

# Percolation sur l'hypercube – transition de phase pour la distorsion de la métrique

François MAILLOT et Lucas MERCIER

27 juin 2006

## Résumé

On effectue sur les arêtes de l'hypercube  $H_n = \{0, 1\}^n$  une percolation de paramètre  $p = n^{-\alpha}$ . L'objet de l'exposé est l'étude du comportement asymptotique de la distorsion de la métrique, en fonction d' $\alpha$ . On montre que si  $\alpha < 1/2$  la distorsion est presque sûrement inférieure à une constante  $C_\alpha$ . Si  $\alpha > 1/2$  elle tend vers l'infini plus vite qu'une puissance de  $n$ .

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Position du problème et généralités sur la percolation . . . . .	3
1.2	Premières définitions et énoncés des théorèmes . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le cas sur-critique : <math>\alpha &lt; 1/2</math></b>	<b>4</b>
2.1	Un résultat sur la distorsion de l'identité . . . . .	4
2.1.1	Énoncé de la proposition et définition des chemins considérés . . . . .	4
2.1.2	La méthode du second moment . . . . .	5
2.1.3	Dénombrement des chemins et fin de la démonstration	5
2.2	Démonstration du théorème 1. . . . .	7
2.2.1	Lemme préliminaire : les «bons sommets» sont denses	7
2.2.2	Fin de la démonstration . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Le cas sous-critique : <math>\alpha &gt; 1/2</math></b>	<b>11</b>
3.1	Lemmes préliminaires . . . . .	11
3.1.1	Contrôle de la longueur d'un cycle géodésique . . . . .	11
3.1.2	Rareté des cycles géodésiques . . . . .	12
3.2	Démonstration du théorème 2. . . . .	14
<b>4</b>	<b>Une exploration numérique de résultats voisins</b>	<b>15</b>
4.1	Probabilité qu'un graphe percolé soit connexe . . . . .	15
4.1.1	Échelle linéaire . . . . .	15
4.1.2	Échelle logarithmique . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Remerciements</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Sources Caml des programmes</b>	<b>20</b>
A.1	Opérations sur les listes, comparaison d'éléments . . . . .	20
A.2	Construction de l'hypercube, des arêtes, indexation des som- mets . . . . .	21
A.3	Calcul des distances, des distorsions, ... . . . . .	23

# 1 Introduction

## 1.1 Position du problème et généralités sur la percolation

On définit l'hypercube  $H_n$  comme le graphe de sommets les points de  $\{0, 1\}^n$  et dont les arêtes relient deux sommets qui ne diffèrent que d'une coordonnée. On définit  $H_{n,p}$  comme une réalisation de la percolation de paramètre  $p$  sur  $H_n$ , i.e. l'opération qui consiste à garder chaque arête avec probabilité  $p$ , ce indépendamment pour chaque arête.  $H_n$  et  $H_{n,p}$  sont munis de la distance  $d$  définie comme suit :  $d(a, b)$  est la longueur (le nombre d'arêtes) du plus court chemin reliant les points  $a$  et  $b$ . Si aucun chemin ne relie  $a$  et  $b$ , on pose  $d(a, b) = +\infty$ .

La percolation a été étudiée dans de nombreux cas et des transitions de phase, i.e. des variations brutales des propriétés du graphe percolé quand on fait varier le paramètre  $p$ , ont été mises en évidence. Dans le cas de  $\mathbb{Z}^2$  par exemple, la probabilité de l'existence d'une composante connexe infinie est nulle si  $p < 1/2$ , égale à 1 si  $p > 1/2$ . L'hypercube  $H_n$  est un graphe fini, donc on ne peut espérer obtenir un résultat similaire à  $n$  fixé, mais en faisant varier  $n$  on peut espérer obtenir des propriétés asymptotiques de la percolation sur l'hypercube. Pour des raisons évidentes, on ne peut choisir  $p$  constant, on le prend comme une puissance de  $n$  :  $p = n^{-\alpha}$ , et le paramètre qui va varier sera  $\alpha$ .

## 1.2 Premières définitions et énoncés des théorèmes

Pour étudier l'effet de la percolation sur l'hypercube  $H_n$  on introduit la notion de distorsion de la métrique entre deux espaces métriques :

**Définition 1.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. La distorsion d'une application  $f$  de  $X$  dans  $Y$  est donnée par :

$$D(f) = \frac{D_+(f)}{D_-(f)}$$

où :

$$D_+(f) = \max \left( 1, \sup_{a,b \in X} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \right)$$
$$D_-(f) = \inf_{a,b \in X} \frac{\max(1, d_Y(f(a), f(b)))}{d_X(a, b)}$$

La distorsion de la métrique entre les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est définie par :

$$D(X, Y) = \inf_{f: X \rightarrow Y} D(f)$$

Notons que cette définition de la distorsion est asymétrique (les fonctions  $f$  considérées n'étant pas nécessairement bijectives ni même injectives).

Nous allons montrer que l'on observe une transition de phase pour cette distorsion quand on fait tendre  $n$  vers l'infini, au sens suivant, en posant  $p = n^{-\alpha}$  :

**Théorème 1.** *Si  $\alpha < 1/2$  alors il existe une constante  $C(\alpha)$  telle que :*

$$\mathbb{P}(D(H_n, H_{n,p}) < C(\alpha)) \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

**Théorème 2.** *Si  $\alpha > 1/2$  alors il existe une constante  $\beta(\alpha)$  telle que :*

$$\mathbb{P}(D(H_n, H_{n,p}) < n^{\beta(\alpha)}) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

## 2 Le cas sur-critique : $\alpha < 1/2$

### 2.1 Un résultat sur la distorsion de l'identité

#### 2.1.1 Énoncé de la proposition et définition des chemins considérés

Avant de montrer le théorème 1., montrons d'abord un résultat plus faible mais similaire, à savoir

**Proposition 3.** *Pour  $\alpha < 1/2$  fixé, il existe  $l$  tel que, pour tous  $a$  et  $b$  fixés qui ne diffèrent que d'une coordonnée :*

$$\mathbb{P}(d_p(a, b) \leq 2l + 1) \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

où  $d_p$  est la distance sur l'hypercube percolé  $H_{n,p}$ .

*Démonstration.* On considère les chemins reliant  $a$  à  $b$  de la forme :

$$a : \tau_{i_1} \rightarrow \tau_{i_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{i_l} \rightarrow \tau_j \rightarrow \tau_{i_l} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{i_1} : b$$

où  $\tau_k$  représente l'opération qui consiste à changer la  $k^{\circ}$  coordonnée d'un sommet,  $j$  est la coordonnée qui change entre  $a$  et  $b$ , et où les  $i_k$  sont deux à deux distincts et tous différents de  $j$ . Le nombre de tels chemins est :

$$\frac{(n-1)!}{(n-l-1)!} = (n-1)(n-2)\cdots(n-l) \sim n^l$$

On note  $T_l$  l'ensemble de ces chemins.

Soit  $X_n$  la variable aléatoire qui donne le nombre de chemins restants après percolation :

$$X_n = \sum_{I \in T_l} \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a}$$

$H_{n,p}^a$  est l'ensemble des arêtes de l'hypercube percolé.

### 2.1.2 La méthode du second moment

On va utiliser la méthode du second moment pour montrer le résultat cherché. Elle consiste à majorer la probabilité de l'événement  $\{X_n = 0\}$  à l'aide de  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{E}(X_n^2)$ , sous la forme du lemme suivant :

**Lemme 1** (Méthode du second moment). *Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de premier et second moment finis. Alors :*

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

*Preuve du lemme.* On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \mathbb{P}(X = k)$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux suites (en tant que vecteurs de  $l^2(\mathbb{R})$ )  $(k \sqrt{\mathbb{P}(X = k)})_{k \geq 1}$  et  $(\sqrt{\mathbb{P}(X = k)})_{k \geq 1}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X)^2 &= \left( \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(X = k) \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}(X = k) \right) \left( \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k) \right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) \mathbb{P}(X > 0) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)} \quad \square$$

### 2.1.3 Dénombrement des chemins et fin de la démonstration

Exprimons donc les espérances de  $X_n$  et  $X_n^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E} \left( \sum_I \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a} \right) \\ &= \sum_I \mathbb{E} \left( \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a} \right) \\ &= \sum_I \prod_{i \in I} \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-l-1)!} p^{2l+1} \\ &\sim n^{(1-2\alpha)l-\alpha} \end{aligned}$$

car les variables aléatoires dont on considère les produits sont indépendantes (elles correspondent en effet à la percolation sur des arêtes deux à deux distinctes).

Donc on a :

$$\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \infty \text{ pour } l > \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}$$

Dans la suite on considèrera un tel  $l$ .

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E} \left( \sum_I \sum_J \prod_{i \in I, j \in J} \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a} \mathbf{1}_{j \in H_{n,p}^a} \right) \\ &= \sum_I \sum_J \mathbb{E} \left( \prod_{i \in I, j \in J} \mathbf{1}_{i \in H_{n,p}^a} \mathbf{1}_{j \in H_{n,p}^a} \right) \\ &= \sum_I \sum_J p^{4l+2-|I \cap J|} \\ &\leq \sum_{I \cap J = \emptyset} p^{4l+2} + \sum_{I \cap J \neq \emptyset} p^{4l+2-|I \cap J|} \\ &\leq \left( \frac{(n-1)!}{(n-l-1)!} \right)^2 p^{4l+2} + \sum_{k=1}^{2l+1} |\{I, J \mid |I \cap J| = k\}| p^{4l+2-k} \\ &\leq \mathbb{E}(X_n)^2 + \sum_{k=1}^{2l+1} |\{I, J \mid |I \cap J| = k\}| p^{4l+2-k} \end{aligned}$$

Majorons maintenant le cardinal de l'ensemble  $\{I, J \mid |I \cap J| \geq 1\}$ . Soit  $I$  un chemin de la forme considérée. Comptons les chemins qui rencontrent  $I$  sur sa première arête : il y en a  $\frac{(n-2)!}{(n-l-1)!}$ . De manière générale, pour  $k \leq l$ ,  $k! \frac{(n-k-1)!}{(n-l-1)!}$  chemins rencontrent  $I$  sur sa  $k$ -ième arête, et  $l!$  sur la  $(l+1)$ -ième. Remarquons que si deux chemins ont leur  $l$ -ième arête commune alors leur  $(l+1)$ -ième l'est aussi.

Le nombre de chemins qui rencontrent  $I$  est donc majoré par :

$$\sum_{k=1}^l k! \frac{(n-k-1)!}{(n-l-1)!} \leq \sum_{k=1}^l k! n^{l-k} \sim n^{l-1}$$

De même, le cardinal de l'ensemble  $\{J \mid |I \cap J| \geq 2m-1\}$  est majoré par :

$$\sum_{t_1 < \dots < t_m \leq l} (t_2 - t_1 - 1)! \dots (t_m - t_{m-1} - 1)! n^{l-t_m} \sim n^{l-m}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &\leq \mathbb{E}(X_n)^2 + \sum_{m=1}^l n^{2l-m} p^{4l+2-2m} \\
&\leq \mathbb{E}(X_n)^2 + \sum_{m=1}^l n^{(2l-m)(1-2\alpha)-2\alpha} \\
1 - \frac{\mathbb{E}(X_n)^2}{\mathbb{E}(X_n^2)} &\leq \frac{1}{\mathbb{E}(X_n^2)} \sum_{m=1}^l n^{(2l-m)(1-2\alpha)-2\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\mathbb{E}(X_n)^2} \sum_{m=1}^l n^{(2l-m)(1-2\alpha)-2\alpha} \\
&\sim \sum_{m=1}^l n^{m(2\alpha-1)} \\
&\sim n^{2\alpha-1} \\
&\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

La méthode du second moment permet alors de conclure :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \square$$

## 2.2 Démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 1. se fait suivant la même idée : on choisit soigneusement un ensemble de chemins de façon à ce que presque sûrement il en reste au moins un après percolation.

$$\text{Fixons } l > \frac{9\alpha}{1-2\alpha}$$

$$\text{Soit } m = \left\lfloor \frac{n-1}{l+2} \right\rfloor$$

Soit  $A, B, C_1, \dots, C_l, D$  une partition de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $|A| = |B| = |C_1| = \dots = |C_l| = m$ . On a alors  $|D| > 0$ .

### 2.2.1 Lemme préliminaire : les «bons sommets» sont denses

Introduisons la notion de «bon sommet» :

**Définition 2.** *Un sommet de  $H_{n,p}$  est dit bon s'il existe au moins  $2m$  points à distance 2 de lui dans  $H_{n,p}$  qui ne diffèrent de lui que par deux A-coordonnées.*

Nous allons en premier lieu démontrer un lemme qui affirme que les bons sommets sont «denses», au sens suivant :

**Lemme 2.** Posons  $p = n^{-\alpha}$ . Pour  $u \in H_{n,p}$  on définit  $B_u$  comme l'ensemble des bons sommets de  $H_{n,p}$  qui diffèrent de  $u$  d'une seule  $B$ -coordonnée. Alors :

$$\mathbb{P}((\forall u \in H_{n,p})(B_u \neq \emptyset)) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Autrement dit, tout sommet a un voisin selon  $B$  qui est bon avec une probabilité qui tend vers 1.

*Démonstration.* Tout d'abord, montrons que la probabilité qu'un sommet soit bon tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $v$  un sommet de  $H_n$ . Il y a exactement  $m(m-1)$  chemins de longueur 2 partant de  $v$  suivant des  $A$ -coordonnées. Si après percolation il subsiste  $4m$  chemins au moins, alors ils relient  $v$  à au moins  $2m$  points et  $v$  est donc un bon sommet.

Soit  $X_m$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  égale au nombre de sommets reliés directement à  $v$  dans  $H_{n,p}$ . C'est une somme de  $m$  variables aléatoires indépendantes de même loi la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Sa loi est donc la loi binômiale. On peut montrer que  $\mathbb{P}(X_m \geq \frac{mp}{2}) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

En réitérant un raisonnement semblable, et en utilisant l'indépendance de la percolation sur deux arêtes différentes, on en déduit que la probabilité que le nombre de chemins restants soit supérieur à  $\frac{m(m-1)}{4}p^2$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. Il existe donc une constante  $c$  telle qu'il reste plus de  $cn^{2-2\alpha}$  chemins de longueur 2 partant de  $v$  suivant des  $A$ -coordonnées avec une probabilité qui tend vers 1 en l'infini. Or  $cn^{2-2\alpha} > 4m$  à partir d'un certain  $n_0$ , donc la probabilité qu'un sommet soit bon tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.

On peut maintenant montrer le lemme : fixons un sommet  $v$ . Soient  $u_1, \dots, u_m$  ses voisins selon une  $B$ -coordonnée. Les  $u_i$  ayant tous des  $B$ -coordonnées différentes, les caractères «bon» des sommets  $u_i$  sont indépendants. Pour  $n$  assez grand, la probabilité qu'un sommet soit bon est supérieure ou égale à  $1 - 3^{-l}$ , et la probabilité qu'aucun des  $u_i$  ne soit bon est donc majorée par  $3^{-ml}$  (on utilise l'indépendance des événements considérés). En sommant sur tous les sommets, la probabilité qu'un sommet au moins n'ait aucun bon voisin selon les  $B$ -coordonnées est majorée par  $2^n 3^{-ml} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 2.2.2 Fin de la démonstration

*Démonstration du théorème 1.*

Plaçons-nous dans le cas où tout sommet a un bon voisin, cas dont la probabilité tend vers 1 par le lemme précédent.

Il existe alors une fonction  $f$  de  $H_n$  dans lui-même qui envoie tout sommet sur un de ses bons voisins en changeant une  $B$ -coordonnée. Nous allons montrer que la distorsion de cette application est faible au sens où elle est bornée par une constante indépendante de  $n$ .

Notons qu'il est facile de minorer  $D_-(f)$  :

$$d(x, f(x)) = 1 \text{ donc } d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) - 2$$

On en déduit pour  $x \neq y$  :

$$\frac{\max(1, d(f(x), f(y)))}{d(x, y)} \geq \frac{1}{3} \text{ d'où } D_-(f) \geq \frac{1}{3}$$

Maintenant, majorons  $D_+(f)$  :

Soient  $x, y$  deux voisins dans  $H_n$ .  $f$  envoie  $x, y$  sur  $f(x), f(y)$  qui sont à distance au plus 3 dans  $H_n$ . Dans le cas où  $f(x) = f(y)$  il n'y a rien à montrer : le couple  $(x, y)$  n'interviendra pas dans l'augmentation de la distorsion. On s'intéresse donc au cas où  $f(x) \neq f(y)$ , ce qui nous permet de considérer une coordonnée  $e$  selon laquelle  $f(x)$  et  $f(y)$  diffèrent.

Comme  $f(x)$  est un bon sommet, il y a au moins  $2m$  sommets obtenus par un changement de deux  $A$ -coordonnées qui sont à distance 2 de lui dans  $H_{n,p}$ . Si  $e \in A$ , au moins  $m$  sommets parmi les  $2m$  considérés ont la même  $e$ -coordonnée que  $f(x)$  (en effet, il y a exactement  $m - 1$  points obtenus en changeant deux  $A$ -coordonnées de  $f(x)$  parmi lesquelles la  $e$ -coordonnée). Sinon, les  $2m$  sommets considérés conviennent pour la suite :

Notons  $x_1, \dots, x_m$   $m$  tels sommets. De même, notons  $y_1, \dots, y_m$   $m$  sommets dans une situation similaire par rapport à  $f(y)$ . Remarquons que  $d(x_i, y_i) \leq 7$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

Si  $e \notin A$ , quitte à modifier la partition considérée on peut supposer sans perte de généralité que  $e \in D$ .

Nous allons procéder comme pour la proposition 3, à savoir que l'on va considérer un ensemble de chemins de longueur  $2l + 9$  au plus entre deux sommets et montrer que la probabilité que l'un d'eux au moins soit préservé par la percolation tend vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$  en utilisant la méthode du second moment.

Associons à chaque  $i \in \{1, \dots, m\}$  un  $b_i \in B$  avec les  $b_i$  deux à deux distincts. L'ensemble des chemins que l'on va considérer,  $T_l$ , est constitué des chemins de la forme :

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{c}) = x_i : \tau_{c_1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{c_l} \rightarrow \tau_{b_i} \rightarrow \\ \tau_{j_1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{j_k} \rightarrow \\ \tau_{b_i} \rightarrow \tau_{c_l} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{c_1} : y_i \end{aligned}$$

où  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l) \in C_1 \times \dots \times C_l$  et  $j_1, \dots, j_k$  sont les coordonnées qui diffèrent entre  $x_i$  et  $y_i$ . Notons que  $k \leq 7$  donc que les chemins considérés sont de longueur au plus  $2l + 9$ .

Montrons que pour  $i \neq i'$   $P_i(\mathbf{c})$  et  $P_{i'}(\mathbf{c}')$  sont disjoints pour tout choix de  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}'$  :

Soit  $v$  un sommet par lequel passe un chemin de  $T_l$ . La  $e$ -coordonnée de  $v$  nous permet de déterminer s'il est dans la première ou la seconde moitié du chemin. On peut supposer que c'est la première (un raisonnement similaire fonctionne dans le deuxième cas). La distance à  $f(x)$  détermine la position de  $v$  dans le chemin. Alors de deux choses l'une :

- ou  $v$  diffère de  $f(x)$  par une  $b_i$ -coordonnée, ce qui détermine  $i$ .
- ou  $v$  diffère de  $f(x)$  par deux  $a$ -coordonnées, ce qui impose qu'il existe  $i$  tel que  $v = x_i$ , ce qui détermine encore  $i$ .

Comme dans la démonstration de la proposition 3., on définit  $X_n^{(i)}$  comme la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de chemins de  $T_l$  entre  $x_i$  et  $y_i$  qui subsistent après percolation.

On a :

$$\mathbb{E}(X_n^{(i)}) \geq p^{2l+9} m^l \sim cn^{(1-2\alpha)l-9\alpha}$$

où  $c$  est une constante quand  $l$  est fixé.

La condition  $l > \frac{9\alpha}{1-2\alpha}$  implique que  $\mathbb{E}(X_n^{(i)}) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Calculons le second moment de  $X_n^{(i)}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^{(i)2}) &= \sum_{\mathbf{c}, \mathbf{c}'} p^{4l+18-|P_i(\mathbf{c}) \cap P_i(\mathbf{c}')|} \\ &\leq E(X_n^{(i)})^2 \sum_{\mathbf{c}, \mathbf{c}'} (p^{-|P_i(\mathbf{c}) \cap P_i(\mathbf{c}')|} m^{-2l}) \\ &\leq E(X_n^{(i)})^2 (1 + cn^{2\alpha-1}) \end{aligned}$$

(cette dernière inégalité étant obtenue par une méthode similaire à celle utilisée dans la proposition 3.)

La méthode du second moment garantit alors que  $\mathbb{P}(X_n^{(i)} > 0) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On en conclut que pour  $n$  assez grand, la probabilité que pour  $i$  fixé il n'existe aucun chemin de la forme  $P_i(\mathbf{c})$  est inférieure à  $3^{-l}$ . L'indépendance des événements :

$$\left\{ X_n^{(i)} > 0 \right\}_{1 \leq i \leq m}$$

garantit que la probabilité que pour tout  $i$  il n'existe aucun chemin de la forme  $P_i(\mathbf{c})$  est inférieure à  $(3^{-l})^m$ . Donc la probabilité que pour tous  $x, y$  voisins dans  $H_n$  il existe un chemin de longueur inférieure à  $2l + 13$  (2

pour le chemin de  $x$  à  $x_i$ ,  $2l + 9$  pour aller de  $x_i$  à  $y_i$ , 2 pour aller de  $y_i$  à  $y$  entre  $f(x)$  et  $f(y)$  est minorée par  $(1 - n2^n3^{-lm}) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Or ceci garantit que pour tout couple  $x, y$  de sommets de  $H_n$  il existe un chemin de longueur inférieure à  $(2l + 13)d(x, y)$  entre  $f(x)$  et  $f(y)$  donc que  $D_+(f) \leq 2l + 13$ . Asymptotiquement, la distorsion est donc majorée par  $6l + 39$ .  $\square$

### 3 Le cas sous-critique : $\alpha > 1/2$

#### 3.1 Lemmes préliminaires

Pour démontrer le théorème 2., nous allons utiliser la notion de cycle géodésique.

##### 3.1.1 Contrôle de la longueur d'un cycle géodésique

**Définition 3.** *Un cycle géodésique dans un graphe est la donnée  $(C, p)$  d'un cycle  $C$  et d'un plongement isométrique  $p$  de ce cycle dans le graphe.*

*On pourra identifier selon le contexte un cycle géodésique à son support  $C$  ou à son image  $p(C)$ .*

On a la propriété immédiate suivante :

**Proposition 4.** *Le plongement d'un cycle géodésique étant isométrique, on peut considérer la distance sur ce cycle, sans préciser s'il s'agit du support ou de l'image.*

*Si  $C$  est un cycle géodésique de longueur  $l$  et de sommets  $v_0, \dots, v_l$ , on a  $\forall 0 \leq i \leq j \leq l$ ,  $d(v_i, v_j) = \min(j - i, l - (j - i))$*

**Lemme 3.** *Soit  $f$  une fonction de  $G$  dans  $H$  de distorsion  $D$ .*

*Si  $G$  a un cycle géodésique  $C$  de longueur  $l$  passant par un sommet  $v$ , alors il existe un cycle simple (i.e auto-évitant)  $C'$  de longueur  $l' \in [\frac{l}{8D}, lD]$  tel que  $f(v)$  soit au plus à une distance  $2D^2$  de  $C'$*

*Démonstration.* Rappelons que  $D(f) = D_+(f)/D_-(f)$  Soient  $v_0, v_1, \dots, v_l$  les sommets de  $C$  avec  $v_0 = v_l = v$ , et soit  $x_i = f(v_i)$ , pour  $i \in [0, l]$   $d(v_i, v_{i+1}) = 1$ , donc  $d(x_i, x_{i+1}) \leq D_+$ . Donc, pour tout  $i \in [1, l]$  il existe un chemin simple de longueur au plus  $D_+$  entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , que l'on appellera l'arc  $(x_i, x_{i+1})$ . En mettant bout à bout les arcs, on obtient donc un cycle de longueur au plus  $lD_+ \leq lD$  passant par tous les  $x_i$ .

Les arcs sont des chemins simples, mais le cycle peut ne pas être simple. On va donc extraire un cycle simple de ce cycle. Tout d'abord étudions les cas où il peut y avoir des boucles. Supposons qu'un sommet  $u$  apparaisse deux fois dans le cycle. Les arcs sont simples, donc il apparaît dans deux arcs différents,  $(x_i, x_{i+1})$  et  $(x_j, x_{j+1})$  avec  $j \geq i + 1$ .

Il existe un arc de longueur au plus  $2D_+$  reliant  $x_i$  à  $x_j$ . Or  $d(x_i, x_j) \geq D_- d(v_i, v_j)$ , donc  $d(v_i, v_j) \leq 2D_+/D_- = 2D$ . D'après la proposition 4, il existe deux cas possibles :  $d(v_i, v_j) = j - i$  ou  $d(v_i, v_j) = l - j + i$ . En notant  $(\widehat{x_j, x_{i+1}})$  (respectivement  $(\widehat{x_i, x_{j+1}})$ ) l'arc reliant  $x_j$  à  $x_{i+1}$  (respectivement  $x_i$  à  $x_{j+1}$ ) en passant par  $u$ , on appelle le cycle  $(\widehat{x_j, x_{i+1}})(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots (x_{j-1}, x_j)$  dans le premier cas et le cycle  $(\widehat{x_i, x_{j+1}})(x_{j+1}, x_{j+2}) \dots (x_{i-1}, x_i)$  dans le deuxième cas, le cycle associé au triplet  $(u, i, j)$ .

On considère maintenant l'ensemble de tels triplets  $(u, i, j)$ , et on enlève successivement le cycle associé au triplet tels que  $d(i, j)$  est maximal, puis le triplet restant (i.e tel que  $x_i$  et  $x_j$  n'aient pas été enlevés à une étape précédente) le plus long (au sens de la distance  $d(i, j)$ ), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un cycle simple. Remarquons tout d'abord que si le cycle associé au triplet  $(u, i, j)$  a été enlevé, alors  $u$  sera présent à la fin de la procédure. En effet, si  $u$  a été enlevé, cela signifie que l'on a enlevé un cycle associé à  $(u', i', j')$  qui contient  $u$  avec  $u \neq u'$ , ce qui implique  $d(i', j') > d(i, j)$ , ce qui est contradictoire avec le choix des cycles par maximalité de leur longueur  $d(x_i, x_j)$ .

Soit  $u$  un sommet tel qu'il existe un triplet  $(u, i_0, j_0)$  dont le cycle associé a été effacé. Majorons le nombre de sommets de la forme  $x_k$  qui ont été effacés sur l'ensemble des boucles de la forme  $(u, i, j)$ . Soit  $x_k$  un tel sommet. Il appartient à un cycle associé à  $(u, i, j)$ , avec  $d(v_i, v_j) \leq 2D$ , donc  $d(v_i, v_k) \leq 2D$ . De plus  $d(v_i, v_{i_0}) \leq 2D$ , donc  $d(v_k, v_{i_0}) \leq 4D$ .  $i_0 - 4D \leq k \leq i + 4D$ . Donc il y a au plus  $8D + 1$  sommets de la forme  $x_k$  enlevés. En notant  $A$  le nombre de tels sommets  $u$  et  $B$  le nombre de sommets de la forme  $x_i$  non affecté par la procédure, on a  $8D|A| + |B| \geq l$ , donc  $|A| + |B| \geq \frac{l}{8D}$ . Il reste donc au moins  $\frac{l}{8D}$  dans le cycle obtenu à la fin.

Enfin, pour montrer le dernier résultat, si le sommet  $x_0 = f(v)$  n'est pas dans le cycle obtenu, il est dans une boucle enlevée qui passe par un  $u$ , qui a une longueur au plus  $2DD_+$ , car il est constitué de au plus  $2D$  arcs (de la forme  $(x_l, x_{l+1})$ ) de longueur au plus  $D_+$ , donc à une distance au plus  $2DD_+ \leq 2D^2$  de ce  $u$ .  $\square$

### 3.1.2 Rareté des cycles géodésiques

**Lemme 4.** Soient  $p = n^{-\alpha}$  avec  $\alpha > 1/2$ , et  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 2\alpha - 1$  et  $v$  un sommet.

Alors, pour  $n$  assez grand, la probabilité que  $v$  soit inclus dans un cycle simple ouvert de  $H_{n,p}$  de longueur  $2l \in [2n^\beta, 2n^\gamma]$  est inférieure ou égale à  $n^{1+n^\beta(\beta+1-2\alpha)}$ ; De plus, la probabilité que  $v$  soit à une distance au plus  $\delta$  d'un tel cycle est inférieure ou égale à  $n^{\delta+1+n^\beta(\beta+1-2\alpha)}$ .

*Démonstration.* Majorons le nombre de cycles de  $H_n$  de longueur  $2l$  passant par  $v$ . Soit  $C_l$  l'ensemble des cycles de  $H_n$  de longueur  $2l$ . On considère l'ensemble  $E_l$  des partitions de  $[1; 2l]$  en parties de deux éléments.

$$|E_l| = (2l - 1)(2l - 3)\dots 3 \times 1 = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

On notera  $\varphi(l) = |E_l|$ .

En effet, choisir une telle partition revient à choisir l'élément qui est dans la même partie que 1 ( $2l - 1$  choix possibles), puis l'élément qui est dans la même paire que le plus petit élément restant ( $2l - 3$  choix possibles) et ainsi de suite, d'où la formule. Un élément de  $C_l$  fait un nombre pair de mouvements selon chaque coordonnée, on peut donc regrouper les mouvements par paires, en mettant ensemble les mouvements selon une même coordonnée. En choisissant un tel regroupement en paires (non unique s'il existe une coordonnée le long de laquelle il y a plus de 2 mouvements), on peut donc injecter  $C_l$  dans  $E_l \times [1, n]^l$  (on met d'abord le regroupement en paires, puis la coordonnée le long de laquelle a eu lieu le mouvement), donc  $|C_l| \leq \varphi(l)n^l$

La probabilité qu'un cycle donné de longueur  $2l$  soit ouvert est  $p^{2l}$ , donc la probabilité qu'un des cycles de  $C_l$  soit ouvert est inférieure à  $|C_l|p^{2l}$ .

**Lemme 5.**

$$\varphi(l) \leq n^n$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \ln(\varphi(l)) &= \sum_{k=1}^n \ln(2k - 1) \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(2k - 1) \\ &\leq n \ln \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (2k - 1) \right) \text{ (par concavité de } \ln) \\ &= n \ln(n) \end{aligned}$$

D'où  $\varphi(l) \leq n^n$  □

La probabilité  $p(v)$  qu'un cycle de longueur  $2l \in [2n^\beta, 2n^\gamma]$  passe par  $v$  est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} \sum_{l=n^\beta}^{n^\gamma} |C_l| n^{-2\alpha l} &\leq \sum_{l=n^\beta}^{n^\gamma} n^{-2\alpha l} n^l \varphi(l) \\ &= \sum_{l=n^\beta}^{n^\gamma} (n^{1-2\alpha})^l \varphi(l) \end{aligned}$$

$\gamma \leq 2\alpha - 1$ , donc il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $n^\gamma < \frac{1}{2}n^{2\alpha-1}$ .

On choisit un tel  $n > n_0 \geq 1$ . Alors pour  $n^\beta \leq l \leq n^\gamma < \frac{1}{2}n^{2\alpha-1}$ , le terme de la somme est décroissant en  $l$ , donc inférieur au terme évalué en  $n^\beta$ . On peut donc majorer la probabilité recherchée par :

$$\begin{aligned} \sum_{l=n^\beta}^{n^\gamma} (n^{1-2\alpha})^l \varphi(l) &\leq (n^\gamma - n^\beta + 1)(n^{1-2\alpha})^{n^\beta} \varphi(n^\beta) \\ &\leq n(n^{1-2\alpha})^{n^\beta} (n^\beta)^{n^\beta} \text{ (d'après le lemme 5.)} \\ &= n^{1+n^\beta(\beta+1-2\alpha)} \end{aligned}$$

Enfin le nombre de sommets à une distance au plus  $\delta$  est inférieur ou égal à  $n^\delta$ , donc la probabilité que  $v$  soit à distance au plus  $\delta$  d'un cycle de longueur  $2l \in [2n^\beta, 2n^\gamma]$  est majorée par  $n^{\delta+1+n^\beta(\beta+1-2\alpha)}$   $\square$

### 3.2 Démonstration du théorème 2.

**Lemme 6.** Soient  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$   $N$  événements. On considère la variable aléatoire  $X$  correspondant au nombre de ces événements qui sont réalisés, i.e.

$$X = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_i})$$

Alors  $\mathbb{P}(X \geq p) \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\Omega_i)$ .

Si de plus il existe  $C$  tel que  $\forall i \mathbb{P}(\Omega_i) \leq C$ , alors  $\mathbb{P}(X \geq p) \leq \frac{NC}{p}$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\Omega_i) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_i}) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\Omega_i}\right) \\ &= \mathbb{E}(X) \\ &\geq p\mathbb{P}(X \geq p) \end{aligned}$$

Le deuxième résultat découle directement du premier.  $\square$

Démontrons maintenant le théorème voulu.

Soient  $\beta, \gamma$  et  $\epsilon$  trois constantes positives telles que  $\beta + \gamma < 2\alpha - 1$  et  $\gamma > 3\beta + \epsilon$ , i.e.

$$\beta < \frac{2\alpha - 1}{4} \text{ et par exemple } \gamma = \frac{3}{4}(2\alpha - 1) \text{ et } \epsilon = \frac{1}{2}(\beta - 3\gamma)$$

On suppose qu'il existe une fonction  $f$  de  $H_n$  dans  $H_{n,p}$  de distorsion inférieure ou égale à  $n^\beta$ . Cela implique que des sommets à distance supérieure à  $n^\beta$  ont des images distinctes (sinon  $D_- < n^{-\beta}$  et donc  $D = \frac{D_+}{D_-} < 1/n^{-\beta}$ ).

Il y a au plus  $n^{n^\beta}$  sommets à distance inférieure ou égale à  $n^\beta$  d'un sommet donné, donc le cardinal de l'image de  $f$  vaut au moins  $2^n n^{-n^\beta}$ . Chaque sommet  $v$  de  $H_n$  appartient à un cycle simple de  $H_n$  de longueur  $2\lfloor n^\gamma \rfloor$  (en effet,  $n^\gamma \leq n$ , on peut prendre par exemple le cycle qui part de  $v$ , puis qui change la première coordonnée, puis la deuxième, ... puis la  $\lfloor n^\gamma \rfloor$ -ème puis la première, puis la deuxième, ..., puis la  $\lfloor n^\gamma \rfloor$ -ème). D'après le lemme 3., on sait qu'alors chaque sommet de l'image de  $f$  est à distance au plus  $2n^{2\beta}$  d'un cycle de longueur  $2l' \in [2/8\lfloor 2n^\gamma \rfloor n^{-\beta}, 2\lfloor n^\gamma \rfloor n^\beta] \subseteq [2n^{\gamma-\beta-\epsilon}, 2n^{\gamma+\beta}]$  pour  $n$  assez grand. Le lemme 4. majore la probabilité qu'un sommet ait cette propriété, donc d'après le lemme 6. la probabilité qu'au moins  $2^n n^{-n^\beta}$  soient à au plus  $2n^{2\beta}$  est majorée par :

$$\frac{2^n n^{2n^{2\beta}+1+n^{\gamma-\beta-\epsilon}(\gamma-\beta-\epsilon+1-2\alpha)}}{2^n n^{n^{-\beta}}} = n^{2n^{2\beta}+n^\beta+1+(\gamma-\beta-\epsilon+1-2\alpha)n^{\gamma-\beta-\epsilon}}$$

Le terme dominant de l'exposant est  $n^{\gamma-\beta}$  avec un coefficient négatif, donc la probabilité tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .  $\square$

## 4 Une exploration numérique de résultats voisins

Les deux théorèmes qui ont été démontrés décrivent le comportement de la distorsion de la métrique sur l'hypercube. Leur démonstration ouvre d'autres pistes de réflexion, notamment sur les points suivants :

- Quelles sont les constantes optimales dans les théorèmes 1. et 2. ?
- Que se passe-t-il quand  $\alpha = 1/2$  ?
- Quelle influence la percolation a-t-elle sur la connexité de l'hypercube, *i.e.* quel est le comportement asymptotique de la probabilité que l'hypercube percolé soit un graphe connexe ?
- Que se passe-t-il pour la distorsion de l'identité ?

Pour obtenir des indices pour la réponse à certaines de ces questions, nous avons réalisé un programme en Objective Caml dont les sources sont présentées en annexe. Ci-dessous sont représentés des graphes synthétisant les résultats obtenus quant à la probabilité que l'hypercube percolé soit connexe en fonction de  $n$  et  $p$  et quant à la distorsion de l'identité.

### 4.1 Probabilité qu'un graphe percolé soit connexe

#### 4.1.1 Échelle linéaire

Ci-dessous la probabilité que le graphe percolé soit connexe en fonction de  $p$  pour  $n = 5, 6, 7$ .

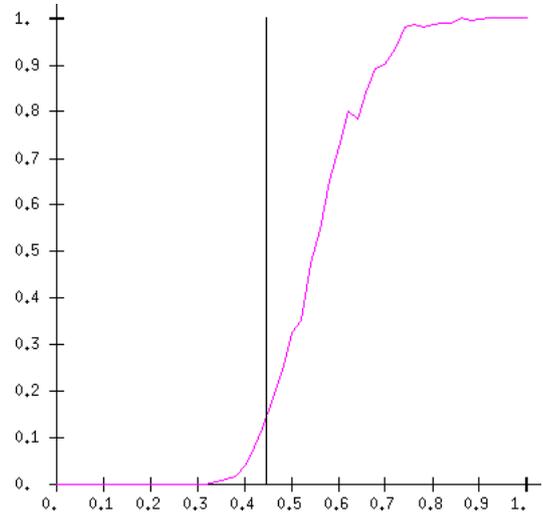


FIG. 1 –  $n = 5$ , moyenne sur 500 valeurs, pas de 0.02

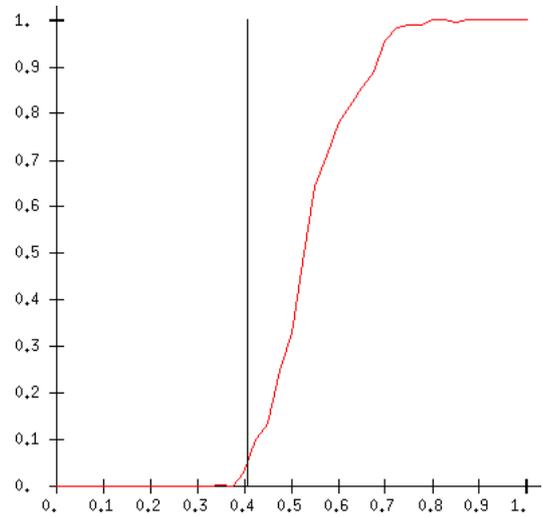


FIG. 2 –  $n = 6$ , moyenne sur 200 valeurs, pas de 0.025

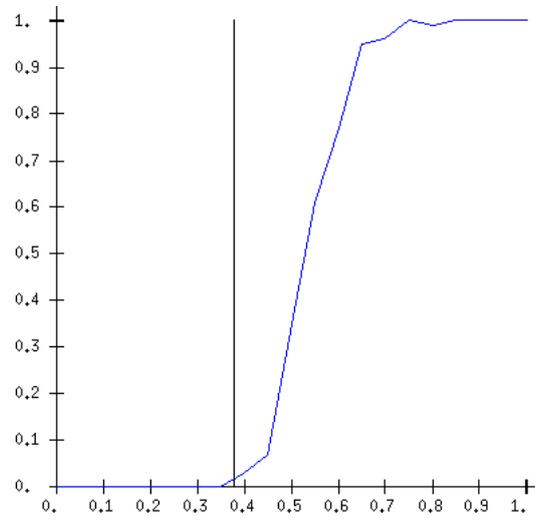


FIG. 3 –  $n = 7$ , moyenne sur 100 valeurs, pas de 0.05

#### 4.1.2 Échelle logarithmique

Ci-dessous la probabilité que  $H_{n,p}$  soit connexe en fonction d' $\alpha$  pour  $n = 5, 6, 7$ . La droite verticale est la droite d'équation  $\alpha = 1/2$ .

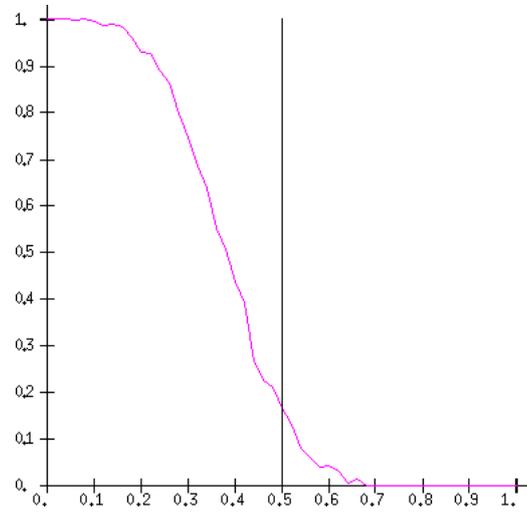


FIG. 4 –  $n = 5$ , moyenne sur 500 valeurs, pas de 0.02

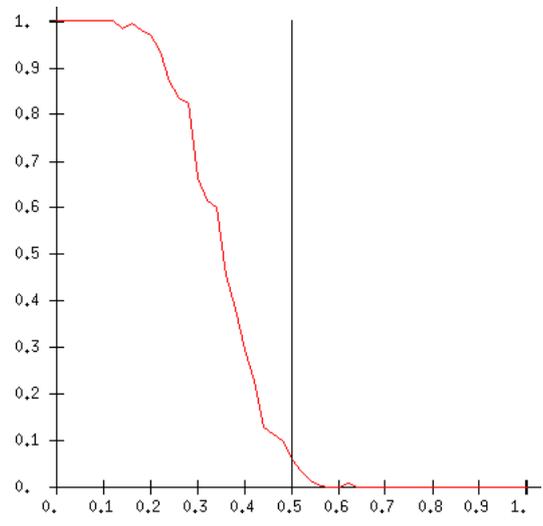


FIG. 5 –  $n = 6$ , moyenne sur 200 valeurs, pas de 0.02

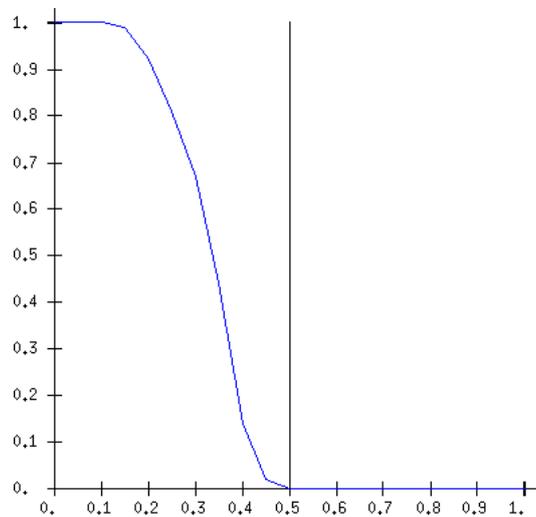


FIG. 6 –  $n = 7$ , moyenne sur 100 valeurs, pas de 0.05

## 5 Remerciements

Nous tenons à remercier Philippe Marchal pour son aide et sa disponibilité, ainsi que les membres du jury, Olivier Glass et David Madore.

## A Sources Caml des programmes

### A.1 Opérations sur les listes, comparaison d'éléments

`conc` concatène un élément à une liste, `conclist` concatène deux listes.

```
let conc a l = a::l ;;

let rec conclist a b =
match a with
  [] -> b
  |c :: d -> conclist d (c :: b) ;;
```

---

miroir  $l$  renverse l'ordre des éléments de la liste  $l$ .

```
let miroir l = conclist l [];;
```

---

`enleve a l` enlève l'élément  $a$  de la liste  $l$ .

```
let rec enleve a l =
match l with
  [] -> []
  |b :: m -> if b = a then enleve a m else b :: (enleve a m) ;;
```

---

`copy_list h` renvoie une liste contenant les mêmes éléments que  $h$ . Attention, l'ordre des éléments est inversé.

```
let copy_list h =
let rec aux a b =
match a with
  [] -> b
  |c :: d -> aux d (c :: b) ;
in
aux h [] ;;
```

---

On construit les fonctions `inf` et `sup` (de deux éléments). Notons qu'elles sont polymorphes. `comparaison` sera utilisée dans le calcul de la distorsion d'une fonction.

```

let inf a b = if a < b then a else b ;;

let sup a b = if a > b then a else b ;;

let comparaison (a,b) (c,d) = ((sup a c),(inf b d)) ;;

```

---

intofbool convertit les booléens TRUE et FALSE en respectivement 1 et 0.

```

let intofbool a =
if a then 1 else 0 ;;

```

---

puiss  $a$   $b$  calcule par exponentiation rapide  $a^b$  (pour des entiers).

```

let rec puiss a b =
match b with
0 -> 1
|_ -> let c = (puiss a (b/2)) in if b mod 2 = 1 then a*c*c
      else c*c ;;

```

## A.2 Construction de l'hypercube, des arêtes, indexation des sommets

hypercube  $n$  renvoie la liste des sommets de l'hypercube de dimension  $n$ . La construction est récursive.

```

let rec hypercube n =
match n with
1 -> [[0];[1]]
|m -> let h = hypercube (m-1) in
      conclist (map (conc 1) h) (map (conc 0) h) ;;

```

---

aretes  $n$  renvoie l'ensemble des arêtes de l'hypercube de dimension  $n$ . Les arêtes sont représentées par des couples de vecteurs. La construction est récursive. On fait appel à deux fonctions auxiliaires, l'une (aux1  $k$   $l$ ) construisant la liste des arêtes issues de  $k$  comprenant un élément de la liste  $l$ , l'autre (aux2  $h$ ) construisant à l'aide d'aux1 la liste des arêtes à extrémités dans la liste  $h$ .

```

let aretes n =
let rec aux1 k l =
match l with
  [] -> []
  |c :: d -> if distance k c = 1 then ((k,c) :: (aux1 k d))
             else aux1 k d;
in
let rec aux2 h =
match h with
  [] -> []
  |k :: l -> conclist (aux1 k l) (aux2 l);
in
aux2 (hypercube n) ;;

```

---

percolation  $l$   $p$  conserve chaque élément de la liste  $l$  avec probabilité  $p$  (on utilise la bibliothèque Random).

```

let rec percolation l p =
match l with
  [] -> []
  |a :: b -> if (Random.float 1.0) > p then percolation b p
             else (a :: (percolation b p)) ;;

```

---

voisins  $a$   $b$  renvoie les voisins du point  $a$  étant donnée la liste d'arêtes  $b$ .

```

let rec voisins a b =
match b with
  [] -> []
  |(c,d) :: e -> if a = c then d :: (voisins a e)
                 else if a = d then c :: (voisins a e)
                 else voisins a e ;;

```

---

int\_of\_sommet  $u$  renvoie l'entier correspondant au sommet  $u$  (*i.e.* l'entier dont l'écriture en base 2 est la suite des composantes du vecteur  $u$ ). Cette fonction est utilisée pour indexer les sommets de l'hypercube par  $[0, 2^n - 1]$ .

```

let rec int_of_sommet u =
match u with
  [] -> 0
  |a :: b -> a + 2*(int_of_sommet b);;

```

---

sommet\_of\_int  $k$   $n$  renvoie le sommet correspondant à l'entier  $k$  en dimension  $n$ .

```
let sommet_of_int k n =
let rec aux l m =
match m with
  0 -> []
  |_ -> if l < (puiss 2 (m-1)) then 0 :: (aux l (m-1))
        else 1 :: (aux (l - (puiss 2 (m-1))) (m-1));
in
miroir (aux k n);;
```

---

aretes\_num  $n$  renvoie la liste des indices des arêtes de l'hypercube  $H_n$ .

```
let aretes_num n =
let rec aux l =
match l with
  [] -> []
  |(a,b) :: c -> ((int_of_sommet a),(int_of_sommet b)) :: (aux c);
in
aux (aretes n);;
```

### A.3 Calcul des distances, des distorsions, ...

distance  $a$   $b$  donne la distance de Hamming (*i.e.* la distance dans  $H_n$ ) entre les vecteurs  $a$  et  $b$ .

```
let rec distance a b =
match (a,b) with
  ([],[ ]) -> 0
  |((c :: d) , (e :: f)) -> 1 - (intofbool (c = e)) + distance d f
  |_ -> -1 ;;
```

---

mult  $m1$   $m2$   $k$  renvoie le produit des deux matrices de booléens  $k \times k$   $m1$  et  $m2$ . Le code est écrit de manière à exploiter l'évaluation paresseuse des booléens.

```
let mult m1 m2 k =
let prod = Array.make_matrix k k false in
for i = 0 to (k-1) do
```

```

for j = 0 to (k-1) do
  let pr = ref false in
  for m = 0 to (k-1) do
    pr := !pr || (m1.(i).(m) && m2.(m).(j))
  done;
  prod.(i).(j) <- !pr
done;
done;
prod;;

```

---

init\_matrice *matr l* change en TRUE les valeurs des éléments de matrice de *matr* qui correspondent aux extrémités des indices d'arêtes de la liste *l*.

```

let rec init_matrice matr l =
match l with
[] -> ()
|(i,j) :: k ->
begin
  matr.(i).(j) <- true;
  matr.(j).(i) <- true;
  init_matrice matr k;
end;;

```

---

On construit la matrice booléenne identité  $n \times n$ .

```

let id n =
  let matr = Array.make_matrix n n false in
  for i = 0 to (n-1) do matr.(i).(i) <- true done;
matr;;

```

---

remplir *a b c* met l'entier *b* dans chaque élément  $a_{i,j}$  pour lequel  $a_{i,j} = 0$  et  $c_{i,j} = \text{TRUE}$ .

```

let remplir a b c dim=
  for i = 1 to (dim-1) do
  for j = 0 to (i-1) do
    if c.(i).(j) then if a.(i).(j) = 0
    then a.(i).(j) <- b
  done;
done;;

```

---

rempli  $m$   $dim$  teste si la matrice symétrique  $dim \times dim$   $m$  est remplie, *i.e.* si tous ses éléments non diagonaux sont strictement positifs.

```

let rempli m dim =
let i = ref 1 and j = ref 0 in
  while (!i < dim) && (m.(!i).(j) > 0) do
    while (!j < !i) && (m.(!i).(j) > 0) do
      j := !j + 1
    done;
    i := !i + 1
  done;
if (!i = dim) && (!j = dim-1) then true else false;;

```

---

table\_distance  $n$   $p$  renvoie une matrice  $M$  dont l'élément  $M_{i,j}$  est la distance dans une réalisation de  $H_{n,p}$  des sommets d'indices  $i$  et  $j$ . Pour ce faire, on utilise la matrice  $m$  dont les composantes sont vraies sur la diagonale et si les sommets correspondant aux indices de la composante sont reliés par une arête. On remarque que les composantes de valeur TRUE de  $m^k$  sont les indices des couples de sommets reliés par un chemin de longueur  $k$  ou moins dans  $H_{n,p}$ , ce qui est la base de l'algorithme présenté ci-dessous.

```

let table_distance n p =
let dim = puiss 2 n in
  let tab = Array.make_matrix dim dim 0 in
  let m = id dim in
    init_matrice m (percolation (aretes_num n) p);
  let m1 = ref m in
  let m2 = ref (mult m m dim) in
  let matrice_pleine = ref (Array.make_matrix dim dim true) in
  let i = ref 1 in
  while (!m1 <> !m2) && (!m2 <> !matrice_pleine) do
    remplir tab !i !m1 dim;
    i := !i + 1;
    m2 := !m1;
    m1 := mult !m1 m dim
  done;
tab;;

```

---

distorsion\_num  $n$   $p$  renvoie la distorsion de l'identité pour une réalisation de la percolation de paramètre  $p$  dans  $H_n$ . Remarquons qu'on utilise la table des distances construite avec la fonction précédente. L'algorithme ne fait que traduire directement la définition de la distorsion d'une application.

```

let distorsion_num n p =
  let dim = puiss 2 n in
  let tab = table_distance n p in
  let dmin = ref (65536.*.1024.) and dmax = ref 1. in
  for i = 1 to (dim-1) do
    for j = 0 to (i-1) do
      let e = (float_of_int (tab.(i).(j))) /.
        (float_of_int (distance_num i j n)) in
      if e > !dmax then dmax := e
      else if e < !dmin then dmin := e;
    done;
  done;
!dmax /. !dmin;;

```

---

`distorsion_num_moy n p k` renvoie la moyenne de  $k$  valeurs de la distorsion de l'identité pour la réalisation d'une percolation de paramètre  $p$  sur  $H_n$ , en considérant uniquement les cas où la distorsion est finie (*i.e.* où  $H_{n,p}$  est connexe).

```

let distorsion_num_moy n p k =
  let i = ref 0 and somme = ref 0. in
  while !i < k do
    let d = distorsion_num n p in
    if d < infinity then
      begin
        somme := !somme +. d;
        i := !i + 1
      end;
  done;
!somme /. (float_of_int k) ;;

```

---

`proportion_connexe n p k` renvoie la proportion d'hypercubes de dimension  $n$  qui restent connexes après percolation sur  $k$  tirages.

```

let proportion_connexe n p k =
  let somme = ref 0 in
  for i = 1 to k do
    if rempli (table_distance n p) (puiss 2 n)
    then somme := !somme + 1
  done;
(float_of_int !somme) /. (float_of_int k);;

```

dessiner\_repere () dessine dans une fenêtre graphique un repère ortho-normé de 350 pixels sur 350.

```

let dessiner_repere ()=
begin
  Graphics.moveto 50 50;
  Graphics.lineto 50 410;
  Graphics.moveto 50 50;
  Graphics.lineto 410 50;
  Graphics.moveto 45 400;
  Graphics.lineto 55 400;
  Graphics.moveto 400 45;
  Graphics.lineto 400 55;
  let abscisse = ref 0. in
  for i = 0 to 10 do
    let abs = 50 + int_of_float (!abscisse*.350.) in
    Graphics.moveto abs 45;
    Graphics.lineto abs 55;
    Graphics.moveto (abs - 10) 30;
    Graphics.draw_string (string_of_float !abscisse);
    abscisse := !abscisse +. 0.1;
  done;
  let ordonnee = ref 0. in
  for i = 0 to 10 do
    let ord = 50 + int_of_float (!ordonnee*.350.) in
    Graphics.moveto 45 ord;
    Graphics.lineto 55 ord;
    Graphics.moveto 20 (ord-5);
    Graphics.draw_string (string_of_float !ordonnee);
    ordonnee := !ordonnee +. 0.1;
  done;
end;;

```

---

graphe\_prop\_connexe *n k pmax pas nombre* calcule les coordonnées des points d'un graphique représentant la proportion de réalisations connexes de la percolation de paramètre  $pmax - i \times pas$  de l'hypercube  $H_n$  pour  $i$  allant de 1 à *nombre*.

```

let graphe_prop_connexe n k pmax pas nombre =
let r = Array.make nombre (0,0) in
for i = 0 to (nombre - 1) do
  let foobar = (pmax -. (float_of_int i)*.pas) in
  r.(i) <- (50 + (int_of_float (foobar*.350.))),

```

```

    50 + (int_of_float ((proportion_connexe n foobar k)*.350.)))
done;
r;;

```

---

dessiner\_connexe produit une représentation du graphique calculé par la fonction précédente, dans la couleur passée en paramètre, et dessine un trait vertical dont l'abscisse est le paramètre critique  $n^{-1/2} = 1/\sqrt{n}$

```

let dessiner_connexe n k pmax pas nombre couleur=
Graphics.clear_graph ();
Graphics.set_color Graphics.black;
dessiner_repere ();
Graphics.set_color couleur;
Graphics.draw_poly_line (graphe_prop_connexe n k pmax pas nombre);
Graphics.set_color Graphics.black;
let racine = 1. /. (sqrt (float_of_int n)) in
Graphics.moveto (50 + int_of_float (racine*.350.)) 50;
Graphics.lineto (50 + int_of_float (racine*.350.)) 400;;

```