

# Groupes de tresses et associateurs

S. Biebler                      M. Lucas  
Sous la direction de Benoit Fresse

6 juillet 2011

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Complétion . . . . .	4
1.2	Produit tensoriel . . . . .	4
1.3	Algèbre de Hopf . . . . .	5
1.4	Associativité et commutativité . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Tresses parenthésées</b>	<b>7</b>
2.1	Opérations sur les tresses . . . . .	7
2.2	Catégories linéaires fibrées . . . . .	9
2.3	Groupe de Grothendieck-Teichmüller . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Diagrammes de cordes</b>	<b>11</b>
3.1	Définitions et opérations parenthésées . . . . .	11
3.2	Diagrammes de cordes parenthésés . . . . .	12
3.3	Groupe de Grothendieck-Teichmüller gradué . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Associateurs</b>	<b>14</b>
4.1	Définitions . . . . .	14
4.2	Préliminaires . . . . .	14
4.3	Système KZ . . . . .	14
4.3.1	Le cas $n = 3$ . . . . .	15
4.3.2	Le cas $n = 4$ . . . . .	16
4.4	Démonstration du théorème . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Retour sur PaB et PaCD</b>	<b>19</b>
5.1	Interprétation des associateurs . . . . .	19
5.2	Conséquences et autres propriétés . . . . .	21

## Résumé

Dans ce mémoire, nous allons démontrer l'existence d'objets appelés *associateurs*, et essayer d'en donner une interprétation. Les associateurs apparaissent dans plusieurs domaines. Leur existence a été démontrée par Drinfeld dans [2] dans le cadre des algèbres de quasi-Hopf quasitriangulaires. Pour une étude plus approfondie de leur utilité dans le cadre des groupes quantiques, on pourra se référer à Kassel dans [5]. Ici, nous allons plutôt suivre l'interprétation de Bar-Natan dans [1], qui utilise les associateurs pour construire des isomorphismes entre les catégories  $\widehat{\mathbf{PaB}}$  et  $\widehat{\mathbf{PaCD}}$ , enrichies d'un certain nombre d'opérations.

La première partie sert de préliminaire. Nous y définirons une notion de complétion et essaierons de donner un aperçu des associateurs dans le cadre des algèbres de Hopf, avant de définir les catégories  $\widehat{\mathbf{PaB}}$  et  $\widehat{\mathbf{PaCD}}$  dans les deux parties suivantes. Enfin dans la partie 4 nous démontrerons l'existence des associateurs, et nous donnerons quelques conséquences de ce résultat dans la partie 5.

Nous tenons à remercier Benoit Fresse pour nous avoir guidés tout au long de ce travail, pour ses précieux conseils et sa disponibilité constante.

# 1 Introduction

## 1.1 Complétion

Une étude plus approfondie de la complétion peut être trouvée dans [6].

**Définition 1.1** (Limite projective). Soient  $(I, \leq)$  un ensemble ordonné,  $(E_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles indexée par  $I$ , et, pour chaque  $(i, j) \in I^2$  tel que  $i \leq j$ , une application  $f_i^j : E_j \rightarrow E_i$ . On suppose que  $\forall i \in I, f_i^i = Id_{E_i}$  et  $\forall i, j, k \in I^3, i \leq j \leq k \implies f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$ . La limite projective est :

$$\varprojlim E_i = \{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \mid \forall i \leq j, a_i = f_i^j(a_j)\}$$

**Exemple 1.2.** Examinons deux exemples de limites projectives :

- Soit  $p$  un nombre premier. Pour tous entiers naturels  $n \leq m$ , l'inclusion  $p^m \mathbb{Z} \subset p^n \mathbb{Z}$  induit un morphisme  $f_n^m : \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ . L'anneau des entiers  $p$ -adiques  $\mathbb{Z}_p$  est la limite projective associée.
- Soit  $K$  un corps. Pour  $n < p$ , note  $f_n^p : K_p[X] \rightarrow K_n[X]$  la projection modulo  $X^{n+1}$ . La limite projective ainsi obtenue n'est autre que  $K[[X]]$ , l'anneau des séries formelles à coefficients dans  $K$ .

**Définition 1.3** (Filtration). Un objet  $E$  d'une catégorie  $\mathbf{C}$  est dit *filtré* si il existe une suite décroissante (pour l'inclusion) de sous ensembles  $(\mathcal{F}_n E)_{n \in \mathbb{N}}$ , de  $E = \mathcal{F}_0 E$ , et vérifiant des conditions qui dépendent de  $\mathbf{C}$  :

- Si  $\mathbf{C}$  est la catégorie des espaces vectoriels, les  $\mathcal{F}_n E$  doivent être des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
- Si  $\mathbf{C}$  est la catégorie des algèbres, les  $\mathcal{F}_n E$  doivent vérifier :  $\mathcal{F}_p E \cdot \mathcal{F}_q E \subset \mathcal{F}_{p+q} E$ .

**Définition 1.4** (Complétion). Soit  $E$  un espace vectoriel (resp. une algèbre) muni d'une filtration, la complétion de  $E$  est  $\hat{E} = \varprojlim E/\mathcal{F}_n E$ . Il existe une unique structure d'espace vectoriel (resp. algèbre) sur  $\hat{E}$  qui prolonge celle de  $E$ .

**Exemple 1.5.** Si  $V$  et  $W$  sont deux espaces vectoriels (resp. algèbres) filtrés, alors on peut filtrer  $V \otimes W$  en posant :

$$\mathcal{F}_n(V \otimes W) = \sum_{i+j=n} \mathcal{F}_i V \otimes \mathcal{F}_j W.$$

En particulier si  $V$  et  $W$  sont complets, on peut compléter  $V \otimes W$ . On définit ainsi un *produit tensoriel complet* :  $V \hat{\otimes} W = \widehat{V \otimes W}$ .

## 1.2 Produit tensoriel

Dans la suite, on va chercher à définir une catégorie d'algèbre  $\mathbf{C}$  telle que pour toute algèbre  $A$  de  $\mathbf{C}$ , on puisse définir une structure de monoïde commutatif sur l'ensemble des  $A$ -modules. On va donc chercher à définir un produit sur les  $A$ -modules.

Si  $A$  est une algèbre, le produit tensoriel de deux  $A$ -modules n'est en toute généralité pas un  $A$ -module mais un  $A \otimes A$ -module.

Examinons deux cas où l'on peut cependant trouver une structure de  $A$ -module :

**Algèbres enveloppantes :** On rappelle que si  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie, l'*algèbre enveloppante* de  $\mathcal{G}$ , notée  $U(\mathcal{G})$ , est le quotient de l'algèbre tensorielle engendrée par  $\mathcal{G}$  par l'idéal engendré par les relations :  $[X, Y] = X \otimes Y - Y \otimes X$ .

Si  $M$  et  $N$  sont deux  $U(\mathcal{G})$  modules, on peut définir une structure naturelle de  $U(\mathcal{G})$ -module sur  $M \otimes N$  en posant  $X \cdot (v \otimes w) = (X \cdot v) \otimes w + v \otimes (X \cdot w)$ .

**Algèbre de groupe :** Si  $G$  est un groupe et  $K$  un corps, on définit  $K[G]$  comme l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $G$ , à coefficients dans  $K$ . Si  $M$  et  $N$  sont des  $K[G]$ -modules, on définit une structure naturelle de  $K[G]$ -module sur  $M \otimes N$  en posant :  $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$ .

Remarquons que chacune dans ces deux cas, cela revient à définir une fonction  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  et de poser ensuite  $x \cdot (v \otimes w) = \Delta x \cdot (v \otimes w)$ , pour pouvoir ensuite profiter de la structure de  $A \otimes A$ -module de

$M \otimes N$ . Dans le cas des algèbres enveloppantes, on aurait  $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ , et dans le cas des algèbres de groupe  $\Delta x = x \otimes x$ .

C'est cette idée que l'on va chercher à formaliser dans la prochaine partie.

### 1.3 Algèbre de Hopf

**Définition 1.6** (Cogèbre). Une *cogèbre* sur un corps  $K$  est un triplet d'un  $K$ -espace-vectoriel  $R$  muni

- d'un morphisme de  $K$ -espace-vectoriel  $\Delta : R \rightarrow R \otimes R$  appelé *coproduit*,
- d'une application  $K$ -linéaire  $\epsilon : R \rightarrow K$  appelée *counité*.

Vérifiant deux relations :

- l'analogue de l'associativité :  $(Id_R \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id_R) \circ \Delta$ , qui garantira que l'on aura un isomorphisme  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ .
- l'analogue de l'unité :  $(Id_R \otimes \epsilon) \circ \Delta = Id_R = (\epsilon \otimes Id_R) \circ \Delta$ , qui garantit l'existence d'une unité dans le monoïde :  $(V \otimes k) \simeq V_1 \simeq (k \otimes V)$ .

**Définition 1.7** (Bigèbre). Une bigèbre sur un corps  $K$  est une structure qui possède à la fois les propriétés des algèbres et des cogèbres. Plus précisément,  $(B, \Delta, \epsilon)$  est une *bigèbre* si  $B$  est une  $K$ -algèbre et  $(B, \Delta, \epsilon)$  est une cogèbre, et que les deux structures sont compatibles, c'est à dire que  $\Delta$  et  $\epsilon$  sont des morphismes de  $K$ -algèbres.

**Définition 1.8** (Algèbre de Hopf). Une *algèbre de Hopf* sur un corps  $K$  est la donnée d'une bigèbre  $H$  et d'une *antipode*  $S$ , c'est à dire d'une application linéaire  $S : H \rightarrow H$  telle que :

$$\mu \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta = \mu \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta = \epsilon,$$

où  $\mu$  désigne le produit dans  $H$ .

Si  $H$  est une algèbre de Hopf graduée, alors la complétion de  $H$  par rapport à la filtration,  $\hat{H}$  est une algèbre de Hopf complète en étendant  $\Delta$  en un morphisme  $\hat{H} \rightarrow \hat{H} \hat{\otimes} \hat{H}$ .

Si  $H$  est une algèbre de Hopf complète, d'idéal d'augmentation  $\bar{H}$ , on définit deux ensembles d'éléments :

- L'ensemble des éléments *primitifs* de  $H$  :  $\mathcal{P}H = \{x \in \bar{H} \mid \Delta x = x \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} x\}$ ,
- l'ensemble des éléments *groupe-like* de  $H$  :  $\mathcal{G}H = \{x \in 1 + \bar{H} \mid \Delta x = x \hat{\otimes} x\}$ .

Remarquons que  $(\mathcal{P}H, +)$  et  $(\mathcal{G}H, \cdot)$  forment des groupes.

On peut de plus définir des fonctions exponentielles et logarithmes par leur expression sous forme de série. On a alors :

**Lemme 1.9.** *exp est induit une bijection de  $\mathcal{P}H$  dans  $\mathcal{G}H$ , d'inverse log.*

*Démonstration.* Si  $x$  est groupe-like :

$$\begin{aligned} \Delta \log(x) &= \log(\Delta x) \\ &= \log(x \hat{\otimes} x) \\ &= \log((x \hat{\otimes} 1) \cdot (1 \hat{\otimes} x)) \\ &= \log(x \hat{\otimes} 1) + \log(1 \hat{\otimes} x) \\ &= \log(x) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \log(x), \end{aligned}$$

Donc  $\log(x)$  est primitif, et de même si  $x$  est primitif :

$$\begin{aligned} \Delta \exp(x) &= \exp(\Delta x) \\ &= \exp(x \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} x) \\ &= \exp(x \hat{\otimes} 1) \exp(1 \hat{\otimes} x) \\ &= \exp(x) \hat{\otimes} 1 \cdot 1 \hat{\otimes} \exp(x) \\ &= \exp(x) \hat{\otimes} \exp(x), \end{aligned}$$

donc  $\exp(x)$  est groupe-like. □

## 1.4 Associativité et commutativité

Remarquons qu'il y a un dernier point pour faire de l'ensemble des  $H$ -modules un monoïde commutatif qui n'a pas été évoqué, il s'agit de la commutativité. En effet celle-ci est induite naturellement par le morphisme  $\tau : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  qui intervertit les facteurs ( $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ ).

Cette définition de la commutativité est compatible avec le morphisme d'associativité défini plus haut, c'est à dire que les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
 (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \longrightarrow & V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) & \longleftarrow & (V_3 \otimes V_1) \otimes V_2 \\
 \downarrow & & \circlearrowleft & & \uparrow \\
 V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \longrightarrow & V_1 \otimes (V_3 \otimes V_2) & \longrightarrow & (V_1 \otimes V_3) \otimes V_2 \\
 \\
 V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \longrightarrow & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 & \longrightarrow & V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \\
 \downarrow & & \circlearrowleft & & \uparrow \\
 (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \longrightarrow & (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 & \longrightarrow & V_2 \otimes (V_1 \otimes V_3)
 \end{array}$$

Ces relations sont appelées *équations de l'hexagone*.

Les associateurs, dont nous allons démontrer l'existence, interviennent naturellement lorsque l'on se pose la question :

*Que se passe-t-il si on prend un autre isomorphisme de commutation que la simple interversion des facteurs ?*

En particulier, si on *tord* la commutation par un élément  $R$ , c'est à dire que l'on suppose que  $\tau \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1}$  ? La relation  $R^2 = 1$  n'est pas nécessairement vérifiée, et le morphisme de commutation n'est donc pas forcément involutif.

Il faut alors adapter le morphisme d'associativité pour qu'il reste compatible avec la commutativité (et que les équations de l'hexagone soient vérifiées).

Là encore on va chercher à *tordre* le morphisme d'associativité grâce à un élément  $\Phi \in H \otimes H \otimes H$  :  $\Phi$  est appelé un *associateur*. C'est son existence que nous allons chercher à démontrer dans cet exposé. Pour que  $\Phi$  induisent bien une relation d'associativité, il doit vérifier une relation appelée *équation du pentagone*. La structure ainsi obtenue en tordant la commutativité et l'associativité par des éléments vérifiant les équations du pentagone et de l'hexagone est appelée *algèbre de quasi-Hopf quasitriangulaire*. C'est le point de vue adopté dans [2]. Dans la suite de ce texte, nous allons plutôt utiliser le point de vue de [1] pour introduire et interpréter les associateurs.

## 2 Tresses parenthésées

**Définition 2.1.** Le groupe des tresses à  $n$  brins, noté  $B_n$  est le groupe engendré par les générateurs  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) soumis aux relations :

- si  $i < n-1$  :  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ,
- si  $|i-j| \geq 2$  :  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ .

On représente la tresse  $\sigma_i$  comme suit :

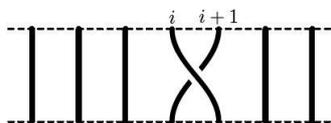


FIGURE 1 – Représentation graphique de  $\sigma_i$ .

Et le produit de deux tresses correspond à la concaténation des diagrammes correspondants.

### 2.1 Opérations sur les tresses

Si  $B$  est une tresse à  $n$  brins, on peut effectuer un certain nombre d'opérations naturelles :

**Opérations d'extension :** On note  $d_0^n B$  l'opération qui consiste à ajouter à  $B$  un brin (vertical) à gauche et  $d_{n+1}^n B$  l'opération qui consiste à rajouter un brin vertical à droite.

$$d_0 \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. ; \quad d_3 \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| .$$

FIGURE 2 – Représentation graphique de  $d_0^2$  et  $d_3^2$ .

**Opérations de cablage :** Si  $1 \leq i \leq n$ , l'opération  $d_i^n B$  consiste à rajouter un brin à  $B$ , qui double le brin de position  $i$ .

$$d_2 \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} .$$

FIGURE 3 – Représentation graphique de  $d_2^3$ .

**Opération de suppression de brin :** Si  $1 \leq i \leq n$ ,  $s_i^n B$  est la tresse parenthésée obtenue à partir de  $B$  en retirant le  $i$ -ème brin.

$$s_2 \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} .$$

FIGURE 4 – Représentation graphique de  $s_2^4$ .

Le groupe  $B_n$  se projette dans le groupe des permutations  $\mathfrak{S}_n$  suivant un foncteur  $\mathbf{S}$ . Si  $B$  est une tresse,  $\mathbf{S}B$  est appelé *squelette* de  $B$ .

**Définition 2.2** (Parenthésage). On rappelle qu'un *magma* est la donnée d'un couple  $(M, \cdot)$  où  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  est une loi de composition interne, sur laquelle on n'impose aucune propriété.

On définit de la manière habituelle la notion de *magma libre*.

On définit l'ensemble des *parenthésages* comme le magma libre engendré par un élément, que l'on notera habituellement  $\bullet$ . On peut définir une notion de degré dans l'ensemble des parenthésages en posant  $\text{deg}(\bullet) = 1$ .

**Définition 2.3.** Soit  $A$  une algèbre. On définit la catégorie des *permutations parenthésées*  $\mathbf{PaP} = \mathbf{PaP}(A)$ , comme la catégorie dont les ensembles sont les parenthésages, et où l'ensemble des flèches entre deux parenthésages de même degré  $n$  sont des sommes formelles d'éléments de  $\mathfrak{S}_n$ , à coefficients dans  $A$ .

**Définition 2.4.** Si  $A$  est une algèbre, on note  $\mathbf{PaB}(A) = \mathbf{PaB}$  la catégorie dont les objets sont les parenthésages, et dont les flèches sont des paires de la forme  $(P, \sum_{k=1}^n \beta_j B_j)$ , où :

- $P$  est une flèche de la catégorie de  $\mathbf{PaP}$ .
- les  $B_j$  sont des tresses de squelette  $P$ ,
- les  $\beta_j$  sont des coefficients à valeur dans l'algèbre  $A$ .

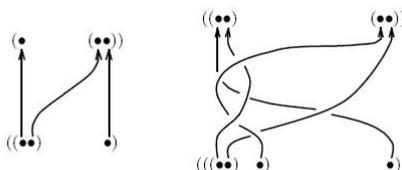


FIGURE 5 – Représentation graphique des tresses parenthésées.

La loi de composition de  $\mathbf{PaB}$  est l'extension bilinéaire de la loi de composition des tresses parenthésées.

On note encore  $\mathbf{S}$  le foncteur d'oubli qui ne garde que le squelette. Il est à valeur dans  $\mathbf{PaP}$ , la catégorie des permutations parenthésées. Les  $d_i^n$  se projettent en des opérations sur les permutations parenthésées par  $\mathbf{S}$ .

$$B = \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \diagup \\ \uparrow \uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagup \diagdown \\ \uparrow \uparrow \end{array} + \frac{22}{7} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \uparrow \uparrow \end{array} \quad \mathbf{S}(B) = \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \diagdown \diagup \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

FIGURE 6 – Représentation du foncteur squelette  $\mathbf{S}$ .

## 2.2 Catégories linéaires fibrées

La catégorie  $\mathbf{PaB}$  et le foncteur  $\mathbf{S} : \mathbf{PaB} \rightarrow \mathbf{PaP}$  forment un exemple de catégorie linéaire fibrée.

**Définition 2.5.** Une *catégorie linéaire fibrée sur une catégorie  $\mathbf{P}$*  (qui jouera le rôle de “squelette”) est la donnée d’un couple  $(\mathbf{B}, \mathbf{S} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P})$  tel que :

- $\mathbf{B}$  est une catégorie et  $\mathbf{S}$  un foncteur dans  $\mathbf{P}$ ,
- les objets de  $\mathbf{B}$  sont les mêmes que ceux de  $\mathbf{P}$ ,
- le foncteur “squelette”  $\mathbf{S}$  vaut l’identité sur les objets,
- pour toute flèche  $P$  de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{S}^{-1}(P)$  est un espace linéaire, et donc le morphisme de composition d’éléments de  $\mathbf{B}$  est bilinéaire.

Dans ce cadre, on peut définir plusieurs notions analogues au cas algébrique, et où la composition remplace le produit. Afin de définir les notions de limite projective et de puissance tensorielles, on définit les notions suivantes :

- Une *sous-catégorie* d’une catégorie linéaire fibrée  $(\mathbf{B}, \mathbf{S} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P})$  est la donnée d’un sous espace linéaire pour chaque  $\mathbf{S}^{-1}(P)$ , tel que le système de sous-espaces choisi est clos par composition.
- Un *idéal* de  $(\mathbf{B}, \mathbf{S} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P})$  est une sous-catégorie  $\mathbf{I}$  telle que si  $B_1$  ou  $B_2$  (des flèches de  $\mathbf{B}$ ) est dans  $\mathbf{I}$ , alors  $B_1 \circ B_2$  est aussi dans  $\mathbf{I}$ .
- On peut prendre les *puissances d’un idéal*. Les flèches de  $\mathbf{I}^m$  seront alors les flèches de  $\mathbf{B}$  qui peuvent se décomposer comme la composée de  $m$  flèches de  $\mathbf{I}$ . Les  $\mathbf{I}^m$  sont aussi des idéaux de  $\mathbf{B}$ .
- On peut former le *quotient  $\mathbf{B}/\mathbf{I}$*  d’une catégorie linéaire fibrée  $\mathbf{B}$  par un idéal  $\mathbf{I}$ , et c’est encore une catégorie linéaire fibrée.
- On peut définir la *somme directe* de catégories linéaires fibrées sur un même squelette.
- On peut définir les notions de catégories linéaires fibrées *filtrées* et *graduées*, et parler de la catégorie linéaire fibrée *graduée associée* à une filtration.
- On peut maintenant définir, la *limite projective* d’un système projectif de catégories linéaires fibrées (sur un même squelette). En particulier, si  $\mathbf{I}$  est un idéal de  $\mathbf{B}$ , la *complétion  $\mathbf{I}$ -adique* de  $\mathbf{B}$  est :  $\varprojlim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{B}/\mathbf{I}^m$ . C’est encore une catégorie linéaire fibrée.
- Enfin, on définit les *puissances tensoriels* de  $(\mathbf{B}, \mathbf{S} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{P})$ . Par exemple, les objets de  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$  seront ceux de  $\mathbf{B}$ , et si  $O_1$  et  $O_2$  sont de tels objets, on pose :

$$\text{mor}_{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}(O_1, O_2) = \coprod_{P \in \text{mor}_{\mathbf{P}}(O_1, O_2)} \mathbf{S}^{-1}(P) \otimes \mathbf{S}^{-1}(P)$$

C’est encore une catégorie linéaire filtrée.

## 2.3 Groupe de Grothendieck-Teichmüller

On munit  $\mathbf{PaB}$  du coproduit  $\square : \mathbf{PaB} \rightarrow \mathbf{PaB} \otimes \mathbf{PaB}$  tel que chaque tresse parenthésée  $B$  soit *groupe-like*, c’est à dire  $\square(B) = B \otimes B$ .

Soit  $\mathbf{I}$  l’*idéal d’augmentation* de  $\mathbf{PaB}$ , c’est à dire l’idéal formé de l’ensemble des paires  $(P, \sum \beta_j B_j)$  telles que  $\sum \beta_j = 0$ . Les puissances de cet idéal définissent une filtration de  $\mathbf{PaB}$ , notée :  $\mathcal{F}_m \mathbf{PaB} = \mathbf{I}^{m+1}$ .

Le paragraphe précédent permet alors de définir  $\mathbf{PaB}^{(m)} = \mathbf{PaB} / \mathcal{F}_m \mathbf{PaB}$ . C’est le  *$m$ -ième quotient* de  $\mathbf{PaB}$ . Et le *complété* de  $\mathbf{PaB}$  est :

$$\widehat{\mathbf{PaB}} = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{PaB}^{(m)}$$

On définit les tresses :

$$a = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ | \quad \diagup \\ | \quad | \end{array}, \quad \sigma = \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \swarrow \quad \searrow \end{array}.$$

Les catégories  $\mathbf{PaB}^{(m)}$  et  $\widehat{\mathbf{PaB}}$  héritent de  $\mathbf{PaB}$  les opérations  $d_i, s_i$ , le coproduit  $\square$  et la filtration  $\mathcal{F}_*$ . La tresse  $\sigma$  peut être vue comme une flèche dans n'importe laquelle de ces catégories.

On note  $\mathbf{B}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathbf{B}}$ ) la catégorie  $\mathbf{PaB}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathbf{PaB}}$ ) munie de ces structures héritées de  $\mathbf{PaB}$ . Plus précisément :

$$\mathbf{B}^{(m)} = \left( \mathbf{PaB}^{(m)}, \mathbf{S} : \mathbf{PaB}^{(m)} \rightarrow \mathbf{PaP}, d_i, s_i, \square, \sigma \right)$$

$$\widehat{\mathbf{B}} = \left( \widehat{\mathbf{PaB}}, \mathbf{S} : \widehat{\mathbf{PaB}} \rightarrow \mathbf{PaP}, d_i, s_i, \square, \sigma \right)$$

**Définition 2.6** (Groupe de Grothendieck-Teichmüller). On définit  $\mathbf{GT}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathbf{GT}}$ ) comme le groupe des automorphismes de  $\mathbf{B}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathbf{B}}$ ).

**Remarque.** Les éléments de  $\mathbf{GT}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathbf{GT}}$ ) respectent la filtration  $\mathcal{F}_*$ .

**Proposition 2.7.**  $\mathbf{PaB}$  est engendrée par  $a^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1}$  et leurs images par des applications répétées des  $d_i^n$

*Démonstration.* Notons  $I$  l'ensemble des éléments de  $\mathbf{PaB}$  engendrés par les  $a^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1}$  et leurs images par des applications répétées des  $d_i^n$ .

Une flèche de  $\mathbf{PaB}$  est la donnée d'une tresse  $t$  à  $n$  brins et de deux parenthésages  $p_1$  et  $p_2$  de degré  $n$ . On les représente donc par un triplet  $(p_1, t, p_2)$ .

Notons  $\sigma_i^n$  (avec  $1 \leq i \leq n-1$ ) les générateurs de  $B_n$ .

On va montrer que pour tout  $i$  et pour tout  $n$ , il existe des parenthésages  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $(p_1, \sigma_i^n, p_2) \in I$ .

En effet, il suffit de considérer  $\overbrace{d_0 \circ \dots \circ d_0}^{i-1} \circ \overbrace{d_3 \circ \dots \circ d_3}^{n-i-1} \sigma \in I$ .

Posons  $P_n$  le parenthésage de degré  $n$  suivant :  $(\dots (\bullet) \dots) \bullet$ .

Soit  $e_n$  l'élément neutre de  $B_n$ . Remarquons que pour tout parenthésage  $p$  de degré  $n$ ,  $(p, e_n, p)$  est l'image de  $f = (P_1, e_1, P_1)$  par  $n-1$  applications successives de  $d_i^k$ . En effet, par récurrence sur  $n$  : on décompose  $p$  en un produit  $p_1 p_2$ . On a ensuite  $(p_1, e_{i_1}, p_1) = d_{j_1} \circ \dots \circ d_{j_{i_1-1}} f$ , et  $(p_2, e_{i_2}, p_2) = d_{k_1} \circ \dots \circ d_{k_{i_2-1}} f$ . On a alors :  $(p, e_n, p) = d_{j_1} \circ \dots \circ d_{j_{i_1-1}} \circ d_{k_1+(i_1+1)} \circ \dots \circ d_{k_{i_2-1}+(i_1+1)} \circ d_0 f$ .

On a donc également que  $(p, e_n, p) \in I$ .

Montrons que pour tout parenthésage  $p$  de degré  $n$ ,  $(p, e_n, P_n) \in I$ . Procédons par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$  ou  $2$  c'est évident car il n'y a qu'un seul parenthésage. Supposons maintenant la propriété vraie pour tout  $i < n$ . On peut décomposer  $p$  en un produit  $p_1 p_2$ , où  $i_1 = \deg p_1 > 0$  et  $i_2 = \deg p_2 \geq 0$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $(p_1, e_{i_1}, P_{i_1}) \in I$  et  $f_2 = (p_2, e_{i_2}, P_{i_2}) \in I$ .

De plus  $(p_1, e_{i_1}, p_1) = d_{j_1} \circ \dots \circ d_{j_{i_1-1}} f$

On a donc :  $d_{j_1} \circ \dots \circ d_{j_{i_1-1}} \circ d_0 f_2 = (p_1 p_2, e_n, p_1 P_{i_2}) \in I$  et de même, on montre que  $(p_1 P_{i_2}, e_n, P_{i_1} P_{i_2}) \in I$ . Par produit,  $(p_1 p_2, e_n, P_{i_1} P_{i_2}) \in I$ .

Montrons enfin que  $(P_{i_1} P_{i_2}, e_n, P_n) \in I$  : en multipliant  $(P_{i_1}, e_{i_1}, P_{i_1})$  à droite par  $d_{i_1} \circ \dots \circ d_5 \circ d_4 a$  puis par  $d_{i_1-1} \circ d_{i_1-1} \circ \dots \circ d_5 \circ d_4 a \dots$ . On obtient que  $(P_{i_1}, e_{i_1}, P) \in I$  où  $P$  est de la forme  $(\bullet P')$ . Donc  $(P_{i_1} P_{i_2}, e_n, P P_{i_2}) \in I$ . Là encore, grâce à  $a$  on montre que  $(P P_{i_2}, e_n, \bullet (P' P_{i_2})) \in I$ . Puis en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $P' P_{i_2}$ , on obtient le résultat voulu.

Symétriquement, pour tout parenthésage  $p$  de degré  $n$ ,  $(P_n, e_n, p) \in I$ .

Soit maintenant  $p_1$  et  $p_2$  des parenthésages de même degré  $n$ , et  $t$  une tresse à  $n$  brins. Il existe  $p'_1$  et  $p'_2$  tels que  $(p'_1, t, p'_2) \in I$ .

On a donc :  $(p_1, t, p_2) = (p_1, e_n, P_n) \cdot (P_n, e_n, p'_1) \cdot (p'_1, t, p'_2) \cdot (p'_2, e_n, P_n) \cdot (P_n, e_n, p_2) \in I$ .

□

### 3 Diagrammes de cordes

#### 3.1 Définitions et opérations parenthésées

**Définition 3.1** (Diagramme de cordes). Soit  $\mathcal{A}_n^{pb}$  l'algèbre, d'algèbre de base  $A$ , générée par les symboles  $t^{ij}$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ , vérifiant les relations :

- $t^{ij} = t^{ji}$ ,
- $[t^{ij}, t^{kl}] = 0$  si  $i, j, k$  et  $l$  sont deux à deux distincts,
- $[t^{jk}, t^{ij} + t^{ik}] = 0$  si  $i, j$  et  $k$  sont deux à deux distincts (c'est la *relation 4T*).

On gradue l'algèbre  $\mathcal{A}_n^{pb}$  en posant  $\deg t^{ij} = 1$ , on note  $\mathcal{G}_m \mathcal{A}_n^{pb}$  les éléments de degré  $m$  de  $\mathcal{A}_n^{pb}$ . On obtient une filtration en posant :  $\mathcal{F}_m \mathcal{A}_n^{pb} = \bigoplus_{m' > m} \mathcal{G}_{m'} \mathcal{A}_n^{pb}$ . On note  $\mathcal{A}_n^{pb(m)} = \mathcal{A}_n^{pb} / \mathcal{F}_m \mathcal{A}_n^{pb}$ . Les éléments de  $\mathcal{A}_n^{pb}$  sont appelés *diagrammes de cordes*.

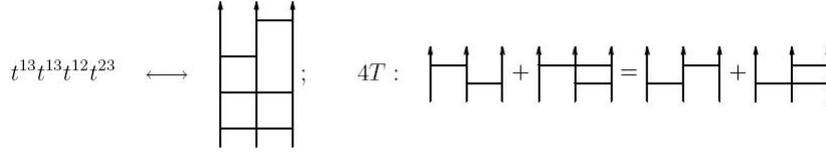


FIGURE 7 – Représentation graphique des cordes et de la *relation 4T*.

#### Opérations

- Action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , obtenue en permutant les lignes verticales.

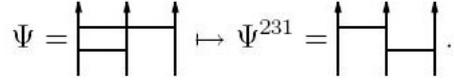


FIGURE 8 – Représentation de l'action du groupe symétrique.

- On définit les morphismes d'algèbres  $d_i^n : \mathcal{A}_n^{pb} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^{pb}$  ( $0 \leq i \leq n+1$ ) et  $s_i^n : \mathcal{A}_n^{pb} \rightarrow \mathcal{A}_{n-1}^{pb}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), par leur action sur les générateurs  $t^{jk}$  ( $j < k$ ) comme suit :

$$d_i^n(t^{jk}) = \begin{cases} t^{j+1, k+1}, & \text{si } i < j < k \\ t^{j, k+1} + t^{j+1, k+1}, & \text{si } i = j < k \\ t^{j, k+1}, & \text{si } j < i < k \\ t^{jk} + t^{j, k+1}, & \text{si } j < i = k \\ t^{jk}, & \text{si } j < k < i. \end{cases}$$

$$s_i^n(t^{jk}) = \begin{cases} t^{j-1, k-1} & \text{si } i < j < k \\ 0 & \text{si } i = j < k \\ t^{j, k-1} & \text{si } j < i < k \\ 0 & \text{si } j < i = k \\ t^{jk} & \text{si } j < k < i \end{cases}$$

- coproduit  $\square : \mathcal{A}_n^{pb} \rightarrow \mathcal{A}_n^{pb} \otimes \mathcal{A}_n^{pb}$  défini par :  $\square : (t^{ij}) = 1 \otimes t^{ij} + t^{ij} \otimes 1$ , c'est à dire que  $\square$  déclare  $t^{ij}$  comme étant primitif.



### 3.3 Groupe de Grothendieck-Teichmüller gradué

On définit les diagrammes de cordes suivants :

$$a = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right|, \quad X = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array}, \quad H = \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array}.$$

et on pose  $\tilde{R} = \exp(\frac{1}{2}H) \cdot X$ .

**Définition 3.4.** On définit les catégories  $\hat{\mathbf{C}}$  et  $\mathbf{C}^{(m)}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= (\mathbf{PaCD}^{(m)}, \mathbf{S} : \mathbf{PaCD}^{(m)} \rightarrow \mathbf{PaP}, d_i, s_i, \square, \tilde{R}) \\ \mathbf{C}^{(m)} &= (\widehat{\mathbf{PaCD}}, \mathbf{S} : \widehat{\mathbf{PaCD}} \rightarrow \mathbf{PaP}, d_i, s_i, \square, \tilde{R}) \end{aligned}$$

On définit alors de la même manière que pour les tresses parenthésées le groupe de Grothendieck-Teichmüller gradué :  $\widehat{\mathbf{GRT}}^{(m)}$  (resp.  $\mathbf{GRT}^{(m)}$ ) comme l'ensemble des automorphismes de  $\hat{\mathbf{C}}$  (resp.  $\mathbf{C}^{(m)}$ ).

**Proposition 3.5.**  $\mathbf{PaCD}$  est engendrée par  $a^{\pm 1}$ ,  $X$  et  $H$  et leurs images par des applications répétées des  $d_i$ .

*Démonstration.* Il suffit de procéder comme pour  $\mathbf{PaB}$ , en considérant séparément parenthésages (obtenus grâce à  $a$ ), cordes (obtenues grâce à  $H$ ) et permutations (obtenues grâce à  $X$ ).  $\square$

## 4 Associateurs

### 4.1 Définitions

**Définition 4.1** (Associateur). On appelle associateur un élément inversible  $\Phi$  de  $\hat{\mathcal{A}}_3^{pb}$  vérifiant :

– l'équation du pentagone dans  $\hat{\mathcal{A}}_4^{pb}$  :

$$d_4\Phi \cdot d_2\Phi \cdot d_0\Phi = d_1\Phi \cdot d_3\Phi \quad (\diamond)$$

– les deux équations de l'hexagone dans  $\hat{\mathcal{A}}_3^{pb}$  :

$$d_1 \exp(\pm \frac{1}{2}t^{12}) = \Phi \cdot \exp(\pm \frac{1}{2}t^{23}) \cdot (\Phi^{-1})^{132} \cdot \exp(\pm \frac{1}{2}t^{13}) \cdot \Phi^{312} \quad (\circ_{\pm})$$

–  $\Phi$  est groupe-like :  $\square(\Phi) = \Phi \otimes \Phi$

**Définition 4.2.** On appelle  $\widehat{\mathbf{ASS}} = \widehat{\mathbf{ASS}}(A)$  l'ensemble des associateurs, et  $\widehat{\mathbf{ASS}}^{(m)}$  l'ensemble des associateurs de degré inférieur ou égal à  $m$ .

Dans cette partie, nous allons montrer le résultat principal de Drinfeld :

**Théorème 4.3.** L'ensemble  $\widehat{\mathbf{ASS}}(\mathbb{C})$  (et donc les  $\mathbf{ASS}^{(m)}(\mathbb{C})$ ) est non vide.

La preuve de ce théorème occupera le reste de cette section.

### 4.2 Préliminaires

Nous aurons besoin de mieux comprendre l'algèbre des diagrammes de cordes à trois brins  $\mathcal{A}_3^{pb}$  avant de prouver le théorème : cette algèbre a trois générateurs :  $t^{12}$ ,  $t^{23}$  et  $t^{13}$

**Proposition 4.4.** Le centre de  $\mathcal{A}_3^{pb}(\mathbb{C})$  est engendré par  $t^{12} + t^{23} + t^{13}$ , et le quotient de  $\mathcal{A}_3^{pb}(\mathbb{C})$  par son centre est isomorphe à l'algèbre libre à deux générateurs  $\mathbb{C} \langle A, B \rangle$

*Démonstration.* On note  $I$  l'idéal engendré par les relations que vérifient les  $t^{ij}$ , de tel sorte que :  $\mathcal{A}_3^{pb}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \langle t^{12}, t^{23}, t^{13} \rangle / I$ . Montrons tout d'abord que  $u = t^{12} + t^{23} + t^{13}$  est dans le centre de  $\mathcal{A}_3^{pb}(\mathbb{C})$  : Pour cela, il suffit de montrer qu'il commute avec les  $t^{ij}$ .

Par définition on a :  $[t^{12}, t^{23} + t^{13}] = [t^{23}, t^{13} + t^{12}] = [t^{13}, t^{12} + t^{23}] = 0$  Chacun des  $t^{ij}$  commute donc avec la somme des deux autres, donc avec  $u$ . D'où  $u \in Z(\mathcal{A}_3^{pb})$ .

Dans  $\mathbb{C} \langle t^{12}, t^{23}, t^{13} \rangle / \langle u \rangle$ , on a la relation :

$$[t^{12}, t^{23} + t^{13}] = [t^{12}, t^{23} - t^{12} - t^{23}] = [t^{12}, -t^{12}] = 0,$$

et de même pour les deux autres crochets du même type.

D'où  $I \subset \langle u \rangle$ , et donc :

$$\mathcal{A}_3^{pb}(\mathbb{C}) / \langle u \rangle = \mathbb{C} \langle t^{12}, t^{23}, t^{13} \rangle / \langle u \rangle \simeq \mathbb{C} \langle A, B \rangle$$

Le centre de  $\mathcal{A}_3^{pb}$  ne peut donc pas être plus gros que  $\langle u \rangle$ , donc enfin  $Z(\mathcal{A}_3^{pb}) = \langle u \rangle$  et  $\mathcal{A}_3^{pb} / Z(\mathcal{A}_3^{pb}) \simeq \mathbb{C} \langle A, B \rangle$ . □

En complétant, on obtient que le quotient de  $\hat{\mathcal{A}}_3^{pb}(\mathbb{C})$  par son centre est isomorphe à  $\mathbb{C} \langle\langle A, B \rangle\rangle$ .

### 4.3 Système KZ

On considère le système d'équations différentielles dans  $\hat{\mathcal{A}}_n^{pb}(\mathbb{C})$  : pour ,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W \quad (\text{KZ})$$

### 4.3.1 Le cas $n = 3$

L'associateur  $\Phi_{KZ}$  sera défini comme quotient de solutions du système (KZ). Pour cela, déterminons tout d'abord les solutions du système dans le cas  $n = 3$ .

**Proposition 4.5.** *Les solutions du système (KZ) sont de la forme*

$$(z_3 - z_1)^{\frac{u}{2i\pi}} \cdot G\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right),$$

où  $G$  vérifie l'équation différentielle :

$$G'(z) = \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{t^{12}}{z} + \frac{t^{23}}{z-1} \right) G(z) \quad (\star)$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que le système (KZ) se réécrit en terme de différentielles :

$$dW = \frac{1}{2i\pi} [t^{12}d\log(z_2 - z_1) + t^{13}d\log(z_3 - z_1) + t^{23}d\log(z_3 - z_2)] \cdot W$$

On va effectuer le changement de variable  $W = (z_3 - z_1)^{u/2i\pi} \cdot I$ .

Tout d'abord, remarquons que :

$$(z_3 - z_1)^{u/2i\pi} = \exp\left(\frac{\log(z_3 - z_1)u}{2i\pi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(k(z_3 - z_1))u^k}{(2i\pi)^k}$$

Or,  $u$  appartient au centre de  $\mathcal{A}_3^{pb}$ , donc  $(z_3 - z_1)^{u/2i\pi}$  aussi.

Effectuons maintenant le changement de variable :  $W = (z_3 - z_1)^{u/2i\pi} \cdot I$ .

On a :

$$dI + \frac{u \cdot I}{2i\pi} d\log(z_3 - z_1) = \frac{1}{2i\pi} [t^{12}d\log(z_2 - z_1) + t^{13}d\log(z_3 - z_1) + t^{23}d\log(z_3 - z_2)] \cdot I$$

Donc :

$$dI = \frac{1}{2i\pi} \left[ t^{12}d\log\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) + t^{13}d\log\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right) \right] \cdot I$$

En posant  $z = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$  on obtient enfin :

$$dI = \frac{1}{2i\pi} [t^{12}d\log(z) + t^{13}d\log(1 - z)] \cdot I.$$

On est donc ramené à l'équation différentielle  $(\star)$ . □

**Définition 4.6** ( $\Phi_{KZ}$ ). On définit ensuite  $\Phi_{KZ}$  comme le quotient de deux solutions de  $(\star)$ . Explicitement,  $\Phi_{KZ}$  est défini comme le quotient de  $G_1^{-1}G_0$ , où  $G_0$  et  $G_1$  sont des solutions de  $(\star)$  sur  $]0, 1[$  vérifiant :

$$\begin{aligned} G_0(x) &\sim_0 x^{t^{12}/2i\pi} \\ G_1(x) &\sim_1 (1 - x)^{t^{23}/2i\pi} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il faut montrer que  $\Phi_{KZ}$  est bien défini et est indépendant de  $z$ . L'équation  $\star$  vu comme une équation différentielle d'une variable complexe permet de montrer l'existence et l'unicité de  $G_0$  et  $G_1$  au voisinage connexe et simplement connexe de 0 et de 1 ( voir par exemple [4]). En restreignant ces fonctions à  $\mathbb{R}$ , on peut les prolonger de manière unique sur  $]0, 1[$ , ce qui permet de définir  $\Phi_{KZ}$ .

Pour l'indépendance par rapport à  $z$ , notons  $A = \frac{t^{12}}{2i\pi}$  et  $B = \frac{t^{23}}{2i\pi}$ .

$$\begin{aligned} \Phi'_{KZ}(z) &= -G_2^{-1}(z)G_2'(z)G_2^{-1}(z)G_1(z) + G_2^{-1}(z)G_1'(z) \\ &= -G_2^{-1}(z) \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) (G_2(z)G_2^{-1}(z))G_1(z) + G_2^{-1}(z) \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G_1'(z) \\ &= -G_2^{-1}(z) \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G_1(z) + G_2^{-1}(z) \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G_1(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

De plus, cette définition est légitime pour tous symboles  $A$  et  $B$  ne commutant pas. Pour chaque tel couple  $(A, B)$  on dispose donc de deux fonctions que l'on notera  $G_i(z|A, B)$ . On peut donc définir une fonction  $\phi_{KZ}(A, B) = G_2(\_ | A, B)^{-1} G_1(\_ | A, B)$ , avec en particulier  $\phi_{KZ}(t^{12}, t^{23}) = \Phi_{KZ}$ .

### 4.3.2 Le cas $n = 4$

Nous ne donnerons pas une description des solutions dans le cas général, mais nous nous contenterons de l'existence de solutions vérifiant des conditions particulières.

Soit  $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 | z_1 < z_2 < z_3 < z_4\}$ . On considère 5 zones :

$$z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1 \quad (1)$$

$$z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1 \quad (2)$$

$$z_3 - z_2 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1 \quad (3)$$

$$z_4 - z_3 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1 \quad (4)$$

$$z_4 - z_3 \ll z_4 - z_1 \text{ et } z_1 - z_2 \ll z_4 - z_1 \quad (5)$$

Ces zones correspondent aux sommets de l'équation du pentagone suivant la règle suivante : Si  $V_i$  et  $V_j$  sont dans une même parenthèse et que  $V_k$  est en dehors, alors  $|z_i - z_j| \ll |z_i - z_k|$ .

Ainsi, la première zone correspond au sommet  $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4$ .

On peut maintenant trouver des solutions ayant le bon comportement asymptotique dans ces zones.

**Lemme 4.7.** *Il existe des solutions uniques  $W_1, \dots, W_5$  au système d'équations différentielles ayant les comportements asymptotiques suivants dans les zones correspondantes :*

$$\begin{aligned} W_1 &\sim (z_2 - z_1)^{t^{12}/2i\pi} (z_3 - z_1)^{(t^{13}+t^{23})/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{14}+t^{24}+t^{34})/2i\pi} \\ W_2 &\sim (z_3 - z_2)^{t^{23}/2i\pi} (z_3 - z_1)^{(t^{12}+t^{13})/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{14}+t^{24}+t^{34})/2i\pi} \\ W_3 &\sim (z_3 - z_2)^{t^{23}/2i\pi} (z_4 - z_2)^{(t^{24}+t^{34})/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{12}+t^{13}+t^{14})/2i\pi} \\ W_4 &\sim (z_4 - z_3)^{t^{34}/2i\pi} (z_4 - z_2)^{(t^{23}+t^{34})/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{12}+t^{13}+t^{14})/2i\pi} \\ W_5 &\sim (z_2 - z_1)^{t^{12}/2i\pi} (z_4 - z_3)^{t^{34}/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})/2i\pi} \end{aligned}$$

Autrement dit, par exemple pour  $W_2$ , on a

$$W_2 = f(u, v) (z_3 - z_2)^{t^{23}/2i\pi} (z_3 - z_1)^{(t^{12}+t^{13})/2i\pi} (z_4 - z_1)^{(t^{14}+t^{24}+t^{34})/2i\pi},$$

où  $u = (z_3 - z_2)/(z_4 - z_1)$ ,  $v = (z_3 - z_1)/(z_4 - z_1)$  et  $f$  est analytique sur un voisinage de  $(0, 0)$ , avec  $f(0, 0) = 1$ .

*Démonstration.* On fait le calcul pour une zone, les autres se traitent de la même manière. Considérons par exemple la cinquième zone : comme pour le cas  $n = 3$ , le système (KZ) peut se réécrire

$$dW = \frac{1}{2i\pi} \left[ \sum_{i < j} t^{ij} d \log(z_j - z_i) \right] \cdot W$$

Remarquons que tous les  $z_j - z_i$  peuvent s'exprimer en fonction des seuls  $z_2 - z_1$ ,  $z_4 - z_3$  et  $z_4 - z_1$ . On peut ainsi se ramener à un système de trois variables uniquement.

Soit  $T = \sum_{i < j} t^{ij}$ . On effectue la substitution  $W = g \cdot (z_4 - z_1)^{T/2i\pi}$ .

On obtient alors l'équation :

$$dg = \frac{1}{2i\pi} \left[ \sum_{i < j} t^{ij} d \log \left( \frac{z_j - z_i}{z_4 - z_1} \right) \right] \cdot g.$$

Ce qui fait disparaître encore une variable.  $g$  n'est donc fonction que de  $u$  et de  $v$ . Plus explicitement, l'équation devient donc :

$$dg = \frac{1}{2i\pi} [t^{12} d \log(u) + t^{13} d \log(-1 - v) + t^{23} d \log(1 - u - v) + t^{24} d \log(1 - u) + t^{34} d \log(v)] \cdot g$$

Ce que l'on peut réécrire comme :

$$dg = \frac{1}{2i\pi} [t^{12}d\log(u) + t^{34}d\log(v) + dR(u, v)] \cdot g,$$

où  $R$  est une fonction analytique sur un voisinage de  $(0, 0)$ .

Il s'agit donc de prouver qu'il existe une et une seule solution de cette équation sous la forme  $\phi(u, v)u^{t^{12}/2i\pi}v^{t^{34}/2i\pi}$ , où  $\phi$  est une fonction analytique sur un voisinage de  $(0, 0)$  valant 1 en  $(0, 0)$ . Cela peut se faire par des approximations successives.  $\square$

On voit facilement que les fonctions  $W_i$  peuvent être prolongées analytiquement sur  $U$ .

#### 4.4 Démonstration du théorème

$\Phi_{KZ}$  est groupe-like :

**Proposition 4.8.**  $\Phi_{KZ}$  est groupe-like, c'est à dire vérifie :

$$\square(\Phi_{KZ}) = \Phi_{KZ} \otimes \Phi_{KZ}$$

*Démonstration.* La preuve suivante reprend celle de [3].

On a  $\square t^{12} = t^{12} \otimes 1 + 1 \otimes t^{12}$  et  $\square t^{23} = t^{23} \otimes 1 + 1 \otimes t^{23}$ . On note :  $u_0 = t^{12} \otimes 1$ ,  $u'_0 = 1 \otimes t^{12}$ ,  $u_1 = t^{23} \otimes 1$  et  $u'_1 = 1 \otimes t^{23}$ .

Rappelons que  $\Phi_{KZ} = \phi_{KZ}(u_0 + u'_0, u_1 + u'_1)$ .

On a de plus que les  $u_i$  commutent avec les  $u'_i$ . Regardons la fonction :  $G_+(z) = G_0(z|u_0, u_1)G_0(z|u'_0, u'_1)$ .  
On a :

$$\begin{aligned} G'_+(z) &= G'_0(z|u_0, u_1)G_0(z|u'_0, u'_1) + G_0(z|u_0, u_1)G'_0(z|u'_0, u'_1) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z-1} + \frac{u'_0}{z} + \frac{u'_1}{z-1} \right) \cdot G(z) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{u_0 + u'_0}{z} + \frac{u_1 + u'_1}{z-1} \right) \cdot G(z) \end{aligned}$$

De plus  $G_+(z) \sim_0 z^{(u_0+u'_0)/2i\pi}$ .

On a donc prouvé la relation :  $G_0(z|u_0, u_1)G_0(z|u'_0, u'_1) = G_0(z|u_0 + u'_0, u_1 + u'_1)$ . D'où :

$$\begin{aligned} \Delta(G_0(z|t^{12}, t^{23})) &= G_0(z|u_0 + u'_0, u_1 + u'_1) \\ &= G_0(z|u_0, u_1)G_0(z|u'_0, u'_1) \\ &= (G_0(z|t^{12} + t^{23}) \otimes 1) \cdot (1 \otimes G_0(z|t^{12} + t^{23})) \\ &= G_0(z|t^{12}, t^{23}) \otimes G_0(z|t^{12}, t^{23}) \end{aligned}$$

$G_0$  est donc groupe-like, et c'est aussi le cas de  $G_1$  par un calcul symétrique, donc  $\Phi_{KZ}$  aussi par quotient.  $\square$

**Le pentagone :**

**Lemme 4.9.** On a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 \cdot d_4 \Phi_{KZ} \\ W_2 &= W_3 \cdot d_2 \Phi_{KZ} \\ W_3 &= W_4 \cdot d_0 \Phi_{KZ} \\ W_1 &= W_5 \cdot d_1 \Phi_{KZ} \\ W_5 &= W_4 \cdot d_3 \Phi_{KZ} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous allons prouver la première identité :

Soit  $V_1 = W_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t^{14}+t^{24}+t^{34})}$ , et :

$$\begin{aligned} V_2 &= W_2 \cdot d_4\Phi_{KZ} \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t^{14}+t^{24}+t^{34})} \\ &= W_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t^{14}+t^{24}+t^{34})} \cdot d_4\Phi_{KZ} \end{aligned}$$

En effet, remarquons que  $t^{14} + t^{24} + t^{34}$  commute avec tous les  $t^{ij}$ , avec  $i, j < 4$ , donc avec  $d_4\Phi_{KZ}$ . En exprimant  $(z_4 - z_1)^{-\frac{1}{2i\pi}(t^{14}+t^{24}+t^{34})} = \exp(-\frac{1}{2i\pi}(t^{14} + t^{24} + t^{34}) \log(z_4 - z_1))$  sous forme de série, on obtient la commutation voulue.

Prouvons à présent que  $V_1 = V_2$  : Si  $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ ,  $V_1$  et  $V_2$  sont analytiques (et  $z_4$  peut éventuellement être infini...) De plus, ils vérifient les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot V, \quad i = 2, 3 \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq 1} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot V - \frac{1}{2i\pi} V \cdot \frac{t^{14} + t^{24} + t^{34}}{z_1 - z_4}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_4} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j \neq 4} \frac{[t^{14}, V]}{z_4 - z_j}. \quad (8)$$

Les deux premières équations et les développements asymptotiques de  $V_1$  et  $V_2$  montrent que les deux fonctions coïncident pour  $z_4 = \infty$ . Grâce à cela, la dernière équation donne  $V_1 = V_2$ .

Les autres calculs se font de la même manière.  $\square$

En mettant ces équations bout à bout, on obtient bien :

$$d_0\Phi_{KZ} \cdot d_2\Phi_{KZ} \cdot d_4\Phi_{KZ} = d_3\Phi_{KZ} \cdot d_1\Phi_{KZ}$$

**Les hexagones :**

**Lemme 4.10.** *On a la formule :  $\Phi_{KZ}^{-1} = \Phi_{KZ}^{321}$*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que si l'on remplace  $z$  par  $1 - z$  dans  $(\star)$  alors  $\Phi_{KZ}$  est changé en son inverse, et cela revient à permuter  $t^{12}$  et  $t^{23}$ , c'est à dire à faire agir la permutation (321).  $\square$

Par conséquent, la formule de l'hexagone  $(\circ_{\pm})$  est satisfaite si et seulement si l'une des deux équations est satisfaite : il suffit d'appliquer (123).

Pour montrer que  $\Phi_{KZ}$  satisfait  $(\circ_+)$ , il faut procéder comme pour le pentagone : on peut trouver six solutions du système  $KZ$  pour  $n = 3$  avec les comportements asymptotiques standards, correspondant aux sommets de l'hexagone, puis montrer des relations entre ces solutions.

L'élément  $\Phi_{KZ} \in \mathcal{A}_3^{pb}$  est donc un élément groupe-like, vérifiant les équations du pentagone et de l'hexagone, c'est donc un associateur. Donc

$$\widehat{\mathbf{ASS}}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$$

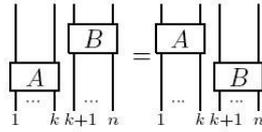
## 5 Retour sur PaB et PaCD

### 5.1 Interprétation des associateurs

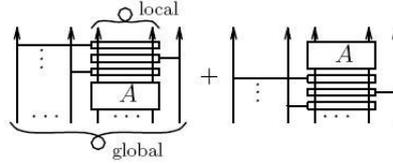
**Proposition 5.1.** Soit  $\hat{\mathbf{Z}} : \hat{\mathbf{B}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  un foncteur préservant la structure. Alors  $\hat{\mathbf{Z}}(\sigma) = \tilde{R}$  et  $\hat{\mathbf{Z}}(a)$  est de la forme  $\Phi_{\hat{\mathbf{Z}}} \cdot a$  pour un certain  $\Phi_{\hat{\mathbf{Z}}} \in \hat{\mathcal{A}}_3^{pb}$ .  $\Phi_{\hat{\mathbf{Z}}}$  est un associateur et  $\hat{\mathbf{Z}} \mapsto \Phi_{\hat{\mathbf{Z}}}$  est une bijection entre l'ensemble des foncteurs  $\hat{\mathbf{B}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  préservant la structure et  $\widehat{\mathbf{ASS}}$ , ensemble des associateurs  $\Phi$  de  $\hat{\mathcal{A}}_3^{pb}$ . De même pour  $\mathbf{B}^{(m)}, \mathbf{C}^{(m)}$  et  $\mathbf{ASS}^{(m)}$ .

**Lemme 5.2.** On a les relations suivantes dans  $\mathcal{A}_n^{pb}$  :

**Localité dans l'espace :** Pour tout  $k \leq n$ , la sous-algèbre de  $\mathcal{A}_n^{pb}$  engendrée par les  $\{t^{ij} | i, j \leq k\}$  commute avec la sous-algèbre engendrée par les  $\{t^{ij} | i, j > k\}$  :



**Localité d'échelle :** des éléments se trouvant à "différentes échelles" commutent, comme l'exprime l'image suivante :



*Schème.* La première affirmation découle de l'application de la relation  $t^{ij} \cdot t^{kl} = t^{kl} \cdot t^{ij}$ , pour  $i < j < k < l$ .

La seconde vient de la répétition de la relation 4T. □

**Retour sur la preuve de la proposition :** Soit  $\Phi$  tel que  $\hat{\mathbf{Z}}(a) = \Phi \cdot a$ . On a la relation :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} ; \quad d_4 a \circ d_2 a \circ d_0 a = d_1 a \circ d_3 a,$$

En appliquant  $\hat{\mathbf{Z}}$  à cette égalité et en utilisant  $\hat{\mathbf{Z}}(a) = \Phi \cdot a$ , on a :

$$(d_4 \Phi \cdot d_2 \Phi \cdot d_0 \Phi) \cdot (d_4 a \circ d_2 a \circ d_0 a) = (d_1 \Phi \cdot d_3 \Phi) \cdot (d_1 a \circ d_3 a).$$

La partie concernant  $\Phi$  est l'égalité du pentagone.

On a aussi la relation : qui, avec  $\hat{\mathbf{Z}}(a) = \Phi \cdot a$  et  $\hat{\mathbf{Z}}(\sigma) = \tilde{R}$  fournit la première relation hexagonale.

La même égalité avec  $\sigma^{-1}$  donne la seconde.

$a$  est groupe-like dans  $\mathbf{PaB}$  et  $\hat{\mathbf{Z}}$  préserve le coproduit, donc  $\Phi$  est groupe-like. Finalement,  $\Phi = \Phi_{\hat{\mathbf{Z}}}$  est un associateur.

**La fonction**  $\Psi : \hat{\mathbf{Z}} \mapsto \Phi_{\hat{\mathbf{Z}}}$  : On va construire un inverse de  $\Psi$ . Soit  $\Phi$  un associateur. On veut définir un foncteur  $\hat{\mathbf{B}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  par  $\hat{\mathbf{Z}}(\sigma) = \tilde{R}$  et  $\hat{\mathbf{Z}}(a) = \Phi \cdot a$ . On doit vérifier que l'on obtient bien un foncteur. On peut vérifier que les relations dans  $\mathbf{PaB}$  entre générateurs sont les images par les  $d_i$  des relations :

– le pentagone

$$d_4a \circ d_2a \circ d_0a = d_1a \circ d_3a$$

– les hexagones

$$\begin{aligned} d_1\sigma &= a \circ d_0\sigma \circ a^{-1} \circ d_3\sigma \circ a \\ d_1\sigma^{-1} &= a \circ d_0\sigma^{-1} \circ a^{-1} \circ d_3\sigma^{-1} \circ a \end{aligned}$$

– localité dans l'espace : si  $A$  et  $B$  sont égaux à  $a^{\pm 1}$  ou  $\sigma^{\pm 1}$ , on a :

– localité en échelle : si  $A$  et  $B$  sont égaux à  $a^{\pm 1}$  ou  $\sigma^{\pm 1}$ , on a les relations :

Par les propriétés précédentes,  $\hat{\mathbf{Z}}$  vérifie ces relations.  $\hat{\mathbf{Z}}$  est donc bien définie. On peut vérifier  $\hat{\mathbf{Z}}(I) \subset F_1 \hat{\mathbf{C}}$  donc  $\hat{\mathbf{Z}}$  est bien définie sur  $\hat{\mathbf{B}}$ . Enfin,  $\hat{\mathbf{Z}}$  est compatible avec  $\square$  et les  $s_i$  grâce aux propriétés des éléments groupe-like. De même pour  $\mathbf{B}^{(m)}, \mathbf{C}^{(m)}$  et  $\mathbf{ASS}^{(m)}$ .

**Proposition 5.3.** *Tout foncteur  $\hat{\mathbf{B}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  préservant la structure est inversible. De même pour  $\mathbf{B}^{(m)}, \mathbf{C}^{(m)}$  et  $\mathbf{ASS}^{(m)}$ .*

*Démonstration.* La complétion  $\widehat{PB}_n$  du groupe des tresses pures  $PB_n$  d'ordre  $n$  peut être identifié avec le sous-anneau de  $\widehat{\mathbf{B}}$  des morphismes de  $O_n = (\bullet(\bullet(\dots(\bullet\bullet))\dots))$  dans lui-même de squelette identité. De même,  $\widehat{\mathcal{A}}_n^{pb}$  peut être identifié avec le sous-anneau de  $\widehat{\mathbf{C}}$  des endomorphismes de  $O_n$  de permutation l'identité. Alors,  $\widehat{\mathbf{Z}}$  induit un morphisme  $\widehat{\mathbf{Z}}_n : \widehat{PB}_n \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n^{pb}$  qui préserve la filtration. Dans  $\widehat{\mathbf{B}}$  ( $\widehat{\mathbf{C}}$ ), tout morphisme peut être écrit comme une composition de morphismes inversibles et d'un élément de  $\widehat{PB}_n$  ( $\widehat{\mathcal{A}}_n^{pb}$ ). Il suffit de prouver que  $\widehat{\mathbf{Z}}_n$  est un isomorphisme pour tout  $n$ . Il suffit donc de montrer que  $\widehat{\mathbf{Z}}_n^m : \mathcal{G}_m PB_n = I^m/I^{m+1} \rightarrow \mathcal{G}_m \mathcal{A}_n^{pb}$  est un isomorphisme pour tous  $n$  et  $m$ .

On construit un inverse  $Y_n^m$  en posant :

$$Y_n^m(t^{i_1 j_1} t^{i_1 j_2} \dots t^{i_n j_m}) = (\sigma^{i_1 j_1} - 1)(\sigma^{i_1 j_2} - 1) \dots (\sigma^{i_n j_m} - 1)$$

Il suffit de montrer que  $Y_n^m$  est bien définie, ie. de vérifier que toutes les relations dans  $\mathcal{G}_m \mathcal{A}_n^{pb}$  sont transportées en relations dans  $\mathcal{G}_m PB_n$ . La vérification est simple.  $\widehat{\mathbf{Z}}$  est donc inversible. De même pour  $\mathbf{B}^{(m)}, \mathbf{C}^{(m)}$  et  $\mathbf{ASS}^{(m)}$ .  $\square$

## 5.2 Conséquences et autres propriétés

On a montré la propriété suivante :

**Proposition 5.4.**  $\widehat{\mathbf{ASS}}(\mathbf{ASS}^{(m)})$  peut être identifié avec l'ensemble des isomorphismes  $\widehat{\mathbf{B}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$  ( $\mathbf{B}^{(m)} \rightarrow \mathbf{C}^{(m)}$ ) préservant la structure.

On rappelle :  $\widehat{\mathbf{ASS}} \neq \emptyset$  et  $\mathbf{ASS}^{(m)} \neq \emptyset$ . On va utiliser le principe suivant : Si  $B$  est une structure mathématique (un ensemble, une catégorie ...) et  $C$  une structure isomorphe, alors  $\text{Aut}(B)$  (resp.  $\text{Aut}(C)$ ) agissent par composition à gauche (resp. à droite) sur l'ensemble  $A$  de tous les isomorphismes  $B \rightarrow C$ . De plus les deux actions sont libres, transitives et elles commutent.

On en déduit que  $\widehat{\mathbf{GT}}(\mathbb{C})$  et  $\widehat{\mathbf{GRT}}(\mathbb{C})$  agissent librement et transitivement sur  $\widehat{\mathbf{ASS}}(\mathbb{C})$  à droite et à gauche respectivement et les deux actions commutent.

**Théorème 5.5.**  $\mathbf{ASS}^{(m)}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{ASS}^{(m-1)}(\mathbb{C})$  est surjective.

*Schème.* Ce théorème assure que les associateurs peuvent être construits degré par degré. Plus précisément, si  $\Phi_{n-1} \in \mathbf{ASS}^{(n-1)}(\mathbb{C})$  et  $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \phi_n$  avec  $\deg \Phi_n = n$ , alors les équations que doit vérifier  $\Phi_n$  pour que  $\Phi_n$  soit un associateur sont linéaires non homogènes, avec un terme constant déterminé algébriquement à partir de  $\Phi_{n-1}$ .  $\Phi_n$  vérifie des équations linéaires non-homogènes de second terme déterminé par  $\Phi_{n-1}$ . Il s'agit ensuite de montrer que si  $\Phi_{n-1}$  est pris sur les rationnels, on peut également trouver  $\Phi_n$  sur les rationnels.  $\square$

**Corollaire 5.6.** Les associateurs rationnels existent et peuvent être construits de façon itérative.

## Références

- [1] D. Bar-Natan. On associators and the Grothendieck-Teichmuller group, I. *Selecta Mathematica, New Series*, 4(2) :183–212, 1998.
- [2] V.G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . *Algebra i Analiz*, 2(4) :149–181, 1990.
- [3] J. Gonzalez-Lorca. Série de drinfel'd, monodromie et algebres de Hecke, these. *École Normale Supérieure, Paris*, 1998.
- [4] E. Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Dover Pubns, 1997.
- [5] C. Kassel. Quantum groups (graduate texts in mathematics vol 155), 1995.
- [6] D. Quillen. Rational homotopy theory. *The Annals of Mathematics*, 90(2) :205–295, 1969.