour $[a,b]$ appartenant à I_n,on écrit $\nu_n[a,b]$ en l'intégrale d'un produit, on scinde le produit en deux morceaux indépendants entre eux, et on en déduit que l'événement $\{\nu[0,1] > 0\}$ ne dépend pas des W_J pour J dyadique de longueur comprise entre 0 et $n-1$. La loi de 0-1 de Kolmogorov permet ensuite de conclure). Par conséquent, sa probabilité est soit 0, soit 1. on obtient finalement $P(\nu[0,1] > 0) = 1$. (Autrement dit, p.s., la mesure limite aléatoire ν est non triviale)

On sait que p.s., μ n'admet pas d'atomes, donc p.s., ρ est une fonction (à deux variables) continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$. Pour tout x,la suite $(\mu(I_n(x)))_n$ est décroissante vers 0 (car μ n'a pas d'atome, et en utilisant le théorème de segments emboîtés), pareil si on remplace x par y. Donc par définition, $(\rho_k(\cdot,\cdot)^{-s})_k$, est une suite de fonctions positive décroissante vers $\rho(\cdot,\cdot)^{-s}$,par convergence monotone,

$$\mathcal{E}_s(\nu;\rho_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_s(\nu;\rho)$$

Soit $\epsilon > 0$, on choisit k tel que $\mathcal{E}_s(\nu;\rho_k) > \mathcal{E}_s(\nu;\rho) - \epsilon$. On sait ${\rho_k}^{-s}$ est une fonction continue bornée. En effet, ρ_k est minorée par $\min(\nu(I), I \in I_k)$ qui est p.s. strictement positive car on peut montrer que (p.s., $\nu(I) > 0\ \forall I \in I_k$) par la même preuve que pour ($\nu[0,1] > 0$ p.s.). Donc par définition de convergence étroite de mesures,

$$\mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_s(\nu; \rho_k)$$

donc

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_k) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_k) = \mathcal{E}_s(\nu; \rho_k) > \mathcal{E}_s(\nu; \rho) - \epsilon$$

la premiére inégalité est vraie car $\mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_n) \geq \mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_k)$ dès que $n \geq k$ par monotonie de $(\rho_j)_j$. Or ϵ est arbitraire, on a donc (une inégalité du type Fatou)

$$\mathcal{E}_s(\nu; \rho) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_s(\nu_n; \rho_n).$$

Cette dernière quantité est fini p.s. car on peut montrer que son espérance est finie en appliquant le lemme de Fatou habituel à (11). Comme $\nu[0,1] > 0$ p.s., on peut définir la mesure normalisée $\nu_{nor} := \nu/\nu[0,1]$,qui est une mesure de Radom positive à support dans K et de masse totale 1 telle que $I_s(\nu_{nor})^{-1} > 0$). Cela implique que $C_s(K) > 0$, où $C_s(K)$ est la s-capacité du compact K par rapport à la distance aléatoire ρ. Donc $\dim_c(K) \geq s$. Comme K est borélien, $\xi = \dim_c(K)$. D'où, p.s.,

$$\xi \geq s.$$

CQFD.

□

Fin de la preuve de la formule KPZ Nous avons déjà l'unicité de solution. Il suffit donc de montrer que ξ est bien une solution. C'est-à-dire $\xi_0 = \phi(\xi)$. Le théorème 3.0.3 donne $\xi_0 \geq \phi(\xi)$. Le théorème précédent donne l'inégalité dans le sens inverse (par contraposé). D'où l'egalité.

Références

[1].Itai.Benjamini et Oded Schramm. KPZ in one dimensional random geometry of multiplicative cascades. 2008 ,disponible sur http ://arxiv.org/abs/0806.1347

[2].Pertti Mattila. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[3].Rémi Rhodes et Vincent Vargas. KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures.2008, disponible sur http ://arxiv.org/abs/0807.1036

[4].E. Bacry et J.F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal

processes. disponible sur http ://arxiv.org/abx/0207094

[5].Bertrand Duplantier and Scott Sheffield. Duality and KPZ in Liouville Quantum Gravity,disponible sur http ://arxiv.org/abs/0901.0277

[6].Jean Bertoin. Levy processes, Cambridge University Press

[7].Kai Lai Chung. A Course in Probability Theory, Academic Press, New York