

# Exposé de maîtrise : minimisation des valeurs propres du laplacien et réarrangements

Nicolas Dreyfuss et Titus Lupu

sous la direction de Grégoire Nadin.

juin 2009

Le but de cet exposé est de présenter un résultat conjecturé par Rayleigh à la fin du XIXe et démontré simultanément par Faber et Krahn dans les années 1920 : parmi les ouverts de  $\mathbb{R}^N$  de volume donné, la boule euclidienne minimise la plus petite valeur propre du laplacien.

Pour cela, on "réarrange" des fonctions propres du laplacien : c'est-à-dire qu'on leur donne plus de symétrie, ce qui a pour effet de faire diminuer un certain produit scalaire (inégalité de Riesz) qui détermine justement la plus petite valeur propre du laplacien.

Dans la première partie, on expose les méthodes de réarrangement, et on démontre l'inégalité de Riesz. Dans la seconde, on donne du sens à l'expression "plus petite valeur propre du laplacien", et on pose les jalons qui permettent, en troisième partie, de "diagonaliser" le laplacien et de démontrer le théorème de Faber & Krahn. Dans la foulée, on montre un résultat similaire pour la deuxième valeur propre.

La quatrième partie présente les premières notions sur la  $\gamma$ -convergence, notion qui (entre autres) permet ultimement d'étudier le problème de l'unicité de l'ouvert minimisant la plus petite valeur propre du laplacien ; elle donne également à voir d'autres problèmes plus ou moins liés : minimisation sur un ouvert connexe, propriétés asymptotiques du spectre du laplacien. Enfin, figurent dans l'annexe quelques résultats dont on a jugé intéressant d'isoler l'énoncé et/ou la démonstration.

Nous tenons à remercier Grégoire Nadin de nous avoir introduits à ces problématiques parfois esthétiques, toujours intéressantes, et de nous avoir épaulés durant toute la rédaction de ce mémoire<sup>1</sup>.

---

1. Nous remercions également Mikaël de la Salle de son aide dans la démonstration de la proposition 26 !

# Table des matières

<b>1 Réarrangement des fonctions</b>	<b>3</b>
1.1 Cas des fonctions étagées positives . . . . .	3
1.2 Cas des fonctions mesurables positives . . . . .	4
1.3 Inégalités de réarrangement . . . . .	7
<b>2 Diagonalisation du laplacien : le choix de l'espace fonctionnel</b>	<b>18</b>
2.1 Rappels d'analyse hilbertienne . . . . .	18
2.2 Quel espace fonctionnel ? . . . . .	19
2.3 Les espaces de Sobolev $H^1$ et $H_0^1$ . . . . .	20
2.4 Régularité des réarrangements . . . . .	21
2.5 Dériver $ u $ . . . . .	25
2.6 Dérivées d'ordre supérieur, injections de Sobolev . . . . .	26
2.7 Formulation variationnelle des EDP et régularité elliptique . . . . .	27
<b>3 Minimisation des valeurs propres du laplacien à volume du domaine constant</b>	<b>28</b>
3.1 Retour au laplacien . . . . .	28
3.2 Positivité de $e_1$ . . . . .	29
3.3 Minimisation de la première valeur propre $\lambda_1$ . . . . .	30
3.4 Minimisation de la deuxième valeur propre $\lambda_2$ . . . . .	30
<b>4 Extensions, problèmes connexes</b>	<b>34</b>
4.1 $\gamma$ -convergence et optimisation . . . . .	34
4.2 Minimisation sur des ouverts connexes/convexes . . . . .	36
4.3 Asymptotique des valeurs propres et problème "Can one hear the shape of a drum?" . . . . .	37
<b>A Annexe</b>	<b>41</b>
A.1 Inégalité de Young . . . . .	41
A.2 Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov . . . . .	42
A.3 Surharmonicité et propriété de la surmoyenne . . . . .	44
A.4 Transformée de Fourier : rappels, caractérisation de $H^1(\mathbb{R}^N)$ . . . . .	44
<b>B Bibliographie</b>	<b>46</b>

# 1 Réarrangement des fonctions

Dans cette première partie, on expose le réarrangement des fonctions mesurables. Le but est, en symétrisant les fonctions, de minimiser un certain produit scalaire (qui interviendra dans l'expression de la première valeur propre du laplacien) : c'est le sens de l'inégalité de F. Riesz. Comme dans [BLL], on démontre d'abord celle-ci en dimension 1, puis en dimension quelconque à l'aide de la symétrisation de Steiner des ensembles mesurables.

## 1.1 Cas des fonctions étagées positives

Ces prolégomènes sont en grande partie issus de [Kav].

On considère des fonctions étagées positives de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}_+$  (pour la tribu borélienne complétée), de la forme

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}.$$

avec  $0 < a_n < \dots < a_1$ . On suppose aussi :  $\forall i, \mu(A_i) < +\infty$ ,  $\mu$  étant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition 1** – Le réarrangement de  $f$  est

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\{R_{i-1} \leq |x| < R_i\}}$$

où  $R_0 = 0$  et  $R_{i-1} \leq R_i$  avec  $\mu(\{R_{i-1} \leq |x| < R_i\}) = \mu(A_i)$ .

$f^*$  est symétrique par rapport à 0, décroissante, et vérifie :

$$\forall i, \mu(\{f = a_i\}) = \mu(\{f^* = a_i\}).$$

Au passage : les  $A_i$  de mesure nulle disparaissent dans le réarrangement.

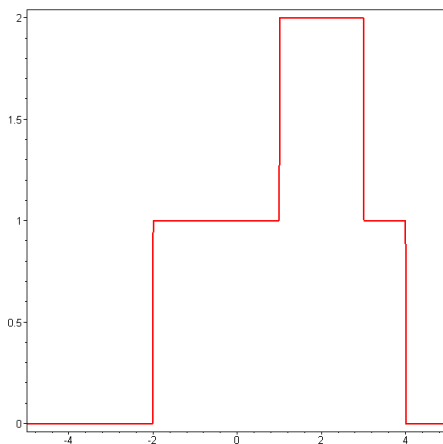


Figure 1 – Avant réarrangement de Schwarz.

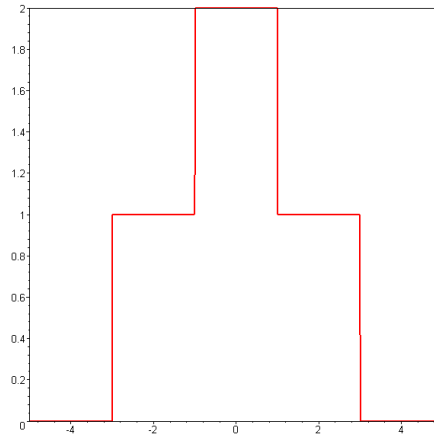


Figure 2 – Après réarrangement.

On a, pour  $\lambda \geq 0$ ,  $(\lambda f)^* = \lambda f^*$ . Mais  $f \mapsto f^*$  n'est pas linéaire : en général,  $(f + g)^* \neq f^* + g^*$ . Pour s'en convaincre, on peut remarquer que  $|(f + g)^*|_\infty = |f + g|_\infty$  alors que  $|f^* + g^*|_\infty = |f|_\infty + |g|_\infty$  ( $|\cdot|_\infty$  étant le supremum essentiel). Et ces deux grandeurs sont en général distinctes.

On a tout de même un ersatz de linéarité. Réécrivons en effet  $f$  sous la forme :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

avec  $f_i = 1_{\{f \geq a_i\}}$  et  $\lambda_i = a_i - a_{i+1} \geq 0$  ( $a_{n+1} = 0$  par convention). C'est en quelque sorte une description de  $f$  par ses lignes de niveaux.

Alors :

$$f^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^*$$

En effet, on a, d'une part :

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\{R_{i-1} \leq |x| < R_i\}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{\{|x| < R_i\}}$$

et d'autre part :  $f_i^* = 1_{\{|x| < R_i\}}$ .

## 1.2 Cas des fonctions mesurables positives

Soit  $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable positive. On suppose que

$$\forall \lambda > 0, \mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty (*)$$

condition vérifiée en particulier si  $f$  est dans un  $L^p$ .

**Définition 2** – Un réarrangement (de Schwarz)  $F$  de  $f$  est une fonction mesurable positive vérifiant :

(1)  $F$  est radiale décroissante, ie  $F(x) = g(|x|)$ , où  $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  est décroissante (on dira que  $F$  découle de  $g$ );

(2)  $\forall \lambda > 0, \mu(\{F \geq \lambda\}) = \mu(\{f \geq \lambda\})$ .

La propriété (1) assure que  $\{F \geq \lambda\}$  est une boule (de rayon fini, ouverte ou fermée) centrée en 0.

**Remarque** – Si  $f$  est étagée,  $f^*$  est bien un réarrangement de  $f$ .

**Remarque** – On parlera aussi de "symétrisée" (de Schwarz) de  $f$ .

### Proposition 1

Soit  $f$  mesurable positive vérifiant (\*). Alors  $f$  admet un réarrangement. "Le réarrangement est unique" au sens suivant : si  $F_1$  et  $F_2$  sont des réarrangements de  $f$ , découlant de  $g_1$  resp.  $g_2$ , alors  $g_1$  et  $g_2$  diffèrent sur un ensemble au plus dénombrable de points. En particulier,  $F_1 = F_2$   $\mu$ -p.p. On note  $f^*$  la classe des réarrangements de  $f$  pour la relation d'égalité  $\mu$ -p.p.

**Remarque** –  $f^*$  ne dépend que de la classe de  $f$  pour l'égalité  $\mu$ -p.p.

### Démonstration –

**Lemme** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions mesurables positives admettant pour réarrangement  $f_1^*$  resp.  $f_2^*$ . Si  $f_1 \leq f_2$   $\mu$ -p.p., alors  $f_1^* \leq f_2^*$   $\mu$ -p.p.

**Démonstration** – On suppose que  $f_1^*$  et  $f_2^*$  découlent de  $g_1$  respectivement  $g_2$  décroissantes. Soit  $r_0 > 0$  tel que  $g_1(r_0) > g_2(r_0)$ ; posons  $A_1 = \{g_1 \geq g_1(r_0)\}$  et  $A_2 = \{g_2 \geq g_1(r_0)\}$ . Alors  $A_1 \not\subseteq A_2$ . En effet, si  $g_2(r) \geq g_1(r_0)$ , alors  $g_2(r) \geq g_2(r_0)$  donc  $r \leq r_0$  ( $g_2$  décroissante), d'où  $g_1(r) \geq g_1(r_0)$  ( $g_1$  décroissante) : inclusion; mais  $g_1(r_0) \geq g_1(r_0)$  et  $g_2(r_0) < g_1(r_0)$  : inclusion stricte. Or  $A_1$  et  $A_2$  sont des intervalles et  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$  (car  $f_1 \leq f_2$   $\mu$ -p.p.) : on a donc  $A_2 = [0, a[$  et  $A_1 = [0, a]$ ; forcément,  $a = r_0$ . On voit alors que  $g_2$  a une discontinuité en  $r_0$ ; mais  $g_2$  est décroissante : ses discontinuités sont donc dénombrables. Finalement,  $g_1 \leq g_2$  sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points. ■

### Existence

Si  $f$  vérifie les hypothèses de l'énoncé, on se donne une suite croissante  $(f_n)$  de fonctions étagées telle que  $f_n \uparrow f$ .  $(f_n^*)$ , croissante, converge simplement vers  $h : \mathbb{R}^N \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ .  $h$  est clairement positive et radiale décroissante : si  $f_n^*$  découle de  $g_n$ ,  $(g_n) \uparrow g$ , fonction positive décroissante; et  $h$  découle de  $g$ .

De plus, on a, si  $\lambda > 0$  et  $K \geq \lambda^{-1}$  :

$$\mu(\{f \geq \lambda\}) = \mu\left(\bigcap_{k \geq K} \bigcup_{n \geq 0} \left\{f_n \geq \lambda - \frac{1}{k}\right\}\right)$$

Comme l'union est croissante  $((f_n) \uparrow)$ , et l'intersection, décroissante (en mesure finie), on a donc :

$$\begin{aligned} \mu(\{f \geq \lambda\}) &= \inf_{k \geq K} \sup_{n \geq 0} \mu\left(\left\{f_n \geq \lambda - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= \inf_{k \geq K} \sup_n \mu\left(\left\{f_n^* \geq \lambda - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= \mu(\{h \geq \lambda\}). \end{aligned}$$

$h$  est donc un réarrangement de  $f$ .

### Unicité

Elle découle immédiatement du lemme. ■

## Proposition 2

Soit  $G : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable telle que  $G(0) = 0$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))dx.$$

En particulier, on a, pour tout  $p \geq 1$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)^p dx.$$

**Démonstration** – On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}_+} G(u)d\nu(u)$$

où  $\nu$  est l'image de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$  par  $f$ . Mais  $G(0) = 0$ , donc :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}_+^*} G(u)d\nu(u).$$

De même, si  $\eta$  est l'image de la mesure de Lebesgue par  $f^*$ , alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))dx = \int_{\mathbb{R}_+^*} G(u)d\eta(u).$$

Mais par définition de  $f^*$ ,  $\nu$  et  $\eta$  coïncident sur les intervalles  $[\lambda, +\infty[$  pour  $\lambda > 0$ . Le théorème des classes monotones donne  $\nu = \eta$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} G(u)d\nu(u) = \int_{\mathbb{R}_+^*} G(u)d\eta(u)$$

d'où le résultat. ■

**Remarque** – L'hypothèse  $G(0) = 0$  est cruciale. On peut en effet avoir  $\nu(\{0\}) \neq \eta(\{0\})$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vaut 0 sur  $]-\infty, 0]$  et  $x^{-1}$  sur  $]0, +\infty[$ , alors  $f^*(x) = (2x)^{-1}$   $\mu$ -p.p. On a alors  $\nu(\{0\}) = +\infty$  et  $\eta(\{0\}) = 0$ .

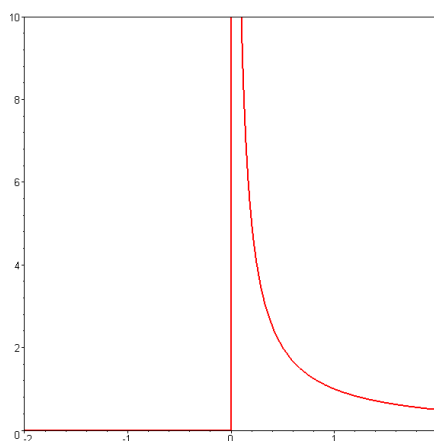


Figure 3 –  $f$ .

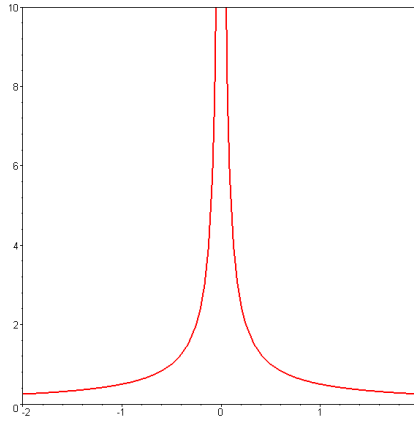


Figure 4 –  $f^*$ .

### 1.3 Inégalités de réarrangement

#### Proposition 3

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions mesurables positives vérifiant  $\mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty$  pour  $\lambda > 0$  (idem pour  $g$ ), alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} fg \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^* g^*.$$

**Remarque** – Pour que ces intégrales soient finies, on peut supposer  $f$  (donc  $f^*$ ) dans  $L^p$  et  $g$  (donc  $g^*$ ) dans  $L^q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . En particulier, si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2$ , l'inégalité implique :

$$\|f^* - g^*\|_2 \leq \|f - g\|_2.$$

(Il suffit de développer le carré de ces deux normes, en se rappelant que  $\|f^*\|_2^2 = \|f\|_2^2$ )

**Démonstration** – D'après la propriété de convergence monotone, il suffit de démontrer le résultat lorsque  $f$  et  $g$  sont des fonctions étagées. Mais si  $f$  étagée s'écrit, en description "par lignes de niveaux" :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{C_i},$$

avec  $C_i \subseteq C_{i+1}$ , alors

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i 1_{B^*(C_i)}$$

où  $B^*(C_i)$  est la boule centrée en 0 de même mesure que  $C_i$ . Il suffit donc de montrer que si  $C$  et  $C'$  sont deux ensembles mesurables,  $\mu(C \cap C') \leq \mu(B^*(C) \cap B^*(C'))$ . Or en effet

$$\mu(C \cap C') \leq \min(\mu(C), \mu(C')) = \mu(B^*(C) \cap B^*(C'))$$

car soit  $B^*(C) \subseteq B^*(C')$ , soit l'inverse. ■

L'inégalité suivante, sous des dehors bonhommes, est nettement plus redoutable.

**Théorème 1 (F. Riesz)**

Soient  $f, g, h$  mesurables positives telles que  $\mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty$  pour  $\lambda > 0$  (idem pour  $g$  et  $h$ ). Alors :

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x)g(y)h(x-y)dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(y)h^*(x-y)dx dy.$$

**Remarque** – Pour que ces intégrales soient finies, on peut, en vertu de l’inégalité de Young, supposer  $f \in L^p, g \in L^q, h \in L^r$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$  (la convolée  $g * h$  est alors dans  $L^{\frac{1}{1-1/p}}$ ).

**Démonstration** – Comme dans l’inégalité précédente, il suffit de montrer le résultat lorsque  $f, g$  et  $h$  sont des indicatrices d’ensembles mesurables, et plus précisément des ensembles mesurables de mesure finie. Commençons par montrer le résultat dans le cas d’une seule variable réelle ( $N = 1$ ).

Dans ce cas-là, on peut encore réduire le problème et vérifier le résultat lorsque les trois fonctions sont des indicatrices d’unions finies d’intervalles compacts disjoints : montrons-le.

D’abord une notation : si  $A$  est un ensemble mesurable et  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , on note

$$(A|c_1x + c_2y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c_1x + c_2y \in A\}.$$

Procédons en deux étapes pour la réduction.

– On considère les ensembles mesurables  $A^{(1)}, A^{(2)}$  et  $A^{(3)}$  tels que  $f = 1|_{A^{(1)}}, g = 1|_{A^{(2)}}, h = 1|_{A^{(3)}}$ . Comme la mesure de Lebesgue est extérieurement régulière, il existe des suites décroissantes d’ouverts  $(U_n^{(k)})_{n \geq 1}$  (pour  $k = 1 \dots 3$ ) telles que  $A^{(k)} \subseteq U_n^{(k)}$  et  $\mu(U_n^{(k)} \setminus A^{(k)}) \leq \frac{1}{n}$ . On a

$$1|_{U_n^{(1)}}(x)1|_{U_n^{(2)}}(y)1|_{U_n^{(3)}}(x-y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1|_{A^{(1)}}(x)1|_{A^{(2)}}(y)1|_{A^{(3)}}(x-y) \quad \mu(dxdy) - \text{p.p.}$$

De plus, il s’agit d’une convergence décroissante. Mais

$$\mu((U_1^{(1)}|x) \cap (U_1^{(2)}|y) \cap (U_1^{(3)}|x-y)) \leq \mu(U_1^{(1)})\mu(U_1^{(2)}) < \infty.$$

D’où

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1|_{U_n^{(1)}}(x)1|_{U_n^{(2)}}(y)1|_{U_n^{(3)}}(x-y)dx dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1|_{A^{(1)}}(x)1|_{A^{(2)}}(y)1|_{A^{(3)}}(x-y)dx dy.$$

De même

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (1|_{U_n^{(1)}})^*(x)(1|_{U_n^{(2)}})^*(y)(1|_{U_n^{(3)}})^*(x-y)dx dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (1|_{A^{(1)}})^*(x)(1|_{A^{(2)}})^*(y)(1|_{A^{(3)}})^*(x-y)dx dy.$$

On s’est donc ramené à montrer l’inégalité pour des indicatrices d’ouverts de  $\mathbb{R}$ , qui sont des unions dénombrables d’intervalles ouverts disjoints.

– Maintenant, on passe de l’union finie d’intervalles à l’union dénombrable par convergence monotone. De plus l’adhérence d’une union finie d’intervalles ouverts de mesure finie est une union finie d’intervalles compacts, et la différence symétrique des deux est de mesure nulle.

Commençons donc par montrer l’inégalité de Riesz pour des indicatrices d’intervalles compacts. Ensuite on étendra aux indicatrices d’unions finies d’intervalles compacts disjoints. Prenons  $a \geq b > 0$  et  $c > 0$ . On va montrer que la fonction

$$\phi(t) = \mu((-a, a]|x) \cap ([-b, b]|y) \cap (t + [-c, c]|x-y))$$



est croissante sur  $\mathbb{R}_-$  (et, par symétrie, décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ). Soit  $l(t)$  la longueur du segment intersection de la droite  $x - y = t$  et du rectangle  $[-a, a] \times [-b, b]$ . En faisant un dessin, on se convainc que  $l(t)$  est une fonction décroissante de  $|t|$ . Or

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = l(t+c) - l(t-c)$$

la quantité précédente étant positive si  $t \leq 0$ . D'où la croissance de  $\phi$  sur  $\mathbb{R}_-$ . Ceci montre l'inégalité de Riesz pour des indicatrices d'un intervalle compact.

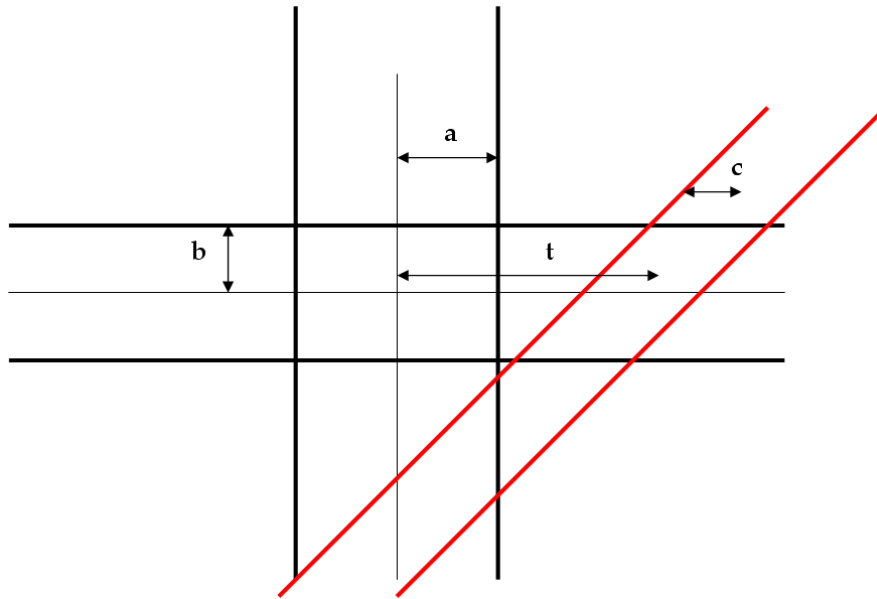


Figure 5 -  $\phi(t) = 0$ .

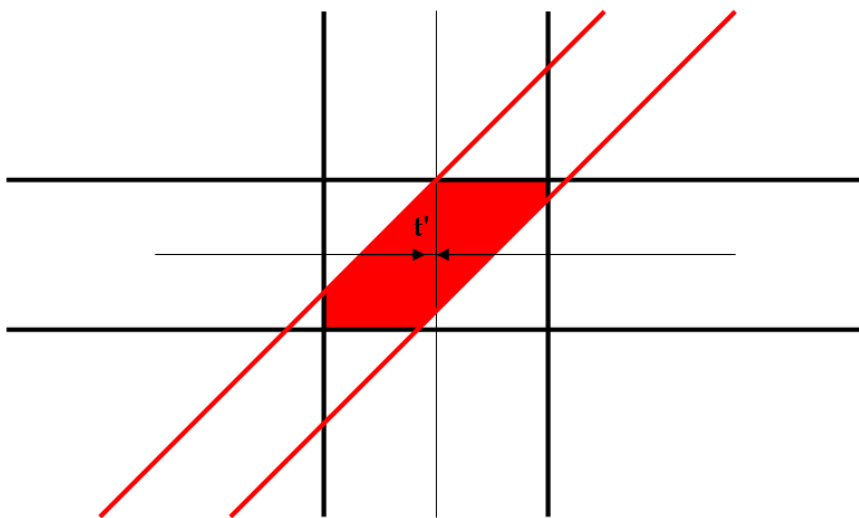


Figure 6 -  $\phi(t') > 0$ .

Pour des indicatrices d'unions finies d'intervalles compacts, on va procéder par récurrence sur  $n_1 + n_2 + n_3$  où  $n_1$  (resp.  $n_2, n_3$ ) est le nombre d'intervalles compacts disjoints dont  $f$  (resp.  $g, h$ ) est indicatrice.

Soient  $\prod_{i=1}^{n_k} (a_i^{(k)} + [-b_i^{(k)}, +b_i^{(k)}])$  lesdits intervalles compacts. On pose pour  $t \in [0, 1]$

$$I^{(k)}(t) = \bigcup_{i=1}^{n_k} ((1-t)a_i^{(k)} + [-b_i^{(k)}, +b_i^{(k)}])$$

$$\psi(t) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^3 (I^{(k)}(t) \mid \varphi_k(x, y))\right)$$

où  $\varphi_1(x, y) = x$ ,  $\varphi_2(x, y) = y$  et  $\varphi_3(x, y) = x - y$ . Montrons par récurrence sur  $n_1 + n_2 + n_3$  que  $\psi$  est croissante sur  $[0, 1]$ . Le cas  $n_1 + n_2 + n_3 = 3$  a été traité précédemment ( $\psi(t) = \phi((a^{(3)} - (a^{(1)} - a^{(2)}))(1-t))$ ).

Lorsque  $t$  varie de 0 à 1, on ramène les milieux de chacune des bandes

$$((1-t)a_i^{(k)} + [-b_i^{(k)}, +b_i^{(k)}]) \mid \varphi_k(x, y)$$

en 0. A  $t = 1$ , toutes les bandes parallèles se superposent. Si  $n_1 + n_2 + n_3 > 3$ , il y a une direction au moins pour laquelle à  $t = 0$  il y a deux bandes parallèles disjointes. Ces deux bandes se toucheront à un instant  $t < 1$ . Soit donc  $\tau$  le premier instant où deux bandes parallèles, disjointes à  $t = 0$ , se touchent le long de leur frontière.

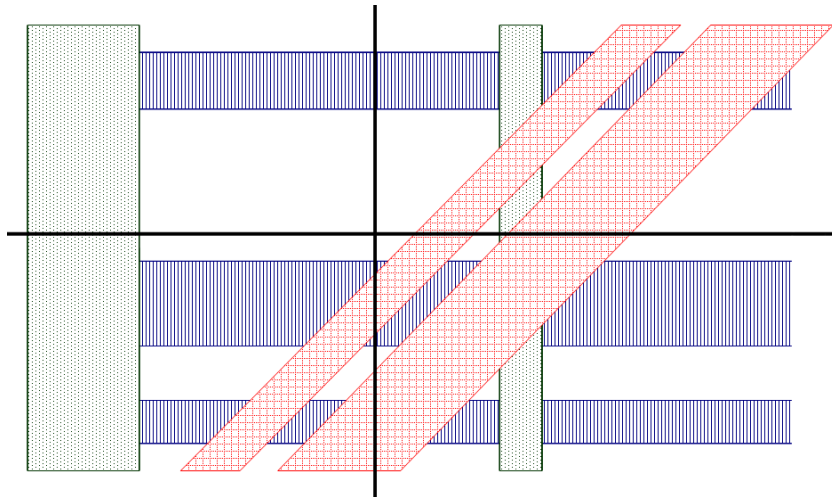


Figure 7 -  $t = 0$ .

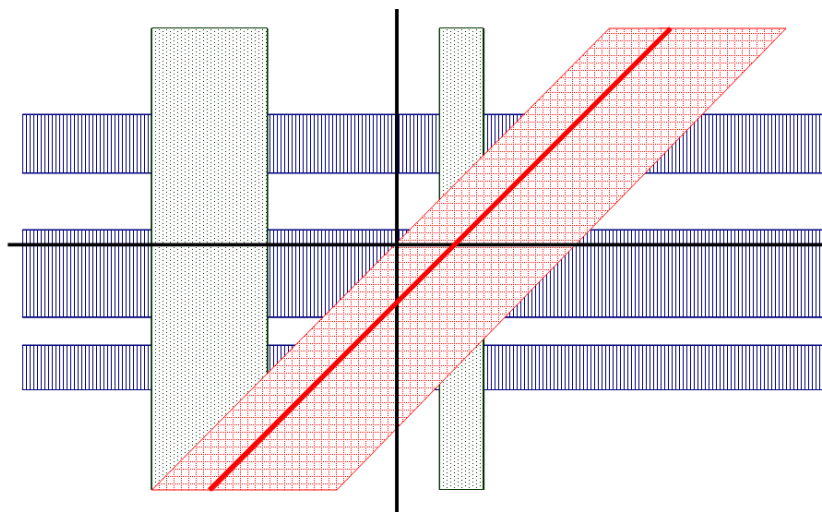


Figure 8 -  $t = \tau$ .

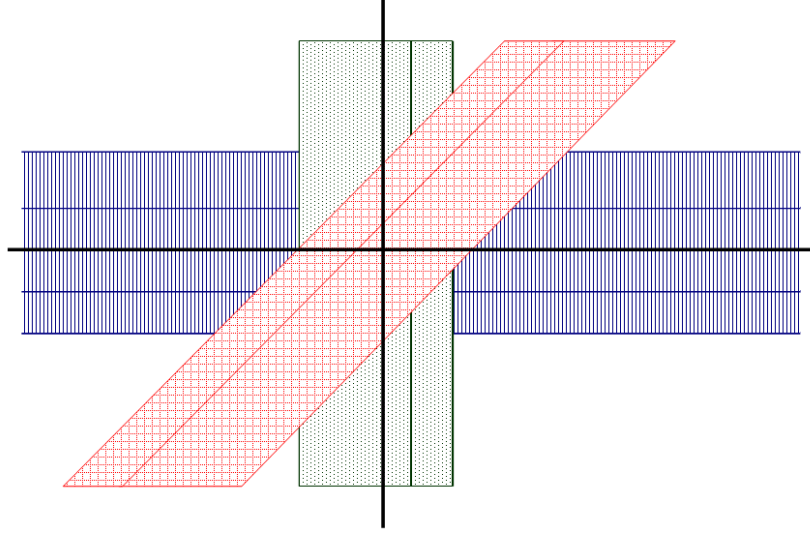


Figure 9 -  $t = 1$ .

Pour  $t \in [0, \tau]$ ,

$$\psi(t) = \sum_{i_1 \leq n_1, i_2 \leq n_2, i_3 \leq n_3} \mu \left( \left( \bigcap_{k=1}^3 ((1-t)a_{i_k}^{(k)} + [-b_{i_k}^{(k)}, +b_{i_k}^{(k)}]) \right) \varphi_k(x, y) \right)$$

car toutes les bandes parallèles sont d'intérieurs disjoints. Or, comme il a été vu dans la démonstration de l'inégalité de Riesz pour des indicatrices d'un compact, chacune des fonctions

$$t \mapsto \mu \left( \bigcap_{k=1}^3 ((1-t)a_{i_k}^{(k)} + [-b_{i_k}^{(k)}, +b_{i_k}^{(k)}]) \varphi_k(x, y) \right)$$

est croissante sur  $[0, 1]$ . D'où

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_{I^{(1)}(0)}(x) 1_{I^{(2)}(0)}(y) 1_{I^{(3)}(0)}(x-y) dx dy \\ &\leq \psi(\tau) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_{I^{(1)}(\tau)}(x) 1_{I^{(2)}(\tau)}(y) 1_{I^{(3)}(\tau)}(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

Mais à  $t = \tau$ , le nombre d'intervalles compacts mis en jeu diminue d'au moins 1. Par hypothèse de récurrence,

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_{I^{(1)}(\tau)}(x) 1_{I^{(2)}(\tau)}(y) 1_{I^{(3)}(\tau)}(x-y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (1_{I^{(1)}(\tau)})^*(x) (1_{I^{(2)}(\tau)})^*(y) (1_{I^{(3)}(\tau)})^*(x-y) dx dy.$$

Or  $(1_{I^{(k)}(0)})^* = (1_{I^{(k)}(\tau)})^*$  pour  $k = 1 \dots 3$ . D'où finalement

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_{I^{(1)}(0)}(x) 1_{I^{(2)}(0)}(y) 1_{I^{(3)}(0)}(x-y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (1_{I^{(1)}(0)})^*(x) (1_{I^{(2)}(0)})^*(y) (1_{I^{(3)}(0)})^*(x-y) dx dy.$$

Ceci achève la démonstration de l'inégalité de Riesz dans le cas d'une variable réelle. ■

Pour passer à des fonctions de plusieurs variables réelles, on introduit la symétrisation de Steiner. L'idée est qu'en procédant à des "symétrisations à une variable" successives (pour lesquelles on a déjà l'inégalité de Riesz), on parviendra à approcher d'aussi près que nécessaire la symétrisée de Schwarz.

Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^N$ ; on choisit une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_N)$  de  $\mathbb{R}^N$  telle que  $(e_2, \dots, e_N)$  soit une base de  $H$ , et on note  $x = (x_1, \dots, x_N)$  les coordonnées associées.

**Définition 3** – Soit  $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}_+$  mesurable positive, telle que  $\mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty$  pour  $\lambda > 0$ . Soit  $g_{(x_2, \dots, x_N)} : x_1 \mapsto f(x_1, \dots, x_N)$  sa première application partielle en  $(x_2, \dots, x_N)$ . Le réarrangement (de Steiner) de  $f$  relativement à  $H$  est  $f_H^* : x \mapsto g_{(x_2, \dots, x_N)}^*(x_1)$ .

Ainsi formulée, la définition n'est pas tout à fait légitime :  $g$ , fibre 1-dimensionnelle de  $f$  au-dessus de  $(x_2, \dots, x_N)$  ne vérifie pas nécessairement  $\mu(\{g \geq \lambda\}) < +\infty$  pour tout  $\lambda > 0$ . C'est néanmoins le cas pour presque-tout  $(x_2, \dots, x_N)$ , d'après le théorème de Fubini (puisque  $f$  elle-même vérifie l'hypothèse) : on s'en contente.

En intégrant d'abord selon la première coordonnée de  $x$  et de  $y$ , on déduit directement de l'inégalité de Riesz à une variable la

#### Proposition 4

Soient  $f, g, h$  mesurables positives telles que  $\mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty$  pour  $\lambda > 0$  (idem pour  $g$  et  $h$ ). Alors :

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x)g(y)h(x-y)dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f_H^*(x)g_H^*(y)h_H^*(x-y)dx dy.$$

Montrons maintenant que la symétrisation de Schwarz s'obtient comme limite de symétrisations de Steiner. On peut à nouveau se borner à des indicatrices d'ensembles mesurables : définissons donc la symétrisation de Steiner d'un ensemble mesurable relativement à un hyperplan.

Dans ce qui suit, on notera  $\mu_d$  la mesure de Lebesgue  $d$ -dimensionnelle sur la tribu complétée.

**Définition 4** – Soit  $A$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^N$ .  $A'$  est un réarrangement (de Steiner) de  $A$  relativement à  $H$  si et seulement si pour toute droite  $D$  orthogonale à  $H$ ,  $A' \cap D$  est un intervalle de  $D$  centré en 0 et de même mesure sous  $\mu_1$  que  $A \cap D^2$ .

#### Remarque –

- Si  $A$  est mesurable borné, tous ses réarrangements relativement à  $H$  sont mesurables (c'est une conséquence des théorèmes de Fubini : la mesure d'une fibre 1-dimensionnelle de  $A$  en chaque point de  $H$  est un fonction sur  $H$  qui est mesurable; ensuite,  $A_H^*$  peut être vue comme la portion de l'espace délimitée par deux graphes de fonctions mesurables de  $H$  dans  $\mathbb{R}$ ) et de même mesure ( $N$ -dimensionnelle). En conséquence, on peut noter  $A_H^*$  "le" réarrangement de  $A$  relativement à  $H$  – défini à des ensembles de mesure nulle près.
- " $A = B$  à des ensembles de mesure nulle près" s'écrit aussi  $1|_A = 1|_B$   $\mu_N$ -p.p., ou encore

$$\mu_N(A \Delta B) = 0,$$

$\Delta$  désignant la différence symétrique.

Les symétrisations de Steiner ont tendance à régulariser les ensembles mesurables dans le sens suivant :

#### Proposition 5

Soit  $A$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $(e_1, \dots, e_k)$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^N$ , d'hyperplans orthogonaux respectifs  $H_1, \dots, H_k$ , alors  $A_{H_1, \dots, H_k}^*$ , obtenu à partir de  $A$  par symétrisation successives selon  $H_1, \dots, H_k$ , est symétrique par rapport à chaque hyperplan  $H_j$  et convexe par rapport à chaque direction  $e_j$  (i.e. l'intersection d'une droite affine de direction  $e_j$  avec  $A_{H_1, \dots, H_k}^*$  est un intervalle).

---

2. Un théorème de Fubini assure que  $A \cap D$  est mesurable, en tant fibre 1-dimensionnelle de  $A$ , qui est mesurable.

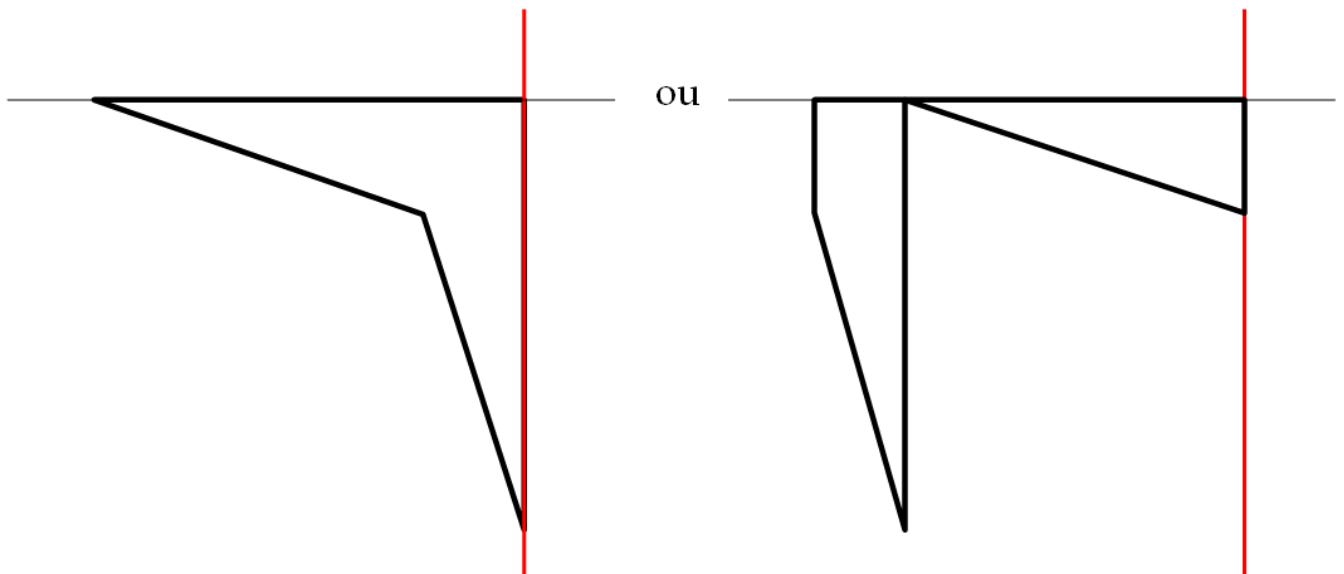


Figure 10 – deux configurations avant réarrangement de Steiner.

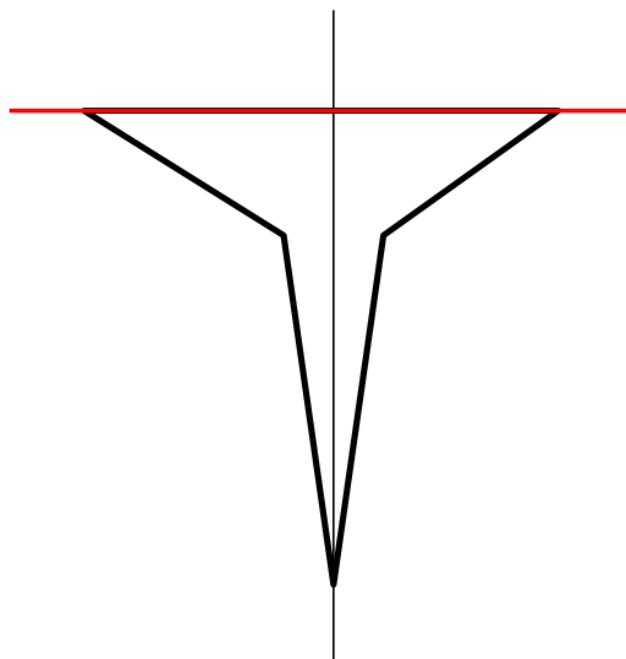


Figure 11 – après réarrangement par rapport à l'axe vertical.

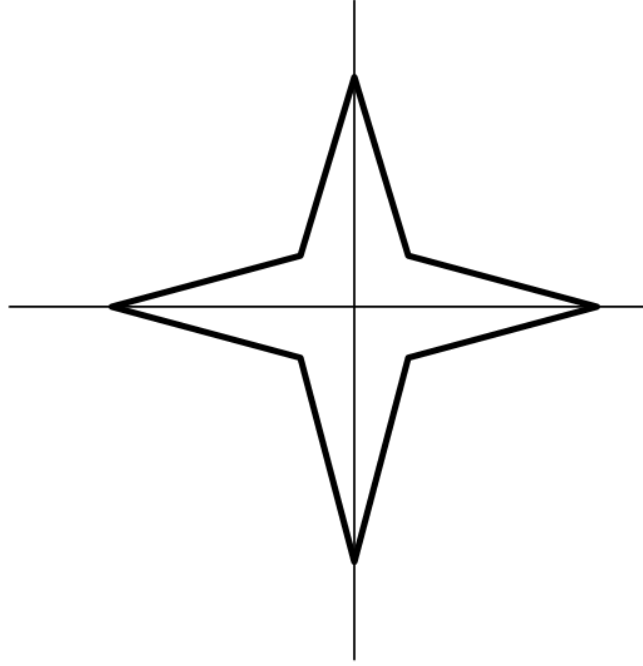


Figure 12 – après un deuxième réarrangement, par rapport à l'axe horizontal.

On a aussi le résultat élémentaire suivant :

**Proposition 6**

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^N$  et  $H$  un hyperplan. Alors

$$\mu_N(A_{1H}^* \Delta A_{2H}^*) \leq \mu_N(A_1 \Delta A_2).$$

Si  $A$  est un ensemble mesurable borné, contenu dans une boule euclidienne  $B(0, R)$ , tous ses symétrisés de Steiner le seront également. Si on définit une suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  où  $A_0 = A$  et  $A_{n+1}$  est obtenu à partir de  $A_n$  par une symétrisation de Steiner, la quantité  $\mu_N(A_n \Delta B^*(A))$  va être décroissante par la proposition précédente<sup>3</sup>. On dispose du résultat suivant pour caractériser le cas stationnaire :

**Proposition 7**

Si  $A$  est mesurable, de mesure finie et tel que pour tout hyperplan  $H$  de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\mu_N(A_H^* \Delta B^*(A)) = \mu_N(A \Delta B^*(A))$$

alors  $A = B^*(A)$  à des ensembles négligeables près.

**Démonstration** – Soit  $(e_1, \dots, e_N)$  la base orthonormée canonique de  $\mathbb{R}^N$  et  $H_1, \dots, H_N$  les hyperplans orthogonaux respectifs. On pose  $A' = A_{H_1, \dots, H_N}^*$ . Alors  $B^*(A') = B^*(A)$  et pour tout hyperplan  $H$  de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\mu_N(A_H^* \Delta B^*(A')) = \mu_N(A' \Delta B^*(A')).$$

De plus, si  $(x_1, \dots, x_N) \in A'$ , si  $(y_1, \dots, y_N)$  vérifie  $|y_i| \leq |x_i|$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $(y_1, \dots, y_N) \in A'$  (par convexité et symétrie de  $A'$  selon chaque axe). Supposons par l'absurde qu'on n'ait pas à des ensembles négligeables près  $A' = B^*(A')$ . Alors on peut trouver des points  $x^{(1)}$  et  $x^{(2)}$  qui ne soient contenus dans aucun des hyperplans  $H_1, \dots, H_N$ , et tels que  $\|x^{(1)}\|_2 < 1$  et  $x^{(1)} \notin A'$  d'une part,  $\|x^{(2)}\|_2 > 1$  et  $x^{(2)} \in A'$  d'autre part.

3.  $B^*(A)$  étant la boule centrée en 0 de même mesure que  $A$ .

$$\{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y\|_2 < 1 \text{ et } |y_i| > |x_i^{(1)}|, \forall i\}$$

est un ouvert non vide de  $B^*(A') \setminus A'$  et

$$\{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y\|_2 > 1 \text{ et } |y_i| < |x_i^{(2)}|, \forall i\}$$

est un ouvert non vide de  $A' \setminus B^*(A')$ . On peut donc trouver deux boules non vides  $B(a_1, r) \subseteq B^*(A') \setminus A'$  et  $B(a_2, r) \subseteq A' \setminus B^*(A')$ . Soit  $H$  l'hyperplan orthogonal à  $a_2 - a_1$ . Alors

$$\mu_N(A'_H \Delta B^*(A')) \leq \mu_N(A' \Delta B^*(A')) - \mu_N(B(a_1, r)) = \mu_N(A' \Delta B^*(A')) - \mu_N(B(a_2, r)).$$

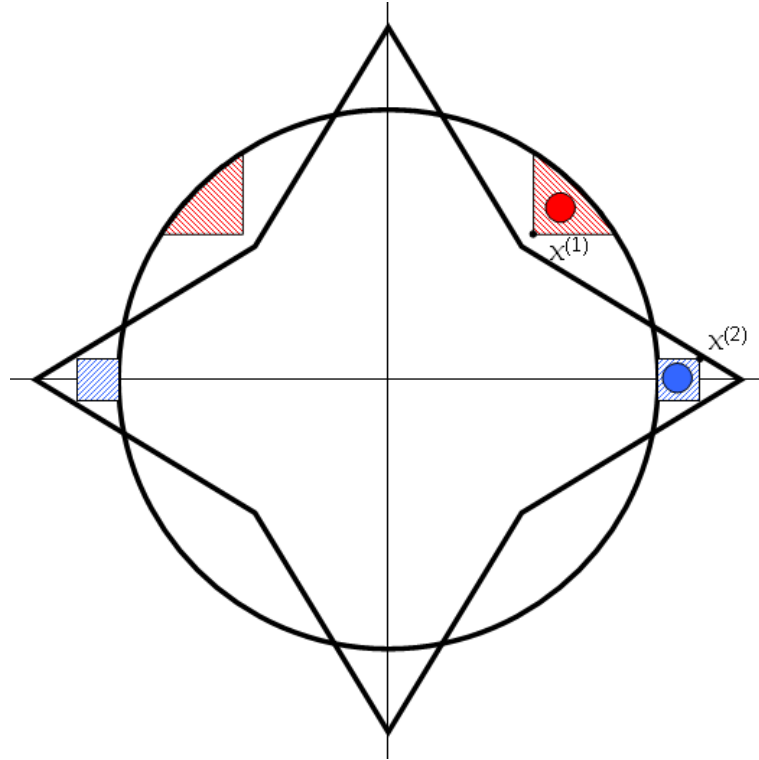


Figure 13 –  $\mu(A' \Delta B^*(A')) \neq 0$ .

Contradiction. D'où  $A' = B^*(A')$ . Or

$$\mu_N(A' \Delta B^*(A')) = \mu_N(A \Delta B^*(A)).$$

D'où  $A = B^*(A)$  à des ensembles négligeables près. ■

Il est temps de conclure :

### Proposition 8

Soit  $A$  un ensemble mesurable borné de  $\mathbb{R}^N$  (contenu dans une boule euclidienne  $B(0, R)$ ) et  $S$  l'ensemble des mesurables obtenus à partir de  $A$  après un nombre fini de symétrisations de Steiner. Alors l'adhérence de  $S$  au sens  $L^1$  contient le symétrisé de Schwarz de  $A$ , i.e. il existe une suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  de  $S$  telle que

$$\mu_N(A_n \Delta B^*(A)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration** – On définit par récurrence la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  :

- $A_0 = A$
- $A_n$  est obtenu à partir de  $A_{n-1}$  de la manière suivante : On choisit un hyperplan  $H_n$  vérifiant :

$$\mu_N(A_{n-1,H_n}^* \Delta B^*(A)) < \inf_H (\mu_N(A_{n-1,H}^* \Delta B^*(A))) + \frac{1}{n}$$

On symétrise  $A_{n-1}$  d'abord par rapport à  $H_n$ , puis par rapport à  $N - 1$  autres hyperplans tels que la famille des vecteurs normaux à ces hyperplans est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^N$ . Alors  $A_n$  vérifie :

$$\mu_N(A_n \Delta B^*(A)) < \inf_H (\mu_N(A_{n-1,H}^* \Delta B^*(A))) + \frac{1}{n}.$$

Montrons que la famille  $(1|_{A_n})_{n \geq 0}$  est relativement compacte dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  : déjà, toutes les fonctions sont à support compact contenu dans  $B(0, R)$ . Soit  $n \geq 1$ . On représente  $\mathbb{R}^N$  par un système de coordonnées orthonormées adapté à la suite de symétrisations effectuées pour passer de  $A_{n-1}$  à  $A_n$ . Alors si  $x$  est un point de  $A_n$  et  $y \in \mathbb{R}^N$  vérifie

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, |y_j| \leq |x_j|$$

alors  $y$  est dans  $A_n$ . Ceci implique que pour tous  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_k)$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| 1|_{A_n}(x_1+y_1, \dots, x_{k-1}+y_{k-1}, x_k+y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - 1|_{A_n}(x_1+y_1, \dots, x_{k-1}+y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \right| dx_k \leq 2|y_k|.$$

Et donc, pour tout  $y \in B(0, R)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| 1|_{A_n}(x+y) - 1|_{A_n}(x) \right| dx = \int_{B(0,2R)} \left| 1|_{A_n}(x+y) - 1|_{A_n}(x) \right| dx \leq 2(4R)^{N-1} \sum_{k=1}^N |y_k| \leq 2(4R)^{N-1} \sqrt{N} \|y\|_2.$$

L'intégrale (\*) converge donc vers 0 lorsque  $y$  tend vers 0 uniformément pour toute la famille  $(1|_{A_n})_{n \geq 1}$ . D'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov<sup>4</sup>, il existe une extraction  $(n_j)$  et une fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  telles que :

$$1|_{A_{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f \text{ au sens } L^1$$

Donc une sous-suite de  $(A_{n_j})$  converge vers  $f$  presque partout. D'où presque partout  $f$  vaut 0 ou 1. Donc  $f$  est l'indicatrice d'un ensemble mesurable  $A_\infty$ , de même mesure que  $A$ . Supposons par l'absurde que  $A_\infty$  n'est pas  $B^*(A)$  aux ensembles négligeables près. Alors

$$\delta := \mu_N(A_\infty \Delta B^*(A)) > 0.$$

D'après la proposition 7, il existe un hyperplan  $V$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$\mu_N((A_\infty)_V^* \Delta B^*(A)) = \delta - \varepsilon.$$

Mais alors

$$\mu_N((A_{n_j})_V^* \Delta B^*(A)) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \delta - \varepsilon.$$

---

4. Voyez l'annexe A.2.



Il existe donc un  $n_j > \frac{2}{\varepsilon} - 1$  tel que

$$\mu_N((A_{n_j})_V^* \Delta B^*(A)) < \delta - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier

$$\mu_N((A_{n_j})_V^* \Delta B^*(A)) + \frac{1}{n_j + 1} < \delta \leq \mu_N(A_{n_j+1} \Delta B^*(A))$$

ce qui contredit la propriété de construction de  $A_{n_j+1}$ . D'où  $A_\infty = B^*(A)$ . Ceci achève la preuve de la proposition 8 et de l'inégalité de Riesz. ■

## 2 Diagonalisation du laplacien : le choix de l'espace fonctionnel

Pour minimiser la première valeur propre du laplacien, il faut déjà diagonaliser celui-ci ! Le théorème de diagonalisation en base hilbertienne des opérateurs auto-adjoints compacts dans les espaces de Hilbert séparables est l'outil rêvé pour cela. Mais les espaces de fonctions "classiquement" dérivables ne sont pas de Hilbert pour le produit scalaire  $L^2$  ; on est donc amené à introduire des espaces de fonctions "faiblement" dérivables : les espaces de Sobolev  $H^1$  et  $H_0^1$ .

En plus de citer (et, parfois, de prouver) certains résultats techniques sur ces espaces (dérivation d'une valeur absolue, injections de Sobolev), on étudie leur stabilité par réarrangement, et on montre comment y envisager l'opérateur laplacien (c'est la formulation variationnelle des EDP).

### 2.1 Rappels d'analyse hilbertienne

Commençons par rappeler l'important théorème de Riesz-Fréchet :

**Théorème 2** (Riesz-Fréchet)

Soit  $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert. L'application :

$$x \in \mathcal{H} \mapsto \{y \mapsto \langle x | y \rangle\} \in \mathcal{H}'$$

est une isométrie de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}'$ .

Bien entendu,  $\mathcal{H}'$  est muni de la norme duale de la norme associée à  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Le théorème de Riesz-Fréchet dit essentiellement que toute forme linéaire continue sur  $\mathcal{H}$  est le produit scalaire avec un certain vecteur.

Passons maintenant à deux définitions.

**Définition 5** – Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Un élément  $u$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  est dit compact si  $u(B_E)$ , image de la boule unité par  $u$ , est relativement compacte (ie d'adhérence compacte) dans  $F$ .

**Définition 6** – Soit  $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert, et  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .  $u$  est auto-adjoint ssi

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

On dispose alors de l'important théorème de diagonalisation en base hilbertienne des opérateurs auto-adjoints compacts dans les espaces de Hilbert séparables (cf. [Pau], th. 6.53 et 6.54). Si  $u$  est un endomorphisme linéaire, on note  $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id})$ .

**Théorème 3**

Soit  $u$  un opérateur auto-adjoint compact dans un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$ . Il existe deux suites décroissantes, finies ou infinies, de réels strictement positifs,  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}, n < N_+}$  et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}, n < N_-}$ ,  $(\lambda_n)$  (resp.  $(\mu_n)$ ) convergeant vers 0 si  $N_+ = \infty$  (resp.  $N_- = \infty$ ), et telles que :

- les  $\lambda_n$  et  $-\mu_n$  sont les valeurs propres non nulles de  $u$  ; elles sont de multiplicité finie ;
- $\mathcal{H}$  est somme hilbertienne de  $E_0$  et des  $E_{\lambda_n}, E_{-\mu_n}$  ;
- si  $k < N_+$  et  $n < N_-$ , alors

$$\lambda_k = \max_{x \in (E_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i})^\perp} \frac{\langle u(x) | x \rangle}{\|x\|^2}, \quad -\mu_n = \min_{x \in (E_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{-\mu_i})^\perp} \frac{\langle u(x) | x \rangle}{\|x\|^2}.$$

En d'autres termes, les valeurs propres<sup>5</sup> non nulles de  $u$  sont de multiplicité finie, et sans point d'accumulation autre que 0; en conséquence, on peut les ranger par ordre décroissant (en valeur absolue), en séparant les valeurs positives et négatives. Le dernier point de la proposition dit que les valeurs propres de  $u$  se mettent sous la forme de "quotients de Rayleigh".

Notons que réciproquement, il suffit de rendre extrémal un quotient de Rayleigh pour être vecteur

propre. Plus précisément, si  $x \in \left( E_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i} \right)^\perp$  vérifie

$$\frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2} = \max_{x' \in (E_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i})^\perp} \frac{\langle u(x')|x' \rangle}{\|x'\|^2}$$

alors  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$  (idem pour  $-\nu_n$ ). En effet, on peut décomposer  $x$  sur  $E_0$ , les  $E_{-\nu_i}$  et les  $E_{\lambda_j}$  :

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{N_-} \sum_{l=1}^{\dim E_{-\nu_i}} c_{i_l}(x) e_{i_l} + \sum_{j=1}^{N_+} \sum_{l=1}^{\dim E_{\lambda_j}} d_{j_l}(x) f_{j_l}$$

où  $\{e_{i_l}\}_l$  (resp.  $\{f_{j_l}\}_l$ ) est une base orthonormale de  $E_{-\nu_i}$ , qui est de dimension finie (resp. de  $E_{\lambda_j}$ ). Par hypothèse sur  $x$ , certains termes sont nuls :

$$x = \sum_{i=1}^{N_-} \sum_{l=1}^{\dim E_{-\nu_i}} c_{i_l}(x) e_{i_l} + \sum_{j=k}^{N_+} \sum_{l=1}^{\dim E_{\lambda_j}} d_{j_l}(x) f_{j_l}.$$

Mais alors, par orthogonalité,

$$\langle u(x)|x \rangle = - \sum_{i=1}^{N_-} \sum_{l=1}^{\dim E_{-\nu_i}} \nu_i c_{i_l}(x)^2 + \sum_{j=k}^{N_+} \sum_{l=1}^{\dim E_{\lambda_j}} \lambda_j d_{j_l}(x)^2 \leq \lambda_k \|x\|^2$$

et l'égalité n'a lieu que si les  $d_{k_l}(x)$  sont les seuls coefficients non nul, ie si  $x$  est vecteur propre associé à  $\lambda_k$ .

**Remarque** –  $\mathcal{H}$  est supposé séparable pour que  $E_0$  admette une base hilbertienne (dénombrable) – dans ce cas,  $u$  est bien diagonalisable en base hilbertienne.

## 2.2 Quel espace fonctionnel ?

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On voudrait appliquer le théorème de diagonalisation à l'opérateur laplacien sur  $\Omega$ , défini "classiquement" par son action sur les fonctions  $\mathcal{C}_c^\infty$  (à support compact) à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$\Delta : f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}.$$

Munissons  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  du produit scalaire  $L^2$ ,  $\langle f|g \rangle := \int_{\Omega} fg$ . Alors, pour  $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  :

5. Rappelons qu'en dimension infinie,  $\lambda$  est dite valeur propre de  $u$  ssi  $\ker(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$ .

$$\langle \Delta f | g \rangle = \langle f | \Delta g \rangle$$

d'après une formule de Green ([Car], th. 2.1).  $\Delta$  est donc bien auto-adjoint. Mais, avant même de rechercher une propriété de compacité<sup>6</sup>, on s'aperçoit que  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , muni du produit scalaire  $L^2$ , n'est pas complet, donc n'est pas un espace de Hilbert.

### 2.3 Les espaces de Sobolev $H^1$ et $H_0^1$

Les paragraphes qui suivent (à l'exception de 2.4) sont constitués de rappels sur les espaces de Sobolev et la formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles (EDP). On prouve quelques résultats ; pour les autres, se reporter à [Car], [Bre] ou [Ada].

Pour rendre complet  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  muni du produit scalaire  $L^2$ , il faut largement l'étendre. C'est le sens de la définition suivante, où la dérivabilité est définie par une formule d'intégration par parties (sans terme de bord).

**Définition 7** – Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On pose

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists v_i \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} u \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} v_i \varphi\}.$$

Si  $u \in H^1(\Omega)$ , on note  $v_i = \partial_i u$  et  $(v_i)_{i=1, \dots, n} = \nabla u$ .

Si on emploie le langage des distributions, on dira que les fonctions de  $H^1(\Omega)$  sont les fonctions de carré intégrable dont la dérivée-distribution est encore une fonction de carré intégrable.

Le produit scalaire "naturel" sur  $H^1(\Omega)$  est  $\langle u | v \rangle_{H^1} := \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ . Il est en tout cas suffisamment naturel pour qu'on ait le résultat suivant :

**Proposition 9**

$H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H^1}$ .

Mentionnons immédiatement une propriété qui sera utile :

**Proposition 10**

Si  $(u_n) \in (H^1(\Omega))^{\mathbb{N}}$ ,  $u \in L^2(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$  sont tels que  $\|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0$  et  $\|\nabla u_n - v\|_{L^2} \rightarrow 0$ , alors  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\nabla u = v$ .

Avons-nous trouvé l'espace fonctionnel idoine pour diagonaliser le laplacien<sup>7</sup>? Presque : il faut éliminer le terme de bord dans la formule de Green. C'est ce qui motive la définition suivante.

**Définition 8** – On pose  $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^1(\Omega)}^{H^1}$ , complété de  $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$  pour la norme  $H^1$ .

Les fonctions de  $H_0^1$  sont en quelque sorte "nulles sur le bord" ; on parle, dans le cadre des EDP, de "condition de Dirichlet".

Dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , la définition n'a pas d'intérêt. On montre en effet que  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$  ; ainsi,  $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ . Dans le cas où  $\Omega$  est différent de  $\mathbb{R}^N$  (par la suite,  $\Omega$  sera souvent supposé borné),  $H_0^1(\Omega)$  a en revanche une existence propre.

Etant fermé dans  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert (séparable) pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H^1}$ . Si  $\Omega$  est borné, il y a mieux.

6. Il ne s'agit pas de montrer que le laplacien est compact (il ne l'est pas!).

7. En fait, l'espace dans lequel on diagonalisera le laplacien est  $L^2(\Omega)$  ; on a besoin que  $H_0^1(\Omega)$  soit un espace de Hilbert pour pouvoir appliquer Riesz-Fréchet au produit scalaire  $H_0^1$ .

### Proposition 11 (Inégalité de Poincaré)

Supposons  $\Omega$  borné. Alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

L'inégalité de Poincaré assure que  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H_0^1} : (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$  est un produit scalaire équivalent<sup>8</sup> à  $\langle u | v \rangle_{H^1}$ .

Signalons que, dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert "régulier"<sup>9</sup>, on peut donner un sens, pour  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ , à  $u|_{\partial\Omega}$ , "restriction" de  $u$  à la frontière de  $\Omega$ . Dans ce cas, les  $u \in H^1(\Omega)$  qui sont dans  $H_0^1(\Omega)$  sont exactement les fonctions qui vérifient  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Cette caractérisation sera plus ou moins inutile dans l'exposé : on considérera le plus souvent des ouverts non supposés réguliers.

## 2.4 Régularité des réarrangements

### Proposition 12

Si  $f$  est une fonction mesurable positive continue, telle que

$$\forall \lambda > 0, \mu(\{f \geq \lambda\}) < +\infty.$$

Alors  $f^*$  admet un représentant continu sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Si en plus  $f$  est bornée, alors  $f^*$  admet un représentant continu sur  $\mathbb{R}^N$ .

**Démonstration** – On pose pour  $\lambda > 0$

$$m(\lambda) := \mu(\{f \geq \lambda\}).$$

$m$  est décroissante continue à gauche. On définit l'inverse continu à gauche de  $m$  par :

$$\text{Inv}(m)(t) = \inf\{\lambda > 0 | m(\lambda) < t\}, \forall t > 0.$$

Alors  $\text{Inv}(m)$  est décroissante continue à gauche,  $\text{Inv}(m)$  est continue si et seulement si  $m$  est strictement décroissante sur  $\{m > 0\}$  et  $\text{Inv}(\text{Inv}(m)) = m$ .

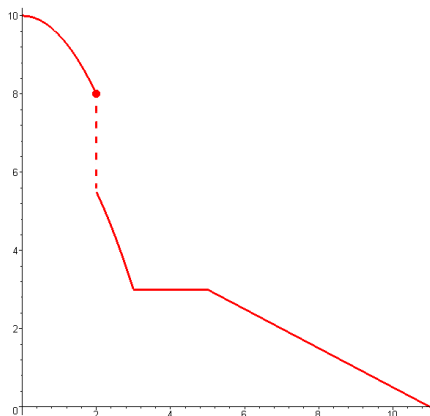


Figure 14 – Une répartition  $m(\lambda)$  possible...

8. au sens où il définit une norme équivalente.

9. par exemple, si sa frontière  $\partial\Omega$  est une variété  $C^1$ .

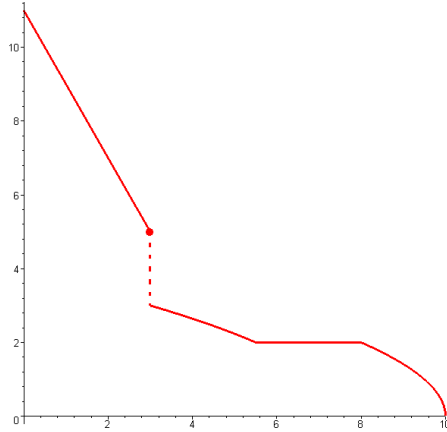


Figure 15 – ... et son inverse continu à gauche.

On pose pour  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  :

$$F(x) := \text{Inv}(m) (\mu(B(0, 1)) \|x\|^N).$$

Vérifions que  $F$  est un réarrangement de  $f$ .  $F$  est radiale, radialement décroissante, semi-continue supérieurement. Soit  $\lambda > 0$  ;

$$\mu(\{F \geq \lambda\}) = \mu(B(0, R))$$

où

$$R = \inf\{r > 0 \mid F(r) < \lambda\}.$$

D'où

$$\mu(B(0, R)) = \inf\{t > 0 \mid \text{Inv}(m)(t) < \lambda\} = \text{Inv}(\text{Inv}(m))(\lambda) = m(\lambda).$$

Ainsi,  $F$  est bien un réarrangement de  $f$ .

Montrons maintenant que si  $f$  est continue,  $m$  est strictement décroissante sur  $\{m > 0\}$ . Soient  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  avec  $m(\lambda_2) > 0$ . Comme  $\mu(\{f \geq \lambda_1\}) < \infty$ , il existe  $0 < \lambda < \lambda_1$  tel que  $\lambda \in f(\mathbb{R}^N)$ . Par connexité de  $f(\mathbb{R}^N)$ ,  $[\lambda_1, \lambda_2] \subseteq f(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$\{f \geq \lambda_2\} \subseteq \{f \geq \lambda_1\} \setminus \{f \in ]\lambda_1, \lambda_2[ \}$$

où  $\{f \in ]\lambda_1, \lambda_2[ \}$  est un ouvert non vide. D'où  $m(\lambda_2) < m(\lambda_1)$ .

Ainsi,  $m$  étant strictement décroissante sur  $\{m > 0\}$ ,  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Par ailleurs la limite de  $F$  en 0 est  $\|f\|_\infty$ . ■

On note pour  $t > 0$  le noyau de la chaleur sur  $\mathbb{R}^N$  :

$$G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4t}\right)$$

et pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire  $L^2$ ) :

$$J_t(u) := \frac{1}{t} (\|u\|_2^2 - \langle u | G_t * u \rangle).$$

**Proposition 13**

Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Alors  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow 0} J_t(u) < \infty$ . Plus précisément, lorsque  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  on a

$$\|\nabla u\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow 0} J_t(u).$$

**Démonstration** – Tout d’abord,  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  si et seulement si <sup>10</sup>

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi < \infty,$$

$\widehat{u}$  désignant la transformée de Fourier de  $u$ . D’après l’identité de Parseval, on a :

$$J_t(u) = \frac{1}{(2\pi)^N t} (\|\widehat{u}\|_2^2 - \langle \widehat{u} | \widehat{G_t * u} \rangle) = \frac{1}{(2\pi)^N t} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 - \exp(-t|\xi|^2)) d\xi.$$

Or

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (1 - \exp(-t|\xi|^2)) = |\xi|^2$$

la convergence se faisant en croissant. D’après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{t \rightarrow 0} J_t(u) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi.$$

Donc  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  si et seulement si la limite précédente est finie. Dans ce dernier cas, l’annexe A.4 indique que :

$$\|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi = \lim_{t \rightarrow 0} J_t(u).$$

■

**Proposition 14**

Soit  $u$  une fonction positive dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Alors  $u^*$  est dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$  et

$$\|u^*\|_2^2 = \|u\|_2^2, \quad \|\nabla u^*\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2.$$

**Démonstration** – L’égalité  $\|u^*\|_2^2 = \|u\|_2^2$  est montrée dans la section 1.2.

$G_t$  étant radiale radialement décroissante,  $G_t^* = G_t$ . D’après l’inégalité de Riesz :

$$\langle u | G_t * u \rangle \leq \langle u^* | G_t * u^* \rangle, \quad \forall t > 0.$$

D’après la proposition précédente,  $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$  et  $\|\nabla u^*\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$ .

■

---

10. d’après l’annexe A.4

### Proposition 15

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $u$  positive dans  $H_0^1(\Omega)$  (on prolonge  $u$  par 0 en dehors de  $\Omega$ ). Alors  $u^*$  est dans  $H_0^1(B^*(\Omega))$ , continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , nulle en dehors de  $B^*(\Omega)$ .

**Démonstration** – Déjà, comme  $u \in H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^N, u^*(x) = g(\|x\|)$ . Vérifions que  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(]0, +\infty[)$ . On note

$$\phi(x) := \varphi(\|x\|).$$

Soit  $R > 0$  tel que  $\varphi$  soit nulle sur  $[0, R]$ . On note  $\vec{e}_r$  le champ unitaire radial sur  $\mathbb{R}^N$ . Alors

$$x \mapsto u^*(x) \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R), \mathbb{R}^N)$$

et on a par Leibniz :

$$\operatorname{div} \left( u^*(x) \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} \right) = \nabla u^*(x) \cdot \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} + u^*(x) \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} \right) = \nabla u^*(x) \cdot \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}}$$

$$\text{car } \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} \right) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{]0, +\infty[} g(r) \varphi'(r) dr &= \frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} u^*(x) \nabla \phi(x) \cdot \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} dx \\ &= -\frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \operatorname{div} \left( u^*(x) \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} \right) dx = -\frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \nabla u^*(x) \cdot \frac{\vec{e}_r}{\|x\|^{N-1}} dx \end{aligned}$$

où  $\omega_{N-1}$  est la mesure surfacique totale de la sphère unité en dimension  $N$ . D'où

$$\left| \int_{]0, +\infty[} g(r) \varphi'(r) dr \right| \leq \frac{1}{(\omega_{N-1})^{\frac{1}{2}}} \|\nabla u^*\|_2 \left( \int_{]0, +\infty[} \frac{\varphi(r)^2}{r^{N-1}} dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La majoration montre que la dérivée-distribution  $g'$  est  $L^2$  sur  $]0, +\infty[$  pour la mesure  $r^{N-1} dr$ . En particulier  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $u^*$  est continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

Par ailleurs :  $\forall \lambda > 0, \mu(\{u^* \geq \lambda\}) \leq \mu(B^*(\Omega))$ . Donc  $u^*$  est nulle en dehors de  $B^*(\Omega)$ .

Ainsi  $u^*$  vérifie :

- $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ;
  - $u^*$  est continue sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  ;
  - $u^*$  est nulle en dehors de  $B^*(\Omega)$  ;
- Ceci implique que  $u^* \in H_0^1(B^*(\Omega))$ . ■



## 2.5 Dériver $|u|$

On voudrait maintenant montrer que, si  $u$  est dans  $H_0^1$ , alors  $|u|$  aussi, et que  $|u|$  a le gradient qu'on imagine. Il suffit, comme dans [Nad], TD 9, de montrer que  $u^+ := \sup\{u, 0\}$  est dans  $H_0^1$  et de déterminer son gradient (puisque  $|u| = u^+ + (-u)^+$ ). Procédons en deux temps.

### Proposition 16

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est telle que  $f(0) = 0$  et que  $f'$  soit bornée, si  $u \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $f \circ u \in H_0^1(\Omega)$  et  $\nabla(f \circ u) = (f' \circ u)\nabla u$ .

**Démonstration** – Remarquons déjà que, d'après les hypothèses,  $|f(x)| \leq M|x|$ , avec  $M = \|f'\|_\infty$ .

Soit  $(u_n) \in (\mathcal{C}_c^1(\Omega))^{\mathbb{N}}$  tendant vers  $u$  dans  $H^1$  (cf. la définition de  $H_0^1$ ), et (quitte à extraire) presque partout. Alors  $\forall n, f \circ u_n \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ , puisque  $f(0) = 0$ . De plus,

$$\|f \circ u_n - f \circ u\|_2 \leq M\|u_n - u\|_2 \rightarrow 0.$$

Enfin,

$$\|(f' \circ u_n)\nabla u_n - (f' \circ u)\nabla u\|_2 \leq \|((f' \circ u_n) - (f' \circ u))\nabla u\|_2 + \|(f' \circ u_n)(\nabla u_n - \nabla u)\|_2.$$

Comme  $((f' \circ u_n) - (f' \circ u))\nabla u$  tend p.p. vers 0 et est dominé par  $2M|\nabla u|$ , le premier terme tend vers 0 par convergence dominée. C'est aussi le cas du second, puisque  $f' \in L^\infty$  et  $\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 \rightarrow 0$ .

Ceci prouve que  $(f \circ u_n)$  tend vers  $f \circ u$  dans  $H^1$ , donc que  $f \circ u$  est dans  $H_0^1$ , et que  $f \circ u$  a la dérivée indiquée. ■

La valeur absolue n'est pas  $\mathcal{C}^1$ , mais presque ! Le résultat suivant montre qu'on aurait tort de se formaliser.

### Proposition 17

Soit  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Alors  $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ , et  $\nabla u^+ = 1|_{u>0}\nabla u$ . En conséquence,  $|u| \in H_0^1(\Omega)$  et  $\nabla|u| = (1|_{u>0} - 1|_{u<0})\nabla u$ .

**Démonstration** – Puisque  $x \mapsto \max(0, x)$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$ , on l'approxime. Soit donc  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ ,  $f(x) = x$  si  $x \geq 1$ , et  $\forall x, |f'(x)| \leq 1$ . On pose  $f_m(x) = \frac{1}{m}f(mx)$ . Alors  $f_m \circ u \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u^+$  dans  $L^2$  par convergence dominée ; le résultat précédent permet alors de voir que :

$$\|\nabla(f_m \circ u) - 1|_{u>0}\nabla u\|_2 = \|((f'_m \circ u) - 1|_{u>0})\nabla u\|_2,$$

expression qui tend aussi vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , par convergence dominée. Finalement :

$$(f_m \circ u) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1|_{u>0} \cdot u = u^+,$$

et  $\nabla u^+ = 1|_{u>0}\nabla u$ .

Montrons maintenant que  $u^+$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ . Introduisons pour cela  $(u_n) \in (\mathcal{C}_c^1(\Omega))^{\mathbb{N}}$ , suite tendant vers  $u$  dans  $H^1$ . La preuve de la proposition précédente montre qu'à  $m$  fixé,

$$\|f_m \circ u_n - f_m \circ u\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme  $f_m \circ u_m \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $n$ ,  $f_m \circ u$  est dans  $H_0^1$  (qui est fermé). Finalement,  $u^+$ , limite  $H^1$  de  $(f_m \circ u)_m$ , est dans  $H_0^1$ . ■

## 2.6 Dérivées d'ordre supérieur, injections de Sobolev

Les fonctions  $H_0^1(\Omega)$  sont en particulier  $L^2(\Omega)$  : on dispose donc d'une injection naturelle de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , qui est continue (et de norme 1)<sup>11</sup>. Lorsque  $\Omega$  est borné, on a un résultat plus puissant.

### Proposition 18

*Si  $\Omega$  est borné, alors l'injection  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte.*

Nous aurons besoin d'autres injections du même genre ("injections de Sobolev"), qui mettent en jeu les espaces  $H^m$ .

De même que  $H^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $L^2$  dont la dérivée-distribution est une fonction  $L^2$ , on définit, pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble  $H^m(\Omega)$  des fonctions  $L^2$  dont toutes les dérivées d'ordre  $\leq m$  sont  $L^2$ .

$H^m(\Omega)$  est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u|v \rangle_{H^m} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v.$$

On a besoin de définir une propriété de régularité pour les ouverts de  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition 9** –  $\Omega$ , ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , vérifie la "propriété du cône" s'il existe un cône fini  $C$  tel que pour tout point  $x$  de  $\Omega$ , il existe un cône isométrique à  $C$ , de pointe  $x$ , inclus dans  $\Omega$

On a alors les "injections" suivantes (d'après [Ada], 5.4) :

### Proposition 19

*Si  $\Omega$ , ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , a la propriété du cône, si  $m > N/2$ , alors, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , si  $u \in H^{j+m}(\Omega)$ ,  $u$  admet un représentant<sup>12</sup>  $\mathcal{C}^j$ .*

Bien sûr, tous les ouverts n'ont pas la propriété du cône (par exemple, la boule unité privée de 0). En revanche :

### Proposition 20

*Supposons  $\omega \subset\subset \Omega$  (ie  $\omega$  est un ouvert d'adhérence compacte dans  $\Omega$ ). Alors il existe un ouvert  $\omega'$  tel que  $\omega \subset \omega' \subset\subset \Omega$  qui ait la propriété du cône.*

**Démonstration** – Soit  $\delta := d(\omega', \partial\Omega) > 0$ . On pose :

$$\omega' := \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \omega) < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

En particulier, si  $u \in H^{j+m}(\Omega)$  avec  $m > N/2$ , si  $\omega \subset\subset \Omega$ , alors  $u|_{\omega}$  admet un représentant dans  $\mathcal{C}^j(\omega)$ . ■

11. si on munit  $H_0^1$  du produit scalaire  $H^1$  ; l'injection reste continue (mais change de norme) si on le munit de  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H_0^1}$ .

12. et même mieux : l'injection induite,  $H^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^j(\Omega)$ , est continue lorsqu'on munit de  $\mathcal{C}^j(\Omega)$  de la topologie définie par ses semi-normes habituelles.

## 2.7 Formulation variationnelle des EDP et régularité elliptique

Voyons maintenant comment reformuler une EDP pour en rechercher les solutions faiblement dérivables. Soit à tout hasard l'équation :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

d'inconnue  $u$  et de paramètre  $f$ . Une solution "classique" est une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , dont le laplacien est effectivement obtenu par dérivations partielles ; en particulier, il faut supposer  $f$  continue.

Supposons que  $u$  soit une solution classique, et donnons-nous  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  ; alors (Green) :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

Par continuité, l'identité reste valable pour toute fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  ; finalement :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

On peut chercher les solutions de cette dernière équation parmi les fonctions  $u \in H_1(\Omega)$ , ou plutôt  $u \in H_0^1(\Omega)$  (on veut des solutions "nulles sur le bord"). Dans ce cas, il n'est pas besoin de supposer  $f$  continue : on peut prendre  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ , voire dans  $H^{-1}(\Omega)$ , le dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$  ;  $\int f \varphi$  est alors remplacé par  $f(\varphi)$ .

Le théorème de Riesz-Fréchet, couplé à l'inégalité de Poincaré, donne alors l'existence et l'unicité d'une solution "faible"  $u \in H_0^1(\Omega)$  : c'est l'application qui représente la forme linéaire continue  $f$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ .

Il y a mieux : comme prouvé dans [Bre] (remarque 26, p. 188), si  $f \in H^m(\Omega)$ , alors  $u \in H^{m+2}(\omega)$  pour tout  $\omega \subset\subset \Omega$ <sup>13</sup>. C'est-à-dire que si  $f$  est régulière,  $u$  l'est aussi ; ceci est lié au caractère *elliptique* de l'équation considérée.

---

13. " $\omega \subset\subset \Omega$ " signifie " $\omega$  d'adhérence compacte dans  $\Omega$ ".

### 3 Minimisation des valeurs propres du laplacien à volume du domaine constant

On dispose maintenant de tous les outils pour minimiser la première valeur propre du laplacien. À l'aide des résultats de la partie précédente, on "diagonalise" le laplacien, puis on montre qu'on peut réarranger la fonction propre du laplacien associée à la première valeur propre. On débouche alors sur le théorème, dû à Faber & Krahn, de minimisation de cette première valeur propre. On en déduit un théorème de minimisation de la deuxième valeur propre.

#### 3.1 Retour au laplacien

On peut maintenant, en suivant [Bre], diagonaliser le laplacien-Dirichlet<sup>14</sup> dans le cas où  $\Omega$  est borné.

##### Théorème 4

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 1}$  de  $L^2(\Omega)$ , et une suite croissante  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de réels vérifiant  $\lambda_n > 0$  et  $\lambda_n \rightarrow \infty$  telles que

$$\forall n, e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

et

$$\forall n, -\Delta e_n = \lambda_n e_n.$$

**Démonstration** – Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on note  $u = Tf$  l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  du problème :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

On considère  $T$  comme un opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .  $T$  est alors auto-adjoint. En effet, si  $f, g \in L^2(\Omega)$ ,  $Tf$  et  $Tg$  sont dans  $H_0^1(\Omega)$ , donc :

$$\int_{\Omega} Tf \cdot g = \int_{\Omega} g \cdot Tf = \int_{\Omega} \nabla(Tg) \cdot \nabla(Tf) = \int_{\Omega} \nabla(Tf) \cdot \nabla(Tg) = \int_{\Omega} f \cdot Tg.$$

De plus,  $T$  est compact, puisque  $T(L^2) \subseteq H_0^1$  et que l'injection  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte,  $\Omega$  étant borné. Par ailleurs,  $\ker(T) = \{0\}$  d'après Riesz-Fréchet, et  $\forall f \in L^2, \langle Tf | f \rangle = \|Tf\|^2 \geq 0$ . Le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts donne donc une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 1}$  constituée de vecteurs propres de  $T$  associés à des valeurs propres  $\mu_n$ , avec  $\mu_n > 0$  et  $\mu_n \rightarrow 0$ .

En posant  $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ , on voit que  $e_n$  est une solution faible de  $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ .

D'après la propriété de régularité vue en 2.7, si  $\omega \subset\subset \Omega$ ,  $e_n$  est dans  $H^2(\omega)$ , puis dans  $H^4(\omega)$ , etc. ; ainsi,  $e_n$  est dans tous les  $H_m(\omega)$ , donc (cf. 2.6) dans  $C^\infty(\omega)$ . Finalement  $e_n \in C^\infty(\Omega)$ .

$e_n$  est à la fois régulière ( $C^\infty$ ) et solution faible de l'équation  $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$  ; c'est donc une solution classique. ■

L'opérateur  $T$  défini dans la preuve est en quelque sorte l'inverse de  $-\Delta$  ; c'est lui qui est compact. Le fait de considérer  $-\Delta$  (et non  $\Delta$ ) permet d'avoir des valeurs propres positives.

14. L'appendice "Dirichlet" accolé au laplacien signifie qu'on considère des fonctions  $H_0^1$ .

### 3.2 Positivité de $e_1$

Supposons d'abord  $\Omega$  connexe (et borné).  $\lambda_1$  est la première valeur propre du laplacien-Dirichlet, et  $E_{\lambda_1} \subseteq H_0^1 \cap C^\infty$  l'espace propre associé.

#### Proposition 21

$E_{\lambda_1}$  est de dimension 1. Si  $e_1$  engendre  $E_{\lambda_1}$ ,  $e_1$  est de signe constant sur  $\Omega$ .

**Démonstration** – La démonstration suit le schéma indiqué dans [Nad], TD 10. On montre d'abord que, si  $f \in E_{\lambda_1}$ , alors  $|f|$  aussi, on en déduit d'une part que  $E_{\lambda_1}$  est de dimension 1, et d'autre part que  $e_1$  garde un signe constant sur  $\Omega$ .

On sait que (cf. 2.5), si  $f \in H_0^1$ , alors  $|f| \in H_0^1$  et  $\nabla|f| = (1|_{f>0} - 1|_{f<0})\nabla f$ . Ainsi,  $f \in E_{\lambda_1} \Rightarrow |f| \in E_{\lambda_1}$ .

Soit donc  $f \in E_{\lambda_1}$ ,  $f$  étant  $C^\infty$ , on peut l'évaluer ponctuellement. Qui plus est,  $\Delta|f| = -\lambda_1|f| \leq 0$  :  $|f|$  est surharmonique. Elle vérifie donc<sup>15</sup> la propriété de la surmoyenne :

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall r < d(x_0, \partial\Omega), |f|(x_0) \geq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} |f|.$$

Si donc  $x_0 \in \Omega$  vérifie  $f(x_0) = 0$ ,  $|f|$  est nulle sur  $B(x_0, d(x_0, \partial\Omega))$ . Par connexité de  $\Omega$ , si  $f$  s'annule en un point,  $f$  est nulle sur  $\Omega$  tout entier.

Soit alors  $e$  et  $f$  deux fonctions non nulles de  $E_{\lambda_1}$ . Soit  $x$  tel que  $e(x) \neq 0$ . Alors  $f - \frac{f(x)}{e(x)} \cdot e$  est dans  $E_{\lambda_1}$

et s'annule en  $x$ . Donc  $f = \frac{f(x)}{e(x)}e$ , et  $\dim E_{\lambda_1} = 1$ .

Un raisonnement similaire montre que si  $e_1$  engendre  $E_{\lambda_1}$ ,  $e_1$  est de signe constant sur  $\Omega$  : sinon,  $e_1$ , qui est continue sur  $\Omega$  connexe, s'annulerait en un point, et donc serait nulle. ■

Bien sûr, la situation est changée si  $\Omega$  n'est pas connexe. Il est alors clair (en choisissant des fonctions propres nulles sur toutes les composantes connexes sauf une) que l'ensemble des valeurs propres de  $-\Delta$  sur  $\Omega$  est l'union des ensembles des valeurs propres sur les composantes connexes, et que la dimension des espaces propres pour une valeur propre donnée est la somme des dimensions des espaces propres pour cette valeur propre sur les composantes connexes<sup>16</sup>.

Mais, que  $\Omega$  soit connexe ou non, le résultat qui nous intéresse est acquis.

#### Proposition 22

Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , si  $\lambda_1$  est la première valeur propre de  $-\Delta$  sur  $\Omega$ , il existe une fonction propre  $e_1 \in E_{\lambda_1}$  qui soit positive.

Deux conséquences :

- on pourra réarranger  $e_1$  ;
- les seules fonctions propres de signe constant sont (certaines de) celles qui sont associées à  $\lambda_1$  : si  $k > 1$  et si  $u$  est fonction propre associée à  $\lambda_k$ ,  $u$  est orthogonale à toute fonction propre associée à  $\lambda_1$ , donc à  $e_1$  ; si  $u$  était de signe constant,  $\langle u|e_1 \rangle_{L^2}$  ne pourrait être nul.

15. d'après l'annexe A.3.

16. dimensions qui peuvent être nulles pour certaines composantes connexes (celles sur lesquelles  $-\Delta$  n'admet pas la valeur propre considérée).

### 3.3 Minimisation de la première valeur propre $\lambda_1$

**Théorème 5** (Inégalité de Faber-Krahn)

La boule est un ouvert qui, parmi les ouverts bornés de même volume, minimise la première valeur propre  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  (avec condition de Dirichlet).

**Démonstration** – Sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\lambda_1(\Omega)$  est donnée par

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left( \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \right)$$

le minimum étant réalisé par les fonctions propres associées à la valeur propre  $\lambda_1(\Omega)$ .

Fixons  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe  $e_1 \in H_0^1(\Omega)$  une fonction propre non nulle, **positive**, de valeur propre  $\lambda_1$ . D'après les propositions 14 et 15 de la section 2.4,  $e_1^* \in H_0^1(B^*(\Omega))$  avec  $\|e_1^*\|_2 = \|e_1\|_2$  et  $\|\nabla e_1^*\|_2 \leq \|\nabla e_1\|_2$ . Donc

$$\lambda_1(B^*(\Omega)) \leq \frac{\|\nabla e_1^*\|_2^2}{\|e_1^*\|_2^2} \leq \frac{\|\nabla e_1\|_2^2}{\|e_1\|_2^2} \leq \lambda_1(\Omega).$$

D'où le résultat. ■

### 3.4 Minimisation de la deuxième valeur propre $\lambda_2$

On va montrer que parmi les ouverts bornés de volume fixé, l'union de deux boules de même volume minimise  $\lambda_2$ . Contrairement à la convention adoptée plus haut,  $\lambda_2$  n'est pas nécessairement différente de  $\lambda_1$  :  $\lambda_2 = \lambda_1$  dès que  $\dim E_{\lambda_1} \leq 2$ .

On rappelle (ou on affirme) que si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\lambda_k(h\Omega) = \frac{1}{h^2} \lambda_k(\Omega), \forall h > 0.$$

**Proposition 23**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $u$  une fonction continue sur  $\Omega$ , dans  $H_0^1(\Omega)$ . On pose

$$\Omega^+ := \{u > 0\}.$$

Alors  $u^+ = \sup(u, 0)$  est dans  $H_0^1(\Omega^+)$ .

**Démonstration** – Il est clair que  $u^+ \in H^1(\Omega^+)$ . Soit  $\eta$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ , nulle sur  $]-\infty, 1]$  et valant 1 sur  $[2, +\infty[$ . On définit la suite de fonctions

$$\chi_p(t) = \eta(pt) \cdot \eta(-t + p + 4)$$

La définition importe peu : ce qui compte, c'est que la suite des fonctions  $(\chi_p)_{p \geq 1}$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\chi_p$  converge simplement en croissant vers 1 $_{]0, +\infty[}$
- $\forall p, t \mapsto t\chi_p(t)$  est bornée
- $t \mapsto t\chi_p(t)$  est à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}$ , uniformément en  $p$ .

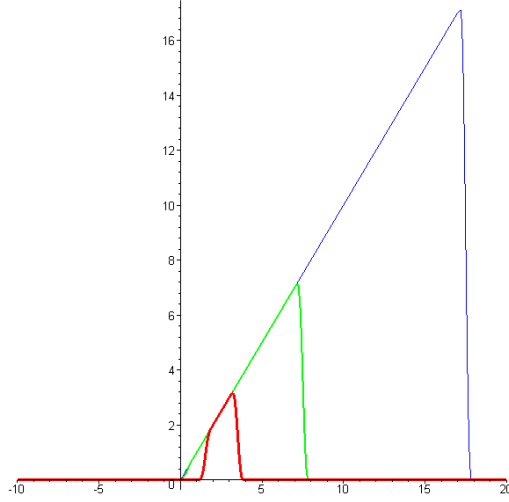


Figure 16 – Allure de quelques  $t \mapsto t\chi_p(t)$ .

Soit  $(v_n)$  une suite dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , telle que  $(v_n)$  converge vers  $u$  au sens  $H^1$  et presque partout. On pose pour  $p \geq 1$

$$v^{(p)} := \chi_p(u)^2 u$$

et

$$v_n^{(p)} := \chi_p(u)\chi_p(v_n)v_n.$$

Alors  $\forall (n, p), v_n^{(p)} \in H^1(\Omega)$  avec

$$\nabla v_n^{(p)} = \chi_p(u)\chi_p(v_n)\nabla v_n + \chi_p(u)\chi_p'(v_n)v_n\nabla v_n + \chi_p'(u)\chi_p(v_n)v_n\nabla u$$

et  $\forall p, v^{(p)} \in H^1(\Omega)$  avec

$$\nabla v^{(p)} = \chi_p(u)^2\nabla u + 2\chi_p(u)\chi_p'(u)u\nabla u.$$

De plus,  $\forall (n, p), v_n^{(p)} \in \mathcal{C}_c(\Omega^+)$ , donc<sup>17</sup>  $\forall (n, p), v_n^{(p)} \in H_0^1(\Omega^+)$ .

Vérifions qu'à  $p$  fixé,  $\|v^{(p)} - v_n^{(p)}\|_{H^1} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :

- $\chi_p(u)\chi_p(v_n)\nabla v_n$  converge vers  $\chi_p(u)^2\nabla u$  par convergence  $L^2$  de  $\nabla v_n$  vers  $\nabla u$  et convergence bornée de  $\chi_p(v_n)$  vers  $\chi_p(u)$
- $\chi_p(u)\chi_p'(v_n)v_n\nabla v_n$  converge vers  $\chi_p(u)\chi_p'(u)u\nabla u$  par convergence  $L^2$  de  $\nabla v_n$  vers  $\nabla u$  et par convergence bornée de  $\chi_p'(v_n)v_n$  vers  $\chi_p'(u)u$
- $\chi_p'(u)\chi_p(v_n)v_n\nabla u$  vers  $\chi_p(u)\chi_p'(u)u\nabla u$  par convergence bornée de  $\chi_p(v_n)v_n$  vers  $\chi_p(u)u$ .

D'où le résultat. Donc  $\forall p, v^{(p)} \in H_0^1(\Omega^+)$ . Or  $\|u^+ - v^{(p)}\|_{H^1} \rightarrow 0$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ .

Finalement,  $u^+ \in H_0^1(\Omega^+)$ . ■

### Théorème 6

Parmi les ouverts bornés de volume fixé, l'union disjointe de deux boules de même volume minimise  $\lambda_2$ .

17. en approchant  $v_n^{(p)}$  dans  $H^1$  par convolution.

**Démonstration** – Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $u_2$  une fonction propre non nulle de  $-\Delta$ , de valeur propre  $\lambda_2$ .  $u$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ . On pose

$$\Omega^+ := \{u > 0\}, \quad \Omega^- := \{u < 0\}.$$

Les deux ouverts sont non vides, car seules les fonctions propres associées à la première valeur propre peuvent être de signe constant (cf. 3.2). D'après la proposition précédente,  $u^+ = \sup(u, 0)$  est dans  $H_0^1(\Omega^+)$  et  $u^- = -\inf(u, 0)$  dans  $H_0^1(\Omega^-)$ . De plus,  $u^+$  est fonction propre de  $-\Delta$  sur  $\Omega^+$ , et comme elle est de signe constant sur  $\Omega^+$ , elle est forcément associée à la première valeur propre sur  $\Omega^+$ . De même pour  $u^-$ . Donc

$$\lambda_2(\Omega) = \lambda_1(\Omega^+) = \lambda_1(\Omega^-)$$

D'après l'inégalité de Faber-Krahn

$$\lambda_2(\Omega) \geq \max(\lambda_1(B^*(\Omega^+)), \lambda_1(B^*(\Omega^-)))$$

Soit  $B_{\frac{1}{2}}$  une boule telle que

$$\mu(B_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\mu(\Omega).$$

Nécessairement,  $\mu(B^*(\Omega^+)) \geq \mu(B_{\frac{1}{2}})$  ou  $\mu(B^*(\Omega^-)) \geq \mu(B_{\frac{1}{2}})$ . Dans les deux cas,

$$\max(\lambda_1(B^*(\Omega^+)), \lambda_1(B^*(\Omega^-))) \geq \lambda_1(B_{\frac{1}{2}}).$$

On note abusivement  $B_{\frac{1}{2}} \amalg B_{\frac{1}{2}}$  l'union de deux boules disjointes de même volume que  $B_{\frac{1}{2}}$ . Alors

$$\lambda_1(B_{\frac{1}{2}} \amalg B_{\frac{1}{2}}) = \lambda_2(B_{\frac{1}{2}} \amalg B_{\frac{1}{2}}) = \lambda_1(B_{\frac{1}{2}}).$$

Finalement

$$\lambda_2(\Omega) \geq \lambda_2(B_{\frac{1}{2}} \amalg B_{\frac{1}{2}}).$$

■

**Remarque** – L'astuce précédente, due à Pólya<sup>18</sup>, n'a plus cours lorsqu'il s'agit de trouver le minimiseur à volume fixé de  $\lambda_k$  avec  $k \geq 3$ . On touche là à des problèmes encore ouverts, même pour le minimiseur de  $\lambda_3$ . De plus, des calculs numériques de minimiseurs montrent qu'il ne s'agit pas toujours d'une union disjointe de boules. Pour plus de renseignements sur l'état de l'art, consulter notamment [Hen1], [Hen2] et [Oud].

18. à moins qu'il ne s'agisse de Szegő ou de Krahn...











No	Formes obtenues numériquement	
3		46.125
4		64.293
5		<b>78.47</b>
6		<b>88.96</b>
7		<b>107.47</b>
8		<b>119.9</b>
9		<b>133.52</b>
10		<b>143.45</b>

Figure 17 – estimations numériques des domaines minimisant  $\lambda_n$ ,  $n \in \{3, \dots, 10\}$  et valeurs de  $\lambda_n$  associées ; d'après [Oud].

## 4 Extensions, problèmes connexes

Dans cette section, on présente (très partiellement) un outil qui permet de traiter de problèmes généraux d'optimisation par rapport au domaine : la  $\gamma$ -convergence. Puis on signale d'autres questions intéressantes liées à la décomposition spectrale du laplacien.

### 4.1 $\gamma$ -convergence et optimisation

Jusqu'ici, on a obtenu des résultats d'existence d'ouverts minimisant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ; mieux : on a déterminé de tels ouverts (respectivement, une boule et l'union disjointe de deux boules). Se posent alors plusieurs questions : est-on assuré pour  $\lambda_n$  ( $n \geq 3$ ) qu'il existe un ouvert minimisant  $\lambda_n$  pour  $n \geq 3$  ? Et quid de l'unicité ?

Pour répondre à ces questions, il faut développer des outils généraux d'optimisation : dans [HenP], on expose les méthodes de  $\gamma$ -convergence et de dérivation par rapport au domaine. Tentons de donner quelque idée de la  $\gamma$ -convergence<sup>19</sup>.

Pour disposer d'un cadre fonctionnel, on supposera tous les ouverts considérés inclus dans un "grand" ouvert borné  $D \subseteq \mathbb{R}^N$ . Disons quelques mots sur l'opérateur  $T$  défini en 3.1. Comme il est attaché à l'ouvert  $\Omega$  considéré, on le notera ici  $T_\Omega$ . Par ailleurs,  $T_\Omega$  agit non seulement sur les éléments de  $L^2(\Omega)$ , mais aussi sur ceux de  $H^{-1}(\Omega)$ , dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$ . Enfin, puisque  $\Omega \subseteq D \Rightarrow H_0^1(\Omega) \subseteq H_0^1(D)$ ,  $T_\Omega$  agit sur  $H^{-1}(D)$ . Finalement, dès que  $\Omega \subseteq D$ , on considère  $T_\Omega$  comme un opérateur de  $H^{-1}(D)$  dans  $H_0^1(D)$ .

**Définition 10** – Soient  $(\Omega_n), \Omega$  des ouverts inclus dans  $D$ . On dit que la suite  $(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  si  $(T_{\Omega_n}(f))$  converge vers  $T_\Omega(f)$  dans  $H_0^1(D)$  pour tout  $f \in H^{-1}(D)$ .

On a un premier résultat, dû à Šverak ; 1 désigne (l'intégration contre) la fonction constante égale à 1 sur  $D$  :

#### Proposition 24

$(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  ssi  $(T_{\Omega_n}(1))$  converge vers  $T_\Omega(1)$  dans  $L^2(D)$ .

Pour la démonstration, voir [HenP], p. 158.

On dispose alors d'une deuxième condition nécessaire et suffisante de  $\gamma$ -convergence. Voyons à nouveau  $T$  comme un opérateur  $L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ . On note  $|||\cdot|||_2$  la norme d'opérateurs subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_2$ .

#### Proposition 25

$(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  ssi  $|||T_{\Omega_n} - T_\Omega|||_2 \rightarrow 0$ .

**Démonstration** – La proposition précédente donne l'implication  $\Leftarrow$ . Réciproquement, supposons que  $(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ . Montrons d'abord qu'à  $n$  fixé, on peut trouver  $f^n \in L^2$  telle que  $\|f^n\|_2 = 1$  et  $\|T_{\Omega_n}(f^n) - T_\Omega(f^n)\|_2 = |||T_{\Omega_n} - T_\Omega|||_2$ .

Si  $(f_k)$  est une suite maximisante (ie  $\forall k, \|f_k\|_2 = 1$  et  $\|T_{\Omega_n}(f_k) - T_\Omega(f_k)\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} |||T_{\Omega_n} - T_\Omega|||_2$ ), on peut en extraire (par réflexivité<sup>20</sup> de  $L^2$ ) une sous-suite convergeant faiblement vers  $f^n \in L^2(D)$  ; nécessairement (c'est un résultat de convergence faible dans les evn),  $\|f^n\|_2 \leq 1$ . Comme l'injection de  $L^2(D)$  dans  $H^{-1}(D)$  est compacte<sup>21</sup>, la convergence est forte dans  $H^{-1}(D)$ , et  $f^n$  vérifie l'égalité souhaitée.

19. On ne traitera pas de dérivation par rapport au domaine.

20. Un evn est réflexif ssi sa boule unité est faiblement compacte.

21. C'est l'adjoint de l'injection de  $H_0^1(D)$  dans  $L^2(D)$  ; voir [Car], th. 4.5.

On use du même procédé avec la suite  $(f^n)$  : il existe  $f \in L^2(D)$  vérifiant  $\|f\|_2 \leq 1$  tel que  $(f^n)$  tende faiblement vers  $f$  dans  $L^2(D)$  et fortement dans  $H^{-1}(D)$ . Soit alors  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on ait à la fois

$$\|f^n - f\|_{H^{-1}(D)} \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \|T_{\Omega_n}(f) - T_{\Omega}(f)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

la deuxième inégalité étant réalisable par définition de la  $\gamma$ -convergence. Alors, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \| \|T_{\Omega_n} - T_{\Omega}\| \|_2 &= \|T_{\Omega_n}(f^n) - T_{\Omega}(f^n)\|_2 \leq \|T_{\Omega_n}(f) - T_{\Omega}(f)\|_2 + \|T_{\Omega_n}(f^n - f) - T_{\Omega}(f^n - f)\|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \| \|T_{\Omega_n} - T_{\Omega}\| \|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H_0^1)} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

étant entendu  $\alpha$  est une constante liée à l'inégalité de Poincaré<sup>22</sup> et que  $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H_0^1)}$  est la norme d'opérateurs subordonnée à  $\| \cdot \|_{H^{-1}}$  et  $\| \cdot \|_{H_0^1}$ . D'après Riesz-Fréchet<sup>23</sup>

$$\| \|T_{\Omega}\| \|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H_0^1)} \leq 1.$$

■

On obtient alors le résultat qui nous intéresse :

### Proposition 26

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $\Omega \mapsto \lambda_k(\Omega)$ , où  $\lambda_k(\Omega)$  est la  $k$ -ième valeur propre du laplacien-Dirichlet sur  $\Omega$ , est continue pour la  $\gamma$ -convergence.

**Démonstration** – Simplifions un peu les notations :  $\lambda_k^n$  (resp.  $\lambda_k$ ) est la  $k$ -ième valeur propre (en comptant dans l'ordre décroissant et avec multiplicités) de  $T_{\Omega_n}$  (resp.  $T_{\Omega}$ ).

On suppose que  $(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ , donc que  $\| \|T_{\Omega_n} - T_{\Omega}\| \|_2 \rightarrow 0$ .

Un résultat de théorie spectrale, qu'on peut trouver dans [Pau], chap.6, spécifie que  $\lambda_1^n = \| \|T_{\Omega_n}\| \|_2$ . La convergence de  $(T_{\Omega_n})$  vers  $T_{\Omega}$  pour la norme d'opérateurs impose donc :

$$\lambda_1^n \rightarrow \lambda_1.$$

Soit, pour tout  $n$ , une fonction  $e_1^n \in L^2$  telle que  $T_{\Omega_n}(e_1^n) = \lambda_1^n e_1^n$  et  $\|e_1^n\|_2 = 1$ .

Par réflexivité de  $L^2$ , on dispose d'une extraction  $k \mapsto n_k$  et de  $e \in L^2$  vérifiant :  $e_1^{n_k} \rightharpoonup e$ . Mais alors :

$$\|T_{\Omega_{n_k}}(e_1^{n_k}) - T_{\Omega}(e)\|_2 \leq \| \|T_{\Omega_{n_k}} - T_{\Omega}\| \|_2 + \|T_{\Omega}(e_1^{n_k} - e)\|_2.$$

Le premier terme tend vers 0 par hypothèse ; comme  $T$  est compact, c'est aussi le cas du deuxième. Finalement :

$$\begin{aligned} T_{\Omega_{n_k}}(e_1^{n_k}) &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} T_{\Omega}(e) \\ \text{et : } T_{\Omega_{n_k}}(e_1^{n_k}) &= \lambda_1^{n_k} e_1^{n_k} \rightharpoonup \lambda_1 e. \end{aligned}$$

Par unicité de la limite faible,  $T_{\Omega}(e) = \lambda_1 e$ . Qui plus est,

22. On munit  $H_0^1$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1} : (u, v) \mapsto \int \nabla u \cdot \nabla v$ , pour pouvoir appliquer Riesz-Fréchet à  $T_{\Omega}$ .

23. Précisément, Riesz-Fréchet dit que  $T_{\Omega} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est de norme 1 ; considéré sur  $H^{-1}(D)$ , il est de norme  $\leq 1$ .

$$e_1^{n_k} = \frac{1}{\lambda_1^{n_k}} T_{\Omega_{n_k}}(e_1^{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_1} T_{\Omega}(e) = e.$$

C'est-à-dire que la convergence est forte. Notons  $p_{e_{n_k}}$  (resp.  $p_e$ ) le projecteur orthogonal sur  $e_{n_k}$  (resp.  $e$ ). Alors  $p_{e_{n_k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p_e$  en norme d'opérateurs. Posons maintenant  $T'_{\Omega_n} := T_{\Omega_n} - \lambda_1^n p_{e_n}$  (idem avec  $T_{\Omega}$ ). C'est un opérateur autoadjoint compact, dont la première valeur propre est  $\lambda_2^n$  (resp.  $\lambda_2$ ). De plus,

$$\|T'_{\Omega_{n_k}} - T'_{\Omega}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc  $\lambda_2^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda_2$ .

Finalement,  $\lambda_2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_2$ , puisque pour toute extraction  $n \mapsto \varphi(n)$ , on peut, de la même manière, trouver une sous-extraction  $k \mapsto \varphi(n_k)$  telle que  $\lambda_2^{\varphi(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda_2$  ■

Ceci suggère que la  $\gamma$ -convergence est un bon outil pour l'optimisation des valeurs propres du laplacien. Schématiquement, on obtient l'existence et l'unicité d'ouverts solutions d'un problème de minimisation en se ramenant à la minimisation de fonctionnelles  $J(\Omega)$  séquentiellement semi-continues inférieurement pour la  $\gamma$ -convergence, et monotones.

On peut alors montrer que la boule (resp. l'union de deux boules disjointes) est l'unique ouvert (à translation près) de volume prescrit minimisant  $\lambda_1$  (resp. minimisant  $\lambda_2$ <sup>24</sup>). En fait, on considère la classe plus générale des quasi-ouverts, ie des ouverts "à ensembles de capacité nulle près". On a alors un résultat d'unicité "quasi-partout". Mais deux ouverts égaux quasi-partout sont égaux<sup>25</sup>, d'où une unicité forte de l'ouvert minimisant.

Encore un mot : si on se base sur la définition, il semble difficile de montrer qu'une suite  $(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ . En pratique, on dispose de conditions suffisantes. Par exemple ([HenP], p.112) :

### Proposition 27

*En dimension 2, si  $(\Omega_n)$  converge vers  $\Omega$  au sens de Hausdorff, et si le nombre de composantes connexes de  $D \setminus \Omega_n$  est uniformément borné, alors  $(\Omega_n)$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ .*

La convergence au sens de Hausdorff des ouverts étant définie par :  $(\Omega_n)$  converge vers  $\Omega$  au sens de Hausdorff ssi  $d_H(D \setminus \Omega_n, D \setminus \Omega) \rightarrow 0$ , où  $d_H$  est la distance de Hausdorff (sur les compacts) dérivée de la distance euclidienne (par exemple) sur  $\mathbb{R}^2$  : voir [Pau], prop. 1.2.

## 4.2 Minimisation sur des ouverts connexes/convexes

On a vu en 3.4 que  $\lambda_2$ , deuxième valeur propre du laplacien, était minimale, à volume du domaine donné, sur la réunion de deux boules disjointes de même rayon. Qu'en est-il si l'on se restreint à considérer des domaines connexes ? On se place en dimension 2.

### Proposition 28

*Il n'existe pas d'ouvert connexe borné minimisant  $\lambda_2$  parmi les ouverts connexes de  $\mathbb{R}^2$  d'aire fixée.*

**Démonstration** – Comme la réunion de deux boules disjointes de rayon idoine est l'unique forme d'ouverts minimisant  $\lambda_2$  parmi tous les ouverts d'aire prescrite, il suffit de montrer que :

24. Plus précisément : si  $\Omega$  minimise  $\lambda_2$ ,  $\Omega$  a exactement deux composantes connexes, et ces composantes connexes sont des boules de même volume.

25. Dans cet exposé, on ne définira ni "capacité", ni "quasi-partout".

$$\inf_{\Omega \text{ connexe}, |\Omega| = V} \lambda_2(\Omega) = \inf_{|\Omega|=V} \lambda_2(\Omega).$$

C'est bien le cas : on considère deux boules disjointes de volume  $(V - 1/n)/2$  reliées par un "pont" de largeur  $1/n$  et de longueur <sup>26</sup> 1.

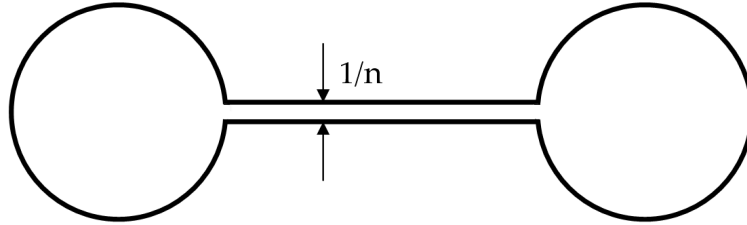


Figure 18.

Alors, d'après le critère vu à la fin du paragraphe précédent, la suite d'ouverts (connexes) ainsi construite  $\gamma$ -converge vers la réunion disjointe de deux boules de volume  $V/2$ , qui minimise  $\lambda_2$  parmi tous les ouverts bornés. ■

La situation redevient compliquée si on cherche à minimiser  $\lambda_2$  sur les ouverts convexes. On a pu conjecturer que le minimum était réalisé par le "stade", enveloppe convexe de deux boules de même rayon accolées. En fait, il est démontré dans [HenO] que ce n'est pas le cas<sup>27</sup>. Néanmoins (d'après [HenO]), un ouvert convexe optimal, s'il est assez régulier, possède exactement deux segments parallèles sur sa frontière, et ceux-ci sont parallèles.

### 4.3 Asymptotique des valeurs propres et problème "Can one hear the shape of a drum ?"

On s'intéresse d'abord aux valeurs propres et aux fonctions propres du laplacien-Dirichlet sur un pavé de  $\mathbb{R}^N$  :  $\Omega = [0, a_1] \times \dots \times [0, a_N]$ .

#### Proposition 29

Les fonctions propres du laplacien-Dirichlet sur  $\Omega$  sont exactement les

$$u_{p_1, \dots, p_N}(x_1, \dots, x_N) = \sin\left(\frac{p_1 \pi x_1}{a_1}\right) \dots \sin\left(\frac{p_N \pi x_N}{a_N}\right)$$

pour  $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{N}^*$ .  $u_{p_1, \dots, p_N}$  est associée à la valeur propre  $\lambda_{p_1, \dots, p_N} := -\pi^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i}{a_i}\right)^2$ .

**Démonstration** – Il est clair que  $u_{p_1, \dots, p_N}$  est fonction propre du laplacien pour la valeur propre indiquée. Qui plus est, la famille  $\mathcal{A} := \{u_{p_1, \dots, p_N} \mid p_1, \dots, p_N \in \mathbb{N}^*\}$  est orthogonale pour le produit scalaire usuel de  $L^2(\Omega)$  : si  $(p_1, \dots, p_N) \neq (p'_1, \dots, p'_N)$ , on dispose de  $i$  tel que  $p_i \neq p'_i$ . En intégrant d'abord par rapport à la  $i$ -ème composante, on voit que :

26. à peu près.

27. par des arguments de dérivation par rapport au domaine et d'analyticité des fonctions propres

$$\int_{\Omega} u_{p_1, \dots, p_N} \cdot u_{p'_1, \dots, p'_N} = \int \dots \left( \int_0^{a_i} \sin \left( \frac{p_i \pi x_i}{a_i} \right) \cdot \sin \left( \frac{p'_i \pi x_i}{a_i} \right) dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N = 0.$$

Pour montrer que (à la normalisation près)  $\mathcal{A}$  est bien une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ , il reste à voir que si  $f \in \mathcal{A}^\perp$ ,  $f = 0$ . Ceci se déduit du résultat en dimension 1 ; supposons en effet que

$$\forall p_1, \dots, p_N, \int_0^{a_1} dx_1 \sin \left( \frac{p_1 \pi x_1}{a_1} \right) \int_0^{a_2} dx_2 \dots \int_0^{a_N} dx_N \sin \left( \frac{p_N \pi x_N}{a_N} \right) f(x) = 0.$$

Si, à  $p_2, \dots, p_N$  fixés, on pose  $f_{p_2, \dots, p_N}(x_1) := \int_0^{a_2} dx_2 \sin \left( \frac{p_2 \pi x_2}{a_2} \right) \dots \int_0^{a_N} dx_N \sin \left( \frac{p_N \pi x_N}{a_N} \right) f(x)$ , on a donc :

$$\forall p_1 \in \mathbb{N}^*, \int_0^{a_1} dx_1 \sin \left( \frac{p_1 \pi x_1}{a_1} \right) f_{p_2, \dots, p_N}(x_1) = 0$$

ce qui implique que  $f_{p_2, \dots, p_N} = 0$ <sup>28</sup>. De proche en proche, on obtient que  $f = 0$ . ■

Au passage, on remarque que la méthode se généralise à des produits (finis) d'ouverts.

### Proposition 30

Soit  $m \leq N$  et  $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}^*$  tels que  $d_1 + \dots + d_m = N$ . Soit  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^{d_1}$  (resp.  $\mathbb{R}^{d_2}$ , etc.). On note  $\{f_p^1 | p \in \mathbb{N}^*\}$  les fonctions propres du laplacien sur  $\Omega_1$ , associées respectivement aux valeurs propres  $\{\lambda_p^1 | p \in \mathbb{N}^*\}$  (idem pour  $\Omega_2$ , etc.). On pose :

$$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m \subset \mathbb{R}^N.$$

Alors les fonctions propres du laplacien sur  $\Omega$  sont exactement les

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto f_{p_1}^1(x_1, \dots, x_{d_1}) \cdot f_{p_2}^2(x_{d_1+1}, \dots, x_{d_1+d_2}) \dots f_{p_m}^m(x_{d_1+\dots+d_{m-1}+1}, \dots, x_N)$$

pour  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N}^*$ . La valeur propre correspondant à  $p_1, \dots, p_m$  est  $\sum_{i=1}^m \lambda_{p_i}^i$ .

Revenons au cas du pavé. On voudrait un équivalent, lorsque  $x \rightarrow \infty$ , du nombre  $\mathcal{N}(x)$  de valeurs propres du laplacien de valeur absolue inférieure à  $x$ . La formule :

$$\lambda_{p_1, \dots, p_N} = -\pi^2 \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i}{a_i} \right)^2$$

montre qu'il s'agit du nombre de points entiers de coordonnées strictement positives appartenant à l'ellipsoïde (plein) centré en 0, de demi-axes les  $\frac{a_i \sqrt{x}}{\pi}$ . Le volume de ce  $2^{-N}$ -ème d'ellipsoïde étant proportionnel à  $\frac{a_1 \dots a_N \cdot x^{N/2}}{(2\pi)^N}$ , on a, en remarquant qu'un point entier occupe le volume du cube de côté 1 qui s'appuie sur lui<sup>29</sup> :

28. Par exemple, en prolongeant  $f_{p_2, \dots, p_N}$  par imparité à  $-[a_1, a_1]$  et en remarquant que tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

29. et moyennant un petit travail sur ce qui se passe au bord de l'ellipsoïde ; voir (pour  $N = 2$ ) [CH], VI.4.1.

$$\mathcal{N}(x) \sim \text{constante} \times \frac{a_1 \dots a_N \cdot x^{N/2}}{(2\pi)^N}.$$

Ce dernier résultat est en fait vrai dans un cadre beaucoup plus général. H. Weyl a prouvé en 1911 le résultat suivant :

**Théorème 7 (Weyl)**

Si  $\Omega$  est un ouvert connexe borné suffisamment régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\mathcal{N}(x) \sim C(N) \times |\Omega| \times x^{N/2}$$

où  $C(N)$  est une "constante universelle", ie ne dépend pas de  $\Omega$ .

Pour le cas  $N = 2$ , on peut se référer à [CH], 6.4.4.

On s'aperçoit en particulier que la connaissance du spectre du laplacien-Dirichlet sur  $\Omega$  (supposé connexe et régulier) détermine la mesure de  $\Omega$ . Plus généralement, quelles informations sur  $\Omega$  donne le spectre du laplacien ? Deux ouverts dont le spectre est le même sont-ils isométriques ?

Le dernier problème est appelé "Can one hear the shape of a drum ?" (cf. [Kac]), "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?". En effet, si  $\Omega$  est vu (dans le cas de la dimension 2) comme la membrane d'un tambour, les valeurs propres  $\lambda_n$  de  $-\Delta$  (avec condition de Dirichlet) sont les harmoniques du son émis. Pour s'en convaincre, on peut résoudre (partiellement) l'équation du tambour :

$$\Delta_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\Delta_x$  désignant le laplacien pris sur la variable d'espace ( $x \in \Omega$ ),  $t \in \mathbb{R}$  étant le temps,  $u(x, t)$  le déplacement vertical de la membrane (par rapport à sa position d'équilibre) au point  $(x, t)$ . On impose  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  à toute date : la membrane est fixée à son support.

A  $t$  fixé, on peut décomposer  $x \mapsto u(x, t)$  sur la base hilbertienne  $\{e_n\}$  des fonctions propres de  $-\Delta$  :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(t) e_n(x)$$

avec  $c_n(t) = \langle u(\cdot, t) | e_n \rangle = \int_{\Omega} u(x, t) e_n(x) dx$ . Mais alors, en supposant par exemple  $u \in \mathcal{C}^2$  par rapport à  $t$

et  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  bornée<sup>30</sup> :

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) e_n(x) dx = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) | e_n \right\rangle = \langle \Delta_x u(\cdot, t) | e_n \rangle.$$

Mais (formule de Green sans terme de bord) :

$$\langle \Delta_x u(\cdot, t) | e_n \rangle = \langle u(\cdot, t) | \Delta u_n \rangle = -\lambda_n \langle u(\cdot, t) | u_n \rangle.$$

D'où finalement :

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} = -\lambda_n c_n.$$

30. on peut alors dériver deux fois sous l'intégrale.

Comme les  $\lambda_n$  sont  $> 0$ , en imposant (par exemple) une vitesse de la membrane nulle à  $t = 0$ , on obtient que :

$$\forall n, \forall t, c_n(t) = c_n(0) \cos(\sqrt{\lambda_n}t).$$

Finalement :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(0) \cos(\sqrt{\lambda_n}t) e_n(x).$$

Bref, "on entend le spectre d'un tambour".

Il se trouve en fait que la réponse à la question "Can one hear the shape of a drum ?" est négative : on peut construire des paires d'ouverts bornés, connexes et réguliers, dont le laplacien-Dirichlet aient le même spectre, et qui pourtant ne soient pas isométriques. Voyez [Bér].

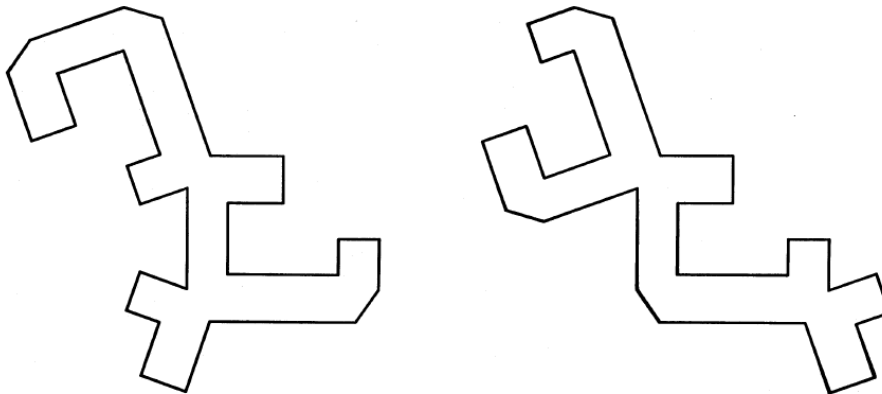


Figure 19 – Ces deux ouverts ont même spectre sans être isométriques ; d'après [Bér].



# A Annexe

Dans cette partie sont démontrés quelques résultats utilisés dans le corps de l'exposé, et qui sont intéressants pour eux-mêmes.

## A.1 Inégalité de Young

On énonce et on démontre ici, en suivant [Cur] (TD 8), l'inégalité de Young, qui permet d'assurer la finitude des intégrales rencontrées dans l'inégalité de F. Riesz.

**Proposition 31** (Inégalité de Young)

Soient  $p, q$  et  $r$  des réels  $\geq 1$  tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors, si  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , la convolée  $f * g$  est définie presque partout et est dans  $L^r$  ; et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

**Démonstration** – On s'appuie sur l'inégalité de Hölder généralisée (qui provient directement de la concavité du logarithme) : si  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, 1[$  avec  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , alors, pour toutes fonctions positives  $f_1, f_2, f_3$ ,

$$\int f_1 f_2 f_3 \leq \left( \int f_1^{1/\alpha} \right)^\alpha \left( \int f_2^{1/\beta} \right)^\beta \left( \int f_3^{1/\gamma} \right)^\gamma.$$

On écrit en effet :

$$\begin{aligned} \int |f(x-y)g(y)| dy &= \int (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} dy \\ &\leq \left( \int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left( \int |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\ &\leq \left( \int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{1 - \frac{p}{r}} \|g\|_q^{1 - \frac{q}{r}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|f * g\|_r^r = \int \left| \int |f(x-y)g(y)| dy \right|^r dx \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \iint |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx dy.$$

Mais

$$\iint |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q.$$

En reportant, on obtient l'inégalité attendue. ■

## A.2 Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

On énonce et on prouve ici, d'après [Cur] (TD 7), le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans le cas de la dimension 1. En dimension supérieure, l'énoncé et la démonstration sont quasiment identiques – voir par exemple [Car], th. 5.20.

**Proposition 32** (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions dans  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , bornée et telle que les convergences suivantes soient uniformes en  $f \in \mathcal{F}$  :

$$(1) \int_{-\infty}^{-A} |f|^p d\mu + \int_A^{+\infty} |f|^p d\mu \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0;$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Alors  $\mathcal{F}$  est relativement compacte dans  $L^p$ .

**Démonstration** –  $L^p$  étant complet, il s'agit de montrer que  $\mathcal{F}$  est précompacte.

On remarque au passage que si  $\mathcal{F}$  est précompacte, elle vérifie bien (1) et (2) uniformément en  $f$  : pour  $\varepsilon > 0$ , on se donne un recouvrement de  $\mathcal{F}$  par des boules  $B(f_1, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, B(f_r, \frac{\varepsilon}{2})$ . On peut alors, pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , trouver  $A_i$  et  $y_i > 0$  tels que :

$$\forall A \geq A_i, \int_{-\infty}^{-A_i} |f_i|^p d\mu + \int_{A_i}^{+\infty} |f_i|^p d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

( $f_i$  est dans  $L^p$  !) et aussi :

$$|y| \leq y_i \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f_i(x+y) - f_i(x)|^p d\mu(x) \leq \varepsilon^p$$

(ce qui se montre par exemple à l'aide d'approximation  $L^p$  par des fonctions continues à support compact).

Les  $f_i$  sont en nombre fini, on pose  $\tilde{A} = \max\{A_i\}$  et  $\tilde{y} = \min\{y_i\}$ , et on a, puisque les  $B(f_i, \frac{\varepsilon}{2})$  recouvrent  $\mathcal{F}$  et par inégalité triangulaire, que pour toute fonction  $f$  dans  $\mathcal{F}$  :

$$\forall A \geq \tilde{A}, \int_{-\infty}^{-\tilde{A}} |f|^p d\mu + \int_{\tilde{A}}^{+\infty} |f|^p d\mu \leq \varepsilon$$

$$\text{et : } |y| \leq \tilde{y} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|^p d\mu(x) \leq (2\varepsilon)^p.$$

Il est temps de revenir à la démonstration qui nous intéresse ! On veut donc montrer que  $\mathcal{F}$  est précompacte sous les hypothèses de la proposition. L'idée est de se ramener par convolution à des familles de fonctions continues pour pouvoir appliquer Arzelà-Ascoli.

Soit donc  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  une approximation  $C^\infty$  de l'unité avec  $\rho_n$  de support dans  $[-1/n, 1/n]$ . On pose, pour  $n \geq 1$  et  $A > 0$  :

$$\mathcal{F}_n(A) = \{f * \rho_n|_{[-A, A]}\}_{f \in \mathcal{F}}.$$

$\mathcal{F}_n(A)$  est une famille bornée (Hölder) de fonctions continues. Montrons qu'elle est équicontinue : si  $f \in \mathcal{F}$  et  $x, x' \in [-A, A]$ ,

$$f * \rho_n(x') - f * \rho_n(x) = \int_{-1/n}^{1/n} (f(x' - y) - f(x - y)) \rho_n(y) dy.$$

Et donc (Hölder) :

$$|f * \rho_n(x') - f * \rho_n(x)| \leq C_n \cdot \left( \int_{-1/n}^{1/n} |f(x' - y) - f(x - y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

L'uniformité de la convergence (2) donne alors l'équicontinuité de  $\mathcal{F}_n(A)$ .

$\mathcal{F}_n(A)$  est donc (Ascoli) relativement compacte dans  $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$ . L'injection de  $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$  dans  $L^p([-A, A])$  étant continue ( $\mu([-A, A]) < \infty$ ),  $\mathcal{F}_n(A)$  est relativement compacte dans  $L^p([-A, A])$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f * \rho_n|_{[-A, A]} - f|_{[-A, A]}\|_p^p &\leq \int_{-A}^A \left| \int_{-1/n}^{1/n} (f(x - y) - f(x)) \rho_n(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{-A}^A \int_{-1/n}^{1/n} |f(x - y) - f(x)|^p \rho_n(y) dy dx \end{aligned}$$

(Jensen -  $\rho_n(y) dy$  est une mesure de masse totale 1). Finalement :

$$\|f * \rho_n|_{[-A, A]} - f|_{[-A, A]}\|_p^p \leq \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y) dy \underbrace{\left( \int_{-A}^A |f(x - y) - f(x)|^p dx \right)}_{\leq \varepsilon \text{ unif. en } f \text{ pour } n \text{ assez grand}}.$$

Si donc  $n$  est assez grand, on a pour toute  $f$  dans  $\mathcal{F}$  :

$$\|f * \rho_n|_{[-A, A]} - f|_{[-A, A]}\|_p \leq (\varepsilon \cdot \int \rho_n)^{1/p} = \varepsilon^{1/p}.$$

Ceci montre que  $\mathcal{F}|_{[-A, A]}$ , c'est-à-dire la famille des fonctions de  $\mathcal{F}$  restreintes à  $[-A, A]$ , est précompacte : si  $\varepsilon > 0$ , on prend un  $n$  tel que l'inégalité précédente soit réalisée ;  $\mathcal{F}_n(A)$ , précompacte, est alors recouverte par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ . Les boules de mêmes centres, mais de rayon  $\varepsilon + \varepsilon^{1/p}$ , recouvrent  $\mathcal{F}|_{[-A, A]}$ .

Finalement, la précompacité de  $\mathcal{F}$  est une conséquence de l'uniformité de la convergence (1). Si en effet  $\varepsilon > 0$ , on se donne  $A$  tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \int_{\mathbb{R}-[-A, A]} |f|^p \leq \varepsilon/2.$$

On considère  $g_1, \dots, g_r$  dans  $\mathcal{F}|_{[-A, A]}$  telles que  $B(g_1, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, B(g_r, \frac{\varepsilon}{2})$  recouvrent  $\mathcal{F}|_{[-A, A]}$ . On prolonge les  $g_i$  en  $\tilde{g}_i$  par 0 en dehors de  $[-A, A]$ , et  $B(\tilde{g}_1, \varepsilon), \dots, B(\tilde{g}_r, \varepsilon)$  recouvrent alors  $\mathcal{F}$ . ■

### A.3 Surharmonicit  et propriété de la surmoyenne

On montre ici, en plagiant [Nad] (TD 10), qu'une fonction surharmonique régulière vérifie la propriété de la surmoyenne. Autrement dit :

#### Proposition 33

Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $\Delta f \leq 0$  sur  $\Omega$ , alors :

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall r < d(x_0, \partial\Omega), f(x_0) \geq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f.$$

**Démonstration** – Si  $x$  est un vecteur générique de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\nabla|x - x_0|^2 = 2(x - x_0)$  et  $\Delta|x - x_0|^2 = 2N$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} f &= \frac{1}{2N} \int_{B(x_0, r)} f \cdot \Delta(|x - x_0|^2 - r^2) dx \\ &= \frac{1}{2N} \int_{B(x_0, r)} \Delta f \cdot (|x - x_0|^2 - r^2) dx + \frac{1}{N} \int_{\partial B(x_0, r)} f \cdot |x - x_0| d\sigma(x) - \frac{1}{N} \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot (|x|^2 - r^2) d\sigma \end{aligned}$$

en vertu d'une formule de Green (voyez [Car], th. 2.1),  $\sigma$  désignant la mesure surfacique sur  $\partial B(x_0, r)$ . Puisqu'on intègre sur le bord,  $|x - x_0|$  vaut  $r$  dans le deuxième terme, et le troisième terme est nul. Finalement, l'hypothèse  $\Delta f \leq 0$  donne :

$$\int_{B(x_0, r)} f - \frac{r}{N} \int_{\partial B(x_0, r)} f d\sigma \geq 0.$$

Notons  $F(r) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f$ . Comme  $|B(x_0, r)| = r^N |B(x_0, 1)|$ , et puisque la dérivée de l'intégrale volumique est l'intégrale de surface ([Car], lemme 2.5), on a :

$$F'(r) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} f d\sigma - \frac{N}{r|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f \leq 0.$$

$F$ , prolongée en 0 par  $f(x_0)$ , est  $C^1$  et de dérivée négative. Donc, pour  $r \geq 0$ ,  $F(r) \leq 0$ ; c'est ce qu'on voulait montrer. ■

### A.4 Transformée de Fourier : rappels, caractérisation de $H^1(\mathbb{R}^N)$

Dans cette section, on considère des espaces de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . En particulier,  $L^2(\mathbb{R}^N)$  est muni de son produit scalaire canonique hermitien. Les preuves manquantes sont dans [Car], 2.4.

On commence par la transformée de Fourier des fonctions  $L^1$ . On notera  $\mathcal{F}$  l'opérateur transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

**Proposition 34** (Transformée de Fourier inverse)

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$  telle que  $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u))(x) = (2\pi)^N u(-x).$$

**Proposition 35** (Identité de Parseval)

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$  et  $v \in C_c(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \bar{v} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u) \overline{\mathcal{F}(v)}.$$

L'identité précédente montre en particulier que pour  $v \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ,

$$\|\mathcal{F}(v)\|_2^2 = (2\pi)^N \|v\|_2^2$$

Ceci permet de prolonger par densité la transformée de Fourier à  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . La formule d'inversion de Fourier et l'identité de Parseval sont alors sans restriction de régularité-intégrabilité universellement vraies dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .  $\mathcal{F}$  réalise alors un automorphisme de Banach de  $L^2$ .

Si  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ , on a

$$\mathcal{F}(\nabla v)(\xi) = i\xi \mathcal{F}(v).$$

Par densité, cette propriété est encore vraie pour  $v$  dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Proposition 36**

Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Alors  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ssi  $\xi \mapsto \xi \mathcal{F}(u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Dans ce cas,

$$\nabla u = \mathcal{F}^{-1}(i\xi \mathcal{F}(u))$$

**Démonstration** – Nous venons juste de voir un sens, montrons donc le second. On suppose que  $\xi \mapsto \xi \mathcal{F}(u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . On pose

$$w = \mathcal{F}^{-1}(i\xi \mathcal{F}(u)(\xi))$$

Soit  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$\langle u | \nabla v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle \mathcal{F}(u) | i\xi \mathcal{F}(v) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle -i\xi \mathcal{F}(u) | \mathcal{F}(v) \rangle = -\langle w | v \rangle.$$

D'où  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  et  $\nabla u = w$ . ■

## B Bibliographie

- [Ada] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1975.
- [Bér] P. Bérard, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/D/tambours.pdf>.
- [BLL] H.J. Brascamp, E.H. Lieb, J.M. Luttinger, *A General Rearrangement Inequality for Multiple Integrals*, Journal of functional Analysis 17, pp. 227 – 237, Academic Press, 1974.
- [Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [Car] G. Carlier, *Analyse fonctionnelle*, Fimfa, <http://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/poly.pdf>.
- [CH] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik, I*, Springer, Berlin, 1968.
- [Cur] N. Curien, TD d'intégration & probabilités, Fimfa, [www.dma.ens.fr/~curien](http://www.dma.ens.fr/~curien).
- [DL] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique, T. 3 : Transformations, Sobolev, opérateurs*, Masson - CEA, 1987.
- [Nad] G. Nadin, TD d'analyse fonctionnelle & EDP, Fimfa, <http://www.fimfa.ens.fr/spip.php?rubrique14>.
- [Hen1] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.
- [Hen2] A. Henrot, *Minimization problems for eigenvalues of the Laplacian*, Journal of Evolution Equations 3, pp.443-461, 2003, <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/11/55/48/PDF/jeelong.pdf>.
- [HenO] A. Henrot, E. Oudet, *Le stade ne minimise pas  $\lambda_2$  parmi les ouverts convexes du plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, pp. 417 – 422, 2001, <http://www.lama.univ-savoie.fr/~oudet/index.php?page=publis>.
- [HenP] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes, Une analyse géométrique*, Mathématiques et applications, Springer, Berlin & Heidelberg, 2005.
- [HLP] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.
- [Kac] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum ?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2, pp. 1-23, Mathematical Association of America, 1966, <http://www.jstor.org/stable/2313748>.
- [Kav] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, Berlin & Heidelberg, 1993.
- [Oud] E. Oudet, *Quelques résultats en optimisation de forme et stabilisation*, Thèse de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, 2002, <http://www.lama.univ-savoie.fr/~oudet/index.php?page=publis>.
- [Pau] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Fimfa, <http://www.fimfa.ens.fr/spip.php?rubrique12>.

\* \* \*