K-théorie des C*-algèbres

Louis Verrier
sous la direction d'Emmanuel Germain

juin 2006

Table des matières

1 Introduction

La K-théorie est un outil fondamental de la 'topologie non commutative'. Elle permet d'étudier la structure d'une certaine classe d'algèbres d'opérateurs, les C*-algèbres. Le principe général est d'associer à une C*-algèbre A une famille de groupes abéliens $\{K_n(A)\}$, qui ont notamment pour intérêt de classifier les projecteurs et les unitaires 'sur A', c'est-à-dire dans un certain $M_n(A)$. Cette classification fait intervenir les propriétés homotopiques comme algébriques de A.
Le calcul complet de la K-théorie d'un certain nombre de C*-algèbres est relativement aisé sans l'intervention d'outils compliqués. Cependant, pour étudier des C*-algèbres plus complexes, il est nécessaire d'établir des théorèmes généraux qui relient les constructions classiques de C*-algèbres et leur effet sur la structure des groupes de K-théorie. On aboutit généralement à des suites exactes de groupes, qui ne donnent qu'une information partielle sur la K-théorie, quoique dans des cas particuliers il est possible de 'résoudre' ces suites exactes.
Nous nous intéresserons ici aux constructions de C*-algèbres par produit libre et par produit croisé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$, pour lesquelles on obtient des résultats satisfaisants en K-théorie.

2 Préliminaires sur les C*-algèbres

2.1 Définitions et objectifs

L'idée est de généraliser certaines des propriétés intéressantes des espaces de la forme $\mathcal{B}(H)$, l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H, à une catégorie plus large d'algèbres d'opérateurs.
Tout élément $T \in B(H)$ possède un adjoint T^*, défini par la formule :

$$\langle \xi, T\eta \rangle = \langle T^*\xi, \eta \rangle$$

On a alors la *C*-équation* :

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \tag{1}$$

Définition 2.1.1. De façon abstraite, on peut définir une C*-algèbre comme une algèbre de Banach munie d'une opération 'adjoint' $a \mapsto a^*$, qui est un anti-homomorphisme involutif, antilinéaire et isométrique, et qui vérifie la C*-équation (1).

Remarque 2.1.2. De façon plus concrète (et plus simple !), on peut aussi définir une C*-algèbre comme une sous-algèbre involutive fermée d'un certain $\mathcal{B}(H)$. Il se trouve que, grâce à la construction GNS ([3], p.12-13), ces deux définitions coïncident, c'est-à-dire qu'il existe toujours une représentation fidèle d'une C*-algèbre 'abstraite' dans un certain $\mathcal{B}(H)$.

Exemples

– $C(X)$, avec X un espace compact, muni de l'involution $f^*(x) = \overline{f(x)}$.
– $L^\infty(X, \mu)$, avec (X, μ) un espace mesuré.
– $\mathcal{K}(H)$, avec H un espace de Hilbert.

A partir de la notion d'adjoint et de la C*-équation, il est possible de récupérer dans les C*-algèbres un très grand nombre des propriétés de $\mathcal{B}(H)$. De plus, la structure topologique des C*-algèbres est étroitement liée à leur structure algébrique. Ainsi, les homomorphismes involutifs de C*-algèbres (appelés $*$-homomorphismes) sont automatiquement contractants.

Quelques classes d'opérateurs remarquables :

Opérateur	dans $\mathcal{B}(H)$	dans une C*-algèbre
Autoadjoint	$\langle \xi, T\eta \rangle = \langle T\xi, \eta \rangle$	$T = T^*$
Unitaire	Isomorphisme isométrique	$U^*U = UU^* = 1$
Normal	Commute avec son adjoint	$T^*T = TT^*$
Projecteur	Projection orthogonale sur un sous-espace fermé	$P^* = P = P^2$
Isométrie partielle	Isométrie de $Ker(V)^\perp$ sur $Im(V)$	V^*V et VV^* sont des projecteurs

Définition 2.1.3. On conserve la notion de spectre pour les éléments d'une C*-algèbre unitale A. Pour $a \in A$:

$$Sp_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } a - \lambda 1 \text{ est inversible}\}$$

Si a est unitaire, alors $Sp_A(a) \subset S^1$.
Si a est autoadjoint, alors $Sp_A(a) \subset \mathbb{R}$.

On définit aussi le spectre de A par :

$$Sp(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} \text{ homomorphisme unital continu d'algèbres}\}$$

Muni de la topologie de la convergence simple, $Sp(A)$ est compact.

C*-algèbres commutatives

Théorème 2.1.4 (Gelfand). *Si A est commutative, la transformée de Gelfand :*

$$\begin{array}{rcl} G : A & \to & C(Sp(A)) \\ a & \mapsto & (\chi \mapsto \chi(a)) \end{array}$$

est un isomorphisme de C-algèbres.*

Les C*-algèbres unitales commutatives sont donc toutes, à isomorphisme près, de la forme $C(X)$, avec X compact. En fait, les C*-algèbres commutatives non unitales sont aussi toutes de la forme $C_0(X)$, avec X localement compact.

Calcul fonctionnel continu

L'objectif est de généraliser la notion de polynôme d'endomorphisme. Pour une fonction f d'une variable complexe à valeurs complexes, et $a \in A$, on voudrait définir $f(a)$. Si A est une algèbre de Banach unitale et si f est holomorphe au voisinage de $Sp_A(a)$, c'est assez simple en généralisant la formule de Cauchy :

$$f(a) := \int_\Gamma f(z) \cdot (z-a)^{-1} dz$$

où Γ est un cycle autour de $Sp_A(a)$.
Si A est une C*-algèbre unitale, on peut faire du calcul fonctionnel continu sur les éléments normaux de A :

Théorème 2.1.5. *Si $a \in A$ est normal, alors il existe un unique $*$-homomorphisme unital :*

$$\Phi_a : C(Sp_A(a)) \to A$$

tel que $\Phi(Id_{\mathbb{C}}) = a$. L'élément $f(a) := \Phi_a(f)$ est en fait dans la C-algèbre engendrée par 1, a et a^*.*

Le calcul fonctionnel continu possède toutes les propriétés auxquelles ont s'attend :

- $Sp(f(a)) = f(Sp(a))$ pour $f \in C(Sp(a))$.
- $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour $f \in C(Sp(a))$ et $g \in C(f(Sp\ a))$.

Définition 2.1.6 (Positivité). Soit $a \in A$ un élément normal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $Sp(a) \in \mathbb{R}_+$
- $\exists b \in A$ autoadjoint tq $a = b^2$
- $\exists x \in A$ tq $a = x^* x$

On dit alors que a est positif et on note $a \geq 0$. L'ensemble des éléments positifs est un cône convexe saillant.

C*-algèbres non unitales

Définition 2.1.7. Soit A une C*-algèbre non unitale. On peut la plonger dans une C*-algèbre unitale $\tilde{A}$, appelée l'unitalisée de A, qui est de la forme $A \oplus \mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel.

Grâce à la notion d'unitalisée et à celle d'unité approchée, on peut en fait donner un sens, pour les C*-algèbres non unitales, à la plupart des définitions qu'on vient de faire.

2.2 Constructions classiques de C*-algèbres

Idéaux et quotients
Un idéal J d'une C*-algèbre A est toujours supposé bilatère et fermé. Un tel idéal s'avère être lui-même une C*-algèbre. Mieux, le quotient A/J, muni de la norme quotient, est aussi une C*-algèbre !

Définition 2.2.1. Une suite exacte de C*-algèbres est une suite de $*$-homomorphismes entre C*-algèbres :

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\phi_n} A_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \cdots$$

avec $Im(\phi_{n+1}) = Ker(\phi_n)$.
Un exemple fondamental de suite exacte est, pour J un idéal de A :

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$$

C*-algèbre enveloppante

Définition 2.2.2. Soit A une C*-algèbre. Une représentation de A sur un espace de Hilbert H est un $*$-homomorphisme :

$$\pi : A \to \mathcal{B}(H)$$

Cette représentation est dite :
- fidèle si π est injective. A est alors isomorphe à une sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{B}(H)$.
- non dégénérée si $\pi(A)H$ est dense dans H.

Définition 2.2.3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive engendrée par des unitaires. On définit une semi-norme sur $\mathcal{A}$:

$$\|a\| := \sup\{\|\pi(a)\| \mid \pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H) \ \ *\text{-homomorphisme}\}$$

Le séparé-complété de $\mathcal{A}$ pour cette semi-norme est une C*-algèbre. On l'appelle la C*-algèbre enveloppante de $\mathcal{A}$.

Application 1 : C*-algèbre des rotations irrationnelles
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On appelle $\mathcal{A}_\theta$ l'algèbre involutive universelle engendrée par des unitaires u et v qui vérifient $uv = e^{2\imath\pi\theta}vu$. La *C*-algèbre des rotations irrationnelles* d'angle $2\pi\theta$, notée A_θ, est la C*-algèbre enveloppante de $\mathcal{A}_\theta$.

Application 2 : C*-algèbres de groupes
Soit G un groupe dénombrable. On appelle $\mathbb{C}G$ l'espace vectoriel de base $\{u_g \mid g \in G\}$, et on le munit d'une structure d'algèbre involutive par les relations $u_g \cdot u_h = u_{gh}$ et $u_g^* = u_{g^{-1}}$. Les u_g sont donc unitaires.
La *C*-algèbre pleine du groupe G*, notée $C^*(G)$, est la C*-algèbre enveloppante de $\mathbb{C}G$. On a une correspondance bijective entre :

- les représentations unitales de $C^*(G)$: $\quad \pi : C^*(G) \to \mathcal{B}(H)$
- les représentations unitaires de G : $\quad \pi : G \to \mathcal{B}(H)$

Produit tensoriel de C*-algèbres
Le produit tensoriel spatial de deux C*-algèbres 'concrètes' $A_1 \subset \mathcal{B}(H_1)$ et $A_2 \subset \mathcal{B}(H_2)$ est défini comme la complétion de $(A_1 \otimes_{alg} A_2) \subset \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$. Le produit tensoriel spatial de deux C*-algèbres 'abstraites' peut être défini en les réalisant comme des C*-algèbres 'concrètes'. Il ne dépend pas du choix de ces réalisations.
Deux exemples particuliers de produits tensoriels nous intéressent :
- L'algèbre $M_n(A)$ des matrices à coefficients dans la C*-algèbre A est isomorphe à $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$. Si $A \hookrightarrow \mathcal{B}(H)$, alors $M_n(A) \hookrightarrow \mathcal{B}(H^{\oplus n})$.
- L'algèbre $C_0(X; A)$ des applications de X à valeurs dans la C*-algèbre A est isomorphe à $C_0(X) \otimes A$.

3 K-théorie des C*-algèbres

3.1 Le groupe $K_0(A)$

Définition 3.1.1. Soit A une C*-algèbre *unitale*. $K_0(A)$ est le groupe abélien avec générateur $[p]$, pour tout projecteur $p \in M_n(A)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec les relations suivantes :

1. $[p] + [q] = [p \oplus q]$, $\quad$ où $p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$
2. $[0] = 0$, $\quad 0 \in M_n(A), \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. $[p] = [q]$ $\quad$ si $p, q \in M_n(A)$ sont homotopes.

Deux projecteurs $p, q \in M_n(A)$ sont dits homotopes s'il existe un chemin continu de projecteurs $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & M_n(A) \\ t & \mapsto & p_t \end{array}$ tel que $p_0 = p$ et $p_1 = q$. On note alors $p \sim_h q$.
Les éléments de $K_0(A)$ s'écrivent sous la forme d'une différence formelle $[p] - [q]$, où p et q sont des projecteurs de même taille. Pour comparer deux éléments de $K_0(A)$, il suffit de remarquer que $[p] - [q] = [p'] - [q']$ si et seulement si :

$$\exists r \text{ projecteur tel que } (p \oplus q' \oplus r) \sim_h (p' \oplus q \oplus r)$$

Définition 3.1.2. Soient $p, q \in M_n(A)$. On dit que :

1. $p \sim_u q$ si $\exists u \in M_n(A)$ unitaire tq $q = upu^*$.
2. $p \sim_{mvn} q$ si $\exists v \in M_n(A)$ tq $p = v^*v$ et $q = vv^*$.

On peut en fait remplacer, dans la définition du groupe $K_0(A)$, la notion d'homotopie ($\sim_h$) par la notion d'équivalence unitaire ($\sim_u$) ou d'équivalence

de Murray-von Neumann ($\sim_{mvn}$). En effet, si on plonge les projecteurs p et q dans une algèbre matricielle $M_N(A)$ suffisamment grande, ces trois notions coïncident.
Exemple : Le groupe $K_0(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, par l'application qui envoie un projecteur dans $M_n(\mathbb{C})$ sur son rang.

Définition 3.1.3 (Fonctorialité). Soient A et B des C*-algèbres unitales, $\alpha : A \to B$ un $*$-homomorphisme unital.
$\alpha_* : \begin{array}{ccc} K_0(A) & \to & K_0(B) \\ [p] & \mapsto & [\alpha(p)] \end{array}$ est le morphisme de groupes associé à α.
K_0 est un foncteur sur la catégorie des C*-algèbres unitales et des $*$-homomorphismes unitaux.

Si J est une C*-algèbre non unitale, et $\tilde{J}$ son unitalisation, on peut définir $K_0(J)$ comme le noyau de l'homomorphisme $\pi_* : K_0(\tilde{J}) \to K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$. On peut alors étendre le foncteur K_0 à toutes les C*-algèbres et à tous les $*$-homomorphismes.
Par exemple, le $*$-homomorphisme non unital $j : A \to M_n(A)$; $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ induit un isomorphisme $j_* : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$. On peut généraliser ce résultat en montrant que si e est un projecteur de rang un dans $\mathcal{K}(H)$, alors le $*$-homomorphisme $k : A \to A \otimes \mathcal{K}(H)$; $a \mapsto a \otimes e$ induit un isomorphisme en K-théorie.

Définition 3.1.4. Soient A et B deux C*-algèbres. Deux $*$-homomorphismes $\alpha, \beta : A \to B$ sont dits homotopes s'il existe un chemin continu de $*$-homomorphismes $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & Hom(A;B) \\ t & \mapsto & \alpha_t \end{array}$ ($i.e$ $t \mapsto \alpha_t(a)$ est continu pour tout $a \in A$) tel que $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_1 = \beta$.
Les homomorphismes induits $\alpha_*, \beta_* : K_0(A) \to K_0(B)$ sont alors égaux. Le foncteur K_0 a donc la propriété d'homotopie.

3.2 K-théorie d'ordre supérieur

Définition 3.2.1. Soit A une C*-algèbre *unitale.* $K_1(A)$ est le groupe abélien avec générateur $[u]$, pour tout unitaire $u \in M_n(A)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec les relations suivantes :

1. $[u] + [v] = [u \oplus v]$
2. $[1] = 0, \quad 1 \in M_n(A), \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. $[u] = [v]$ si $u, v \in M_n(A)$ sont homotopes, c'est-à-dire s'il sont reliés par un chemin continu d'unitaires de $M_n(A)$.

Si A n'est pas unitale, on peut définir $K_1(A) := K_1(\tilde{A})$.

L'addition dans le groupe $K_1(A)$ correspond en fait à la multiplication des matrices :

$$\forall u, v \in M_n(A), [u] + [v] = [uv] \quad \text{et} \quad -[u] = [u^*]$$

Ainsi, tous les éléments de $K_1(A)$ s'écrivent sous la forme d'un unique générateur $[u]$.
Exemple : Le groupe $K_1(\mathbb{C})$ est nul, puisque l'ensemble des unitaires de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Les groupes $K_0(A)$ et $K_1(A)$ classifient respectivement les projecteurs et les unitaires sur A. On voudrait maintenant définir des groupes de K-théorie d'ordre > 1, pour obtenir une théorie homologique sur les C*-algèbres.

Définition 3.2.2. Soit A une C*-algèbre. La *suspension* de A est la C*-algèbre :

$$S(A) = C_0\left((0,1);A\right) \cong C_0\left((0,1)\right) \otimes A$$

On montre que $K_0(S(A)) \cong K_1(A)$ ([1], p.69). On peut donc définir, de façon consistante avec cette identification :

$$K_n(A) := K_0(S^n(A)) \qquad (n \geq 1) \tag{2}$$

Théorème 3.2.3. $\{K_n\}_{n\geq 0}$ *est une théorie homologique sur les C*-algèbres, c'est-à-dire :*
Si on a une suite exacte $0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$, *on dispose alors d'une application 'indice'* $\partial : K_1(A/J) \to K_0(J)$ *telle qu'on ait une suite exacte semi-infinie :*

$$\xrightarrow{\partial} K_n(J) \to K_n(A) \to K_n(A/J) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(J) \to K_{n-1}(A) \to K_{n-1}(A/J) \xrightarrow{\partial}$$

Par conséquent, si on a une suite exacte scindée :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "\pi"] & A/J \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

la suite associée en K-théorie est aussi exacte et scindée :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_n(J) \arrow[r] & K_n(A) \arrow[r, shift left, "\pi_*"] & K_n(A/J) \arrow[l, shift left, "\sigma_*"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Rappelons que les groupes $K_n(\cdot)$ sont abéliens. On obtient donc :

$$K_n(A) \cong K_n(J) \oplus K_n(A/J)$$

Théorème 3.2.4 (Périodicité de Bott). *Soit A une C*-algèbre. On a un isomorphisme :*

$$\beta_A : K_0(A) \to K_2(A) \tag{3}$$

Ce théorème est le résultat fondamental de la K-théorie des C*-algèbres. En effet, il implique que la suite des groupes $(K_n(A))_{n\geq 0}$ est 2-périodique. Pour connaître entièrement la K-théorie d'une C*-algèbre A, il suffit donc de calculer les deux premiers groupes $K_0(A)$ et $K_1(A)$.

Corollaire 3.2.5 (Suite exacte à six termes). *Si on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

alors on obtient une suite exacte à six termes :

$$\begin{tikzcd} K_1(J) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r] & K_1(A/J) \arrow[d, "\partial"] \\ K_0(A/J) \arrow[u, "\partial_0"] & K_0(A) \arrow[l] & K_0(J) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{4}$$

Cette conséquence immédiate du théorème de pérodicité de Bott est l'outil principal pour le calcul de la K-théorie des C*-algèbres.

4 Exemples de calculs de K-théorie

4.1 K-théorie d'un produit libre amalgamé

Définition 4.1.1 (Produit libre amalgamé). Soient D, A et B des C*-algèbres, et :
$\begin{array}{rcl} \phi_1 : D & \hookrightarrow & A \\ \phi_2 : D & \hookrightarrow & B \end{array}$ des plongements.
Le *produit libre amalgamé* de A et B suivant D, noté $A *_D B$, est la C*-algèbre universelle qui contient des copies de A et B qui s'accordent sur D :
$\exists \begin{array}{rcl} i_1 : A & \hookrightarrow & A *_D B \\ i_2 : B & \hookrightarrow & A *_D B \end{array}$ tels que pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, bend left, "\psi_1"] & \\ D \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & C \\ & B \arrow[ur, bend right, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

on puisse le compléter en :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\psi_1"] & & \\ D \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & A *_D B \arrow[r, "\psi"] & C \\ & B \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "\psi_2"'] & & \end{tikzcd} \tag{5}$$

On considère en général des C*-algèbres A et B unitales et $D = \mathbb{C}1$. La C*-algèbre $A *_{\mathbb{C}} B$ est appelée *produit libre unital* de A et B.

Théorème 4.1.2. *Le calcul de la K-théorie de $A *_D B$ est possible s'il existe des rétractions* $\begin{array}{lcl} r_1 : A & \to & D \\ r_2 : B & \to & D \end{array}$ *telles que $r_1 \circ \phi_1 = r_2 \circ \phi_2 = id_D$. Dans ce cas, on trouve :*

$$K_n(A *_D B) \cong K_n(D) \oplus (K_n(A)/\phi_{1*}(K_n(D))) \oplus (K_n(B)/\phi_{2*}(K_n(D))) \quad (6)$$

La démonstration de ce résultat, dû à Cuntz ([2]), utilise les propriétés homotopiques du foncteur K_n pour montrer que $A *_D B$ a la même K-théorie que la C*-algèbre P :

$$P = A \oplus_D B = \{(a,b) \in A \oplus B \ \text{ tq } \ r_1(a) = r_2(b)\}$$

Un argument de type Mayer-Vietoris permet de conclure.

Une application intéressante de ce théorème est le calcul de la K-théorie de la C*-algèbre pleine $C^*(\mathbb{F}_n)$ du groupe libre $\mathbb{F}_n$, qui peut être vue comme le produit libre unital de n copies de $C^*(\mathbb{Z})$. On obtient :

$$K_0(C^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad K_1(C^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z}^n$$

En particulier, les C*-algèbres $C^*(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 1$, sont deux à deux non isomorphes.

4.2 K-théorie d'un produit croisé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$

Définition 4.2.1. Soit G un groupe discret et A une C*-algèbre. Une action de G sur A est un homomorphisme α : $\begin{array}{lcl} G & \to & Aut(A) \\ g & \mapsto & \alpha_g \end{array}$

Par exemple, si G agit sur un espace localement compact X, on dispose d'une action de G sur $C_0(X)$ par :

$$\forall g \in G, F \in C_0(X), \quad \alpha_g(F) : x \to F(x \cdot g)$$

Soit α une action de G sur A. On peut munir $l^1(G;A)$ d'une structure d'algèbre involutive par :

$$\begin{array}{rcl} (F \cdot G)(g) & = & \displaystyle\sum_{k \in G} F(k)\alpha_k(G(k^{-1}g))dk \\ F^*(g) & = & \alpha_g(F(g^{-1})^*) \end{array}$$

La C*-algèbre enveloppante de $l^1(G;A)$ est appelée *produit croisé de A par G*, et elle est notée $A \rtimes_\alpha G$.

Produit croisé par $\mathbb{Z}$

Toute action de $\mathbb{Z}$ sur une C*-algèbre A est de la forme $x \cdot n = \alpha^n(x)$, où $\alpha \in Aut(A)$. Cette action est par extension notée α.

Théorème 4.2.2 (Pimsner-Voiculescu). *Soit A une C*-algèbre et $\alpha \in Aut(A)$. Alors on a une suite exacte à six termes :*

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r] & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[d, "1-\alpha_*"] \\ K_0(A) \arrow[u, "1-\alpha_*"] & K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[l] & K_1(A) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{7}$$

La partie cruciale de ce théorème est l'identification de la K-théorie de $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ avec celle du tore $A_{\mathbb{Z}}$:

$$A_{\mathbb{Z}} = \{f \in C([0,1];A) \quad tq \quad f(1) = \alpha(f(0))\} \tag{8}$$

Exemple : La C*-algèbre A_θ des rotations irrationnelles d'angle $2\pi\theta$ peut être réalisée comme le produit croisé $C(S^1) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$, où α_θ est la rotation par $2\pi\theta$. On obtient alors :

$$K_0(A_\theta) \cong K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2 \tag{9}$$

Produit croisé par $\mathbb{Z}^2$

Toute action de $\mathbb{Z}^2$ sur une C*-algèbre A est de la forme $x \cdot (m,n) = (\alpha^m \circ \beta^n)(x)$, où $\alpha, \beta \in Aut(A)$ commutent. Cette action est par extension notée (α, β).

Comme dans la démonstration du théorème de Pimsner-Voiculescu, j'identifie la K-théorie de $A \rtimes_{(\alpha,\beta)} \mathbb{Z}^2$ avec celle de $A_{\mathbb{Z}^2}$:

$$A_{\mathbb{Z}^2} = \left\{ f \in C([0,1]^2;A) \quad tq \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{array}{rcl} f(1,y) & = & \alpha(f(0,y)) \\ f(x,1) & = & \beta(f(x,0)) \end{array} \right\} \tag{10}$$

La difficulté réside dans le fait que cette C*-algèbre ne peut pas être décomposée dans une suite exacte courte 'simple'. Il est possible de lever cette difficulté dans certains cas particuliers. Ainsi, si α et β sont homotopes à l'identité, on obtient :

$$K_i(A_{\mathbb{Z}^2}) \cong K_0(A) \oplus K_0(A) \oplus K_1(A) \oplus K_1(A) \qquad (i = 0, 1)$$

5 Références

[1] B. BLACKADAR, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer, New York Berlin London, 1986.

[2] J. CUNTZ, The K-groups for free products of C*-algebras. *Operator algebras and applications, Part I* (Kingston, Ont., 1980), pp. 81–84, Proc. Sympos. Pure Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[3] N. HIGSON & J. ROE, *Analytic K-Homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[4] G. PEDERSEN, *C*-algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London New York, 1979.

[5] M. PIMSNER, *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Invent. Math. 86, 1986.

[6] M. PIMSNER & D. VOICULESCU, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C*-algebras*, J. Operator Theory 4, 1980.

[7] M. RIEFFEL, Connes' analogue for crossed products of the Thom isomorphism. *Operator algebras and K-theory* (San Francisco, Calif., 1981), pp. 143–154, Contemp. Math., 10, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[8] T. SUDO, *K-theory of multi-amalgams of C*-algebras*, preprint, 2006.

[9] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebras*, Oxford University Press, Oxford New York Tokyo, 1993.

[10] K. THOMSEN, *On the KK-theory and the E-theory of amalgamated free products of C*-algebras*, J. Funct. Anal., 2003.

[11] Y. UEDA, *A Relationship between HNN Extensions and Amalgamated Free Products in Operator Algebras*, preprint, 2006.

[12] N.E. WEGGE-OLSEN, *K-Theory and C*-Algebras*, Oxford University Press, Oxford New York Tokyo, 1993.