

# Urnes aléatoires

Vincent Brault et Bastien Mallein

9 novembre 2009

Les urnes aléatoires ont été étudiées de nombreuses fois depuis l'émergence de la théorie des probabilités, par exemple par Jacob Bernoulli et Laplace. Ces objets sont définis ainsi : on considère une urne contenant des boules noires et blanches, on étudie l'évolution de sa composition lorsqu'on lui applique la règle suivante : à chaque étape, on tire une boule au hasard, et selon sa couleur, on ajoute un certain nombre de boules prédéterminé à l'urne. On cherche alors à déterminer comment évoluent les populations de boules de chaque couleur. Plus tard, Pólya, Ehrenfest ou Friedman, par exemple, ont étudié de telles urnes, certaines d'entre elles servant à modéliser des systèmes dynamiques : contagion d'une population pour l'urne de Pólya, mélange moléculaire d'un gaz pour Ehrenfest...

Dans le présent exposé, nous nous attacherons à développer des outils généraux d'analyse permettant la résolution de certaines classes d'urnes, pour lesquelles les méthodes probabilistes montrent des limites. Les deux classes d'urnes que nous étudierons ici sont les urnes semi-sacrificielles et les urnes triangulaires. Les résultats exposés par la suite illustreront la variété des phénomènes de convergence pouvant se produire dans les urnes aléatoires.

Les auteurs remercient Philippe Marchal pour son soutien tout au long de la rédaction de ce mémoire, ainsi que Philippe Flajolet qui a aimablement répondu à leurs questions.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur les urnes</b>	<b>3</b>
2.1	Définition du modèle . . . . .	3
2.2	Outils mathématiques . . . . .	4
2.2.1	Série génératrice . . . . .	4
2.2.2	Opérateur différentiel . . . . .	6
2.2.3	Système différentiel . . . . .	7
2.2.4	Exemple de l'urne d'Ehrenfest $[-1,1,1,-1]$ . . . . .	8
2.3	Premier exemple complet : l'urne de Pólya . . . . .	8
2.4	Deuxième exemple : l'urne record . . . . .	10
2.4.1	L'exemple par les éléments que nous avons mis en place . . . . .	10
2.4.2	Performance du système . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Solution générale pour les urnes sacrificielles</b>	<b>12</b>
3.1	Intégration du système différentiel . . . . .	12
3.2	Quantités homogènes . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Urnés semi-sacrificielles</b>	<b>15</b>
4.1	Propriétés analytiques des fonctions de base . . . . .	15
4.2	Propriétés probabilistes des urnes semi-sacrificielles . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Urnés triangulaires</b>	<b>21</b>
5.1	Résultats de la théorie des martingales . . . . .	21
5.2	Fonctions génératrices . . . . .	22
5.3	Loi de $d$ . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

# 1 Introduction

De nombreuses urnes aléatoires peuvent être étudiées simplement grâce aux outils de théorie des probabilités comme les martingales. Mais dans certains cas, notamment lorsqu'on autorise à enlever des boules, ces outils deviennent difficiles à utiliser. Il est alors utile de passer par de l'analyse et du dénombrement pour obtenir des résultats. Dans d'autres cas, alors que les probabilités donnent un ordre de grandeur, l'utilisation de résultats d'analyse permet d'obtenir un résultat très fort de convergence.

L'article de départ pour cet exposé est [1].

## 2 Généralités sur les urnes

### 2.1 Définition du modèle

**Définition 1.** On notera l'urne aléatoire évoluant de la manière suivante : à chaque tour si on a pioché une boule blanche, on ajoute  $\alpha$  boules blanches et  $\beta$  boules noires, sinon, on en ajoute  $\gamma$  blanches et  $\delta$  noires des deux manières équivalentes suivantes :

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \delta) \in \mathbb{Z}^2, (\beta, \gamma) \in \mathbb{N}^2.$$

Une telle urne est dite équilibrée si elle satisfait  $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \sigma$ ,  $\sigma$  est appelé la balance de l'urne.

Les urnes que nous étudierons ici seront équilibrées, c'est-à-dire que le nombre total de boules dans l'urne évolue de manière déterministe.

**Notations.** On notera  $a_0$  et  $b_0$  le nombre de boules blanches et noires présentes dans l'urne à l'instant initial,  $a_n$  et  $b_n$  les variables aléatoires correspondant au nombre après  $n$  itérations du processus. On notera enfin  $s_n = a_n + b_n = s_0 + n\sigma$  le nombre total de boules présentes dans l'urne à l'instant  $n$ .

**Exemple.** L'urne d'Ehrenfest, représentant le mixage moléculaire d'un gaz dans un récipient contenant deux chambres, séparées par une paroi, est symbolisée par l'urne  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . À l'instant  $n$ , on a  $a_n$  molécules de gaz dans la chambre de droite et  $b_n$  dans la chambre de gauche. À chaque instant, on choisit une molécule, qui traverse la paroi. On considérera la situation initiale d'un gaz entièrement contenu dans la première chambre, qui correspond à  $a_0 = N$ ,  $b_0 = 0$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = N$ .

On ne considérera par la suite que des urnes dont les conditions initiales et les règles sont agencées de telle manière que l'action définie soit toujours possible, par exemple qu'on ne puisse pas demander de retirer deux boules blanches, s'il n'y en a plus qu'une présente dans l'urne.

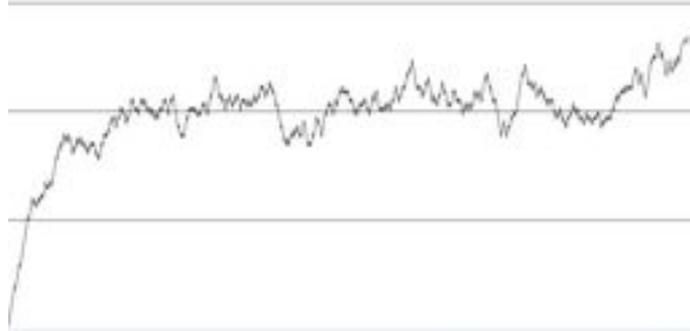


FIG. 1 – Nombre de boules noires au cours d’une simulation d’une urne d’Ehrenfest contenant 100 boules blanches au départ. Chaque trait horizontal représente 25 boules.

On peut vérifier que ces urnes sont celles qui vérifient les deux conditions suivantes :

- si  $\alpha < 0$ , alors  $\alpha$  divise  $\gamma$  et  $a_0$  ;
- si  $\delta < 0$ , alors  $\delta$  divise  $\beta$  et  $b_0$ .

## 2.2 Outils mathématiques

### 2.2.1 Série génératrice

**Définition 2.** On considère les quantités (dépendant de  $a_0$  et  $b_0$ )  $h_n$  et  $h_n(a, b)$  qui sont respectivement le nombre d’évolutions possibles de l’urne de longueur  $n$ , en considérant chaque boule comme numérotée, et le nombre de ces évolutions conduisant à  $a_n = a$  et  $b_n = b$ . Les séries génératrices associées à l’urne sont alors définies par

$$H(z) = \sum_n h_n \frac{z^n}{n!}$$

et

$$H(x, y, z) = \sum_{n,a,b} h_n(a, b) x^a y^b \frac{z^n}{n!}.$$

**Exemple.** Pour l’urne d’Ehrenfest, une histoire de longueur 6, en posant  $N = 4$  (on souligne la boule tirée) peut être :

$$\underline{b}b\underline{b}b \rightarrow \underline{b}b\underline{b}n \rightarrow n\underline{b}b\underline{n} \rightarrow \underline{n}b\underline{b}n \rightarrow \underline{b}b\underline{n}n \rightarrow \underline{b}n\underline{b}n \rightarrow n\underline{b}n\underline{b}.$$

Dans le cas général  $a_0 = N$  et  $b_0 = 0$ , on a  $h_n = N^n$ , car à chaque étape, on a  $N$  boules dans l’urne, donc  $N$  choix différents à chaque étape. La détermination de  $h_n(a, b)$  est plus délicate, mais on a par exemple :

- $N$  choix possibles au premier instant : on tire l’une des  $N$  boules blanches au hasard, qui conduisent toutes à une composition  $(N - 1, 1)$  de l’urne. Par conséquent on a  $h_1(N - 1, 1) = N$  ;

– on a ici deux possibilités : soit on tire une autre boule blanche ( $N - 1$  possibilités), soit on tire la boule noire. Ce qui donne au total  $N(N - 1)$  possibilités d'arriver à la composition  $(N - 2, N)$ , on écrit donc  $h_2(N, 0) = N$  et  $h_2(N - 2, 2) = N(N - 1)$  ;  
– on a  $h_3(N - 1, 1) = N^2 + 2N(N - 1)$  et  $h_3(N - 3, 3) = N(N - 1)(N - 2)$ .  
Pour donner une expression pour  $n \in \mathbb{N}$ , on essaiera de déterminer la série génératrice associée.

**Notation.** On notera  $[z^n]f$  le coefficient en  $z^n$  de la fonction analytique  $f$ . Par exemple, on aura  $[z^n]H(z) = h_n$  et  $[z^n]H(x, y, z) = \sum_{a,b} h_n(a, b)x^a y^b$ .

**Remarque.** On notera que la probabilité d'avoir  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires au temps  $n$  est  $\mathbb{P}(a_n = a, b_n = b) = \frac{h_n(a, b)}{h_n} = \frac{[x^a y^b z^n]H_n(x, y, z)}{[z^n]H(z)}$ .

La détermination des séries génératrices permet donc d'accéder à la loi de l'évolution de l'urne, par développement des fonctions en séries entières. Les outils que nous introduirons par la suite permettront de les déterminer.

**Proposition 1.** *Les fonctions définies précédemment admettent un rayon de convergence non-nul, et sont donc définies au voisinage de 0.*

– Si  $\sigma > 0$ , on a  $H(z) = \frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{s_0}{\sigma}}}$  et  $H(x, y, z)$  est analytique, pour  $R > 1$

sur des domaines du type  $|x| < R$ ,  $|y| < R$  et  $z < \frac{1}{\sigma R^\sigma}$ .

– Si  $\sigma = 0$ , on a  $H(z) = e^{s_0 z}$  et  $H(x, y, z)$  est analytique sur  $\mathbb{C}^3$ .

– Si  $\sigma < 0$ , on a  $H(z) = (1 - \sigma z)^{-\frac{s_0}{\sigma}}$ , et  $H(x, y, z)$  est un polynôme.

**Preuve :** On notera que la série génératrice  $H(z) = H(1, 1, z)$  est assez simple à déterminer pour une urne équilibrée, en effet, on sait que  $s_n = s_0 + n\sigma$ , par conséquent, on a  $h_n = \prod_{k=0}^{n-1} (s_0 + k\sigma)$  car à chaque étape, il y a  $s_0 + n\sigma$  choix possibles pour une boule.

– Si  $\sigma > 0$ , on a

$$h_n = \sigma^n \prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{s_0}{\sigma} + k \right).$$

On obtient alors le résultat remarquable suivant :

$$h_n = \sigma^n \frac{\Gamma(n + \frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}.$$

Par conséquent, on en tire

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{s_0}{\sigma}}}.$$

De plus, on a  $h_n(a, b) \leq h_n$ , donc pour  $R > 1$ ,  $|x| < R$  et  $|y| < R$  on a :

$$[z^n]H(x, y, z) \leq (s_0 + n\sigma)R^{s_0 + n\sigma} \sigma^n \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})\Gamma(n + 1)}.$$

Par conséquent, pour  $|z| < \frac{1}{\sigma R^\sigma}$ , la série converge.

- Si  $\sigma = 0$ , on a  $h_n = s_0^n$ , et par conséquent :

$$H(z) = e^{s_0 z}.$$

On a  $h_n(a, b) \leq h_n$ , donc pour  $R > 1$ ,  $|x| < R$  et  $|y| < R$  on a

$$[z^n]H(x, y, z) \leq s_0 R^{s_0} \frac{s_0^n}{n!}.$$

Donc la série converge pour  $z \in \mathbb{C}$ .

- Si  $\sigma < 0$ , la longueur totale des histoires est limitée par  $-\frac{s_0}{\sigma}$  car ensuite, on a vidé l'urne, on a :

$$H(z) = (1 - \sigma z)^{-\frac{s_0}{\sigma}}.$$

De plus  $H(x, y, z)$  est un polynôme.

□

### Remarque.

1. Les urnes considérées sont équilibrées, on sait donc que  $a_n + b_n = s_0 + n\sigma$ , ce qui se traduit par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= \sum_n \sum_a h_n(a, s_0 + n\sigma - a) x^a y^{s_0 + n\sigma - a} \frac{z^n}{n!} \\ &= y^{s_0} H\left(\frac{x}{y}, 1, zy^\sigma\right). \end{aligned}$$

On pourra donc simplifier les études ultérieures en considérant la fonction de deux variables  $H(x, z) = H(x, 1, z)$ .

2. On notera également que les dérivées partielles de  $H$  donnent des informations sur les moments de  $a_n$  et  $b_n$ . En effet, on a :

$$\partial_x H(x, 1, z) = \sum_{a, b, n} h_n(a, b) a x^{a-1} \frac{z^n}{n!}.$$

Par conséquent, on a :

$$\partial_x H(x, 1, z)|_{x=1} = \sum_n h_n \frac{z^n}{n!} \sum_{a, b} a \mathbb{P}(a_n = a, b_n = b).$$

On obtient donc

$$\partial_x H(x, 1, z)|_{x=1} = \sum_n h_n \frac{z^n}{n!} \mathbb{E}(a_n).$$

On obtient alors la formule suivante :

$$\mathbb{E}(a_n(a_n - 1) \dots (a_n - k + 1) b_n \dots (b_n - h + 1)) = \frac{[z^n](\partial_x^k \partial_y^h H(x, y, z))_{x, y=1, 1}}{[z^n]H(z)},$$

qui sera utilisée plusieurs fois par la suite.

### 2.2.2 Opérateur différentiel

On remarque que dans la série génératrice à trois variables, le monôme  $x^a y^b$  "représente" l'urne avec  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires. De plus, on a  $x \partial_x x^a y^b = a x^a y^b$ , c'est-à-dire l'urne précédente, multiplié par le nombre d'histoires différentes sélectionnant une boule de type  $a$ .

**Définition 3.** L'opérateur différentiel associé à l'urne  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  est

$$D = x^{\alpha+1}y^\beta\partial_x + x^\gamma y^{\delta+1}\partial_y$$

À l'"état"  $(a, b)$  de l'urne il associe  $a$  fois l'"état"  $(a + \alpha, b + \beta)$  et  $b$  fois l'"état"  $(a + \gamma, b + \delta)$ .

**Exemple.** L'opérateur associé à l'urne d'Ehrenfest est  $D = y\partial_x + x\partial_y$ .

**Remarque.** Le lien entre cet opérateur et les séries génératrices est le suivant : on a par récurrence  $D^n(x^{a_0}y^{b_0}) = \sum_{a,b} h_n(a, b)x^a y^b$ , par conséquent

$$H(x, y, z) = \sum_n D^n(x^{a_0}y^{b_0}) \frac{z^n}{n!} = e^{zD}(x^{a_0}y^{b_0}).$$

### 2.2.3 Système différentiel

**Définition 4.** À l'urne  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  on associe le système différentiel autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{\alpha+1}Y^\beta \\ \dot{Y} = X^\gamma Y^{\delta+1} \end{cases} .$$

**Théorème 1.** Soit une urne possédant à l'instant initial  $a_0$  boules blanches et  $b_0$  noires, si  $(X(t), Y(t))$  est la solution du système différentiel associé valant  $(x, y)$  à  $t = 0$  alors  $H(x, y, z) = X(z)^{a_0}Y(z)^{b_0}$  lorsque les quantités sont définies.

**Preuve :** On a

$$H(x, y, z) = \sum_n D^n(x^{a_0}y^{b_0}) \frac{z^n}{n!},$$

or

$$\partial_t(X(t)^{a_0}Y(t)^{b_0}) = D(x^{a_0}y^{b_0})(X(t), Y(t)).$$

Par conséquent, on a

$$H(X(t), Y(t), z) = \sum_n \partial_t^n(X(t)^{a_0}Y(t)^{b_0}) \frac{z^n}{n!}.$$

On suppose, grâce au théorème de Cauchy-Kovalevskaya que  $X$  et  $Y$  sont analytiques au voisinage de l'origine, on peut donc écrire, grâce à la formule de Taylor,

$$H(X(t), Y(t), z) = X(z+t)^{a_0}Y(z+t)^{b_0}.$$

D'où on tire

$$H(x, y, z) = X(z)^{a_0}Y(z)^{b_0}.$$

□

### 2.2.4 Exemple de l'urne d'Ehrenfest [-1,1,1,-1]

L'urne d'Ehrenfest a été introduite en 1907 pour illustrer certains paradoxes de la mécanique statistique naissante.

Le système différentiel associé à cette urne est

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = X \end{cases} ,$$

qui s'intègre en

$$\begin{cases} X(t) = xcht + yshc \\ Y(t) = xshc + ycht \end{cases} .$$

On obtient alors pour notre urne la série génératrice suivante :

$$H(x, y, z) = (xchz + yshz)^N .$$

On obtient  $h_n(N, 0) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (N - 2k)^n$ . Sachant que  $h_n = N^n$ , on en déduit que la probabilité pour que tout le gaz retourne dans la première moitié de la chambre au temps  $n$  est

$$\frac{1}{N^n 2^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (N - 2k)^n .$$

### 2.3 Premier exemple complet : l'urne de Pólya

On considère une population d'individus chez lesquels il existe deux versions d'un gène, A et B. Chaque individu possède l'un de ces allèles. On se demande comment va évoluer la proportion de personnes possédant l'allèle A. Ceci est l'interprétation la plus courante de l'urne que nous allons regarder maintenant : l'urne de Pólya.

Le principe de cette urne est très simple : quand on tire une boule, on en ajoute une de la même couleur. On la note donc  $[1, 0, 0, 1]$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

L'urne est équilibrée car  $\alpha + \beta = 1 = \gamma + \delta = \sigma = 1$ , par conséquent, on a

$$h_n = \frac{\Gamma(s_0 + n)}{\Gamma(s_0)} = n! \binom{s_0 + n - 1}{s_0 - 1} .$$

On résout ensuite le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = X^2 \\ \dot{Y} = Y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} X(0) = x \\ Y(0) = y \end{cases} .$$

Chaque membre est indépendant, on peut les résoudre ainsi :

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{X(t)} = t + C \Leftrightarrow X(t) = \frac{1}{-t - C} .$$

D'où on obtient :

$$\begin{cases} X(t) = \frac{x}{1 - xt} \\ Y(t) = \frac{y}{1 - yt} \end{cases} .$$

On en déduit l'expression de la fonction génératrice :

$$H(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-zx} \right)^{a_0} \left( \frac{y}{1-zy} \right)^{b_0}.$$

Calculer le développement en série entière n'est pas forcément aisé alors nous allons nous aider de l'opérateur différentiel. Ici, il vaut :  $D = x^2\partial_x + y^2\partial_y$ .

$$\begin{aligned} D(x^{a_0}y^{b_0}) &= a_0x^{a_0+1}y^{b_0} + b_0x^{a_0}y^{b_0+1} \\ &= x^{a_0}y^{b_0}(a_0x + b_0y) \\ &= 1! \binom{a_0}{a_0-1} \binom{b_0-1}{b_0-1} x^{a_0+1}y^{b_0} + \binom{a_0-1}{a_0-1} \binom{b_0}{b_0-1} x^{a_0}y^{b_0+1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on suppose

$$D^n(x^{a_0}y^{b_0}) = n! \sum_{i=0}^n \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} x^{a_0+i}y^{b_0+n-i}$$

$$\begin{aligned} D^{n+1}(x^{a_0}y^{b_0}) &= D(n! \sum_{i=0}^n \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} x^{a_0+i}y^{b_0+n-i}) \\ &= n! \sum_{i=0}^n \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} D(x^{a_0+i}y^{b_0+n-i}) \\ &= n! \sum_{i=0}^n \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} (a_0x^{a_0+i+1}y^{b_0+n-i} + b_0x^{a_0+i}y^{b_0+n+1-i}) \\ &= (n+1)! \sum_{i=0}^{n+1} \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} \frac{b_0}{n+1} \\ &\quad + \binom{a_0-2+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n+1-i)}{b_0-1} \frac{a_0}{n+1} x^{a_0+i}y^{b_0+n+1-i} \\ &= (n+1)! \sum_{i=0}^{n+1} \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n+1-i)}{b_0-1} x^{a_0+i}y^{b_0+n+1-i}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$D^n(x^{a_0}y^{b_0}) = n! \sum_{i=0}^n \binom{a_0-1+i}{a_0-1} \binom{b_0-1+(n-i)}{b_0-1} x^{a_0+i}y^{b_0+n-i}.$$

Ce qui permet de calculer les  $h_n(a, b)$ , sachant que  $D^n(x^{a_0}y^{b_0}) = \sum_{a,b} h_n(a, b)x^a y^b$  :

$$h_n(a, b) = \begin{cases} n! \binom{a-1}{a_0-1} \binom{b-1}{b_0-1} & \text{si } a_0 \leq a \leq a_0 + n \text{ et si } b = n - a + s_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, nous pouvons dire que

$$\mathbb{P}(A_n = a, B_n = b) = \begin{cases} \frac{\binom{a-1}{a_0-1} \binom{b-1}{b_0-1}}{\binom{n+s_0-1}{s_0-1}} & \text{si } a_0 \leq a \leq a_0 + n \text{ et si } b = n - a + s_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce résultat peut également être obtenu simplement par des méthodes directes, mais nous utilisons ici un raisonnement qui peut être reproduit assez mécaniquement.

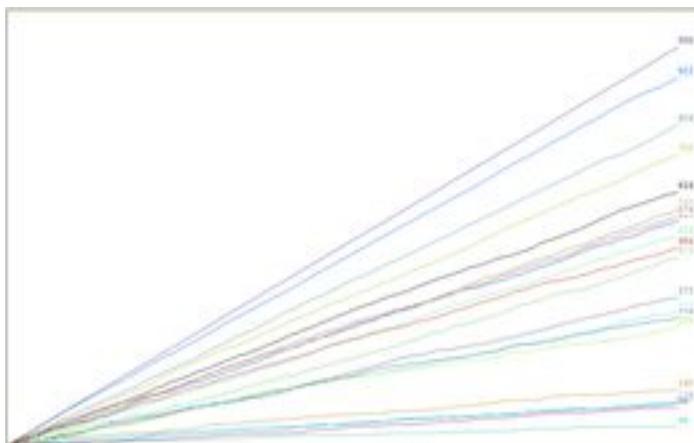


FIG. 2 – Nombre de boules noires au cours de 30 simulations d’une urne de Pólya contenant une boule de chaque couleur au départ.

## 2.4 Deuxième exemple : l’urne record

### 2.4.1 L’exemple par les éléments que nous avons mis en place

Nous allons aborder l’urne record où on ajoute toujours une boule blanche qu’importe celle que nous tirons. On la note  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut remarquer que cette urne est équilibrée :  $\alpha + \beta = 1 + 0 = \gamma + \delta = \sigma$ . On obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = X^2 \\ \dot{Y} = XY \end{cases} \quad \begin{cases} X(0) = x \\ Y(0) = y \end{cases} .$$

que l’on résout en :

$$\begin{cases} X(t) = \frac{x}{1-xt} \\ Y(t) = \frac{y}{1-xt} \end{cases} .$$

Ce qui donne la fonction génératrice suivante :

$$H(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-zx} \right)^{a_0} \left( \frac{y}{1-zx} \right)^{b_0} = \frac{x^{a_0} y^{b_0}}{(1-zx)^{s_0}} .$$

De plus, comme  $\sigma = 1 > 0$ , on a  $H(z) = \frac{1}{(1-z)^{s_0}}$ .

Nous supposons désormais que nous commençons avec une seule boule noire, donc  $a_0 = 0$  et  $s_0 = b_0 = 1$ . Ainsi, on a  $h_n = n!$  grâce à la proposition 1. De plus,

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= \frac{y}{1-zx} \\ &= y \frac{1}{1-zx} \\ &= y \sum_n (zx)^n \\ &= y \sum_n x^n n! \\ &= \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_n x^n y n! \frac{z^n}{n!} . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$h_n(a, b) = \begin{cases} n! & \text{si } a = n \quad b = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(a_n = a, b_n = b) = \begin{cases} \frac{n!}{n!} = 1 & \text{si } a = n \quad b = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Comme attendu (l'urne est déterministe).

### 2.4.2 Performance du système

Utiliser tous ces outils pour réussir à déterminer qu'à l'instant  $n$  on a  $n$  boules blanches et une boule noire semble disproportionné. On peut toutefois modifier notre résolution pour donner un résultat intéressant de combinatoire sur le nombre de records d'une permutation.

Soit  $\tau$  une permutation de  $n$  éléments. Nous appelons records de  $\tau$  tout entier  $j \in \{1 \dots n\}$  qui vérifie  $\forall i < j, \tau(i) < \tau(j)$ , c'est-à-dire que  $\tau(j)$  est plus grand que tous ses prédécesseurs.

Nous noterons  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  le nombre de permutation  $n$  ayant  $k$  record, il est également appelé le nombre de Stirling de première espèce.

On peut vérifier que les nombres de Stirling sont définies par la relation de récurrence : pour  $1 \leq k \leq n - 1$

$$\left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] - n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] ,$$

avec  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$  et  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1$ .

La série génératrice associée aux nombres de Stirling est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] w^k \right) \frac{z^n}{n!} = (1+z)^w .$$

On modifie légèrement le système différentiel associé à notre urne en y ajoutant une variable  $w$  qui "regarde quand on tire une boule noire". C'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{X} = X^2 \\ \dot{Y} = wXY \end{cases} \quad \begin{cases} X(0) = x \\ Y(0) = y \end{cases} .$$

On interprète l'histoire de l'urne ainsi. On suppose les boules blanches numérotées de  $n$  à 1. On place les boules blanches dans l'urne d'une manière particulière :

- si on tire une boule blanche, on place la nouvelle boule (blanche) juste à droite de celle-ci. Comme la suite des nombres portés par les boules blanches décroît, cette nouvelle boule n'est pas un record ;
- si on tire la boule noire, on place la boule blanche en première position, elle sera un nouveau record puisque toutes les autres boules ajoutées auront un nombre plus petit.

On lit enfin la permutation obtenue au temps  $n$  de gauche à droite. Lorsque l'on résout le système, on obtient :

$$\begin{cases} X(t) = \frac{x}{1-xt} \\ Y(t) = \frac{y}{(1-xt)^w} \end{cases} .$$

Ainsi, la fonction génératrice avec une boule noire et aucune boule blanche au début devient :

$$H(x, y, z) = \frac{y}{(1-zx)^w} .$$

Le coefficient en  $w^k$  marque  $k$  choix de la boule noire, soit  $k$  records pour la permutation obtenue. On a bien :

$$[w^k x^n y z^n] H = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} .$$

On pourra également noter que le nombre  $C_n$  de choix de la boule noires à l'instant  $n$  est donnée par :

$$C_n = \sum_{i=1}^n B_i .$$

où les  $B_i$  sont indépendants et suivent des lois de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{i}$ . L'espérance du nombre de records varie donc comme  $\log n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pour plus d'information, nous invitons le lecteur à regarder [4].

## 3 Solution générale pour les urnes sacrificielles

### 3.1 Intégration du système différentiel

**Définition 5.** Pour les urnes équilibrées, on a  $\gamma - \alpha = \beta - \delta = p$ , on dit alors que

- si  $p > 0$ , l'urne est altruiste, la couleur choisie n'est pas favorisée, au sens où lorsqu'on tire une boule d'une couleur, on ajoute d'avantage de boules de l'autre couleur ;
- si  $p = 0$ , l'urne est neutre, cas peu intéressant, car alors la composition de l'urne est déterminée au cours du temps, comme dans l'urne record ;
- si  $p < 0$ , l'urne est égoïste, car la couleur choisie est favorisée.

**Proposition 2.** Toute solution  $(X, Y)$  du système différentiel associé à l'urne  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{\alpha+1} Y^\beta \\ \dot{Y} = X^\gamma Y^{\delta+1} \end{cases} ,$$

vérifie  $X(t)^p - Y(t)^p = X(0)^p - Y(0)^p$ .

**Preuve :** On calcule simplement

$$\begin{aligned} \partial_t (X(t)^p - Y(t)^p) &= p(X^{p-1} \dot{X} - Y^{p-1} \dot{Y}) \\ &= p(X^{\alpha+p} Y^\beta - X^\gamma Y^{\delta+p}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Exemple.** Cette égalité est bien vérifiée dans le cas de l'urne d'Ehrenfest :

$$(xcht + ysht)^2 - (ycht + xsht)^2 = x^2 - y^2.$$

### 3.2 Quantités homogènes

En remarquant que  $H(x, y, z) = y^{s_0} H\left(\frac{x}{y}, 1, zy^\sigma\right)$ , on constate que la dépendance en  $y$  peut être ignorée, on peut donc supposer  $y = 1$ , et on cherche une classe de fonctions permettant d'exprimer les fonctions génératrices dans ce cas particulier.

**Définition 6.** Une urne sacrificielle est une urne vérifiant  $\alpha \leq -1$ , les boules blanches sont sacrifiées au sens où lorsqu'on en pioche une, leur population diminue.

**Notations.** On suppose  $x$  voisin de 0, on posera :

$$\Delta(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{p}},$$

avec une détermination holomorphe de la racine pième sur ce voisinage.

On définit, pour  $(X, Y)$  solution du système différentiel associé à l'urne considérée, avec pour conditions initiales  $(x_0, 1)$  les fonctions  $\xi$  et  $\eta$  comme suit :

$$\begin{cases} \xi(t) = \frac{X\left(\frac{t}{\Delta(x_0)^\sigma}\right)}{\Delta(x_0)} \\ \eta(t) = \frac{Y\left(\frac{t}{\Delta(x_0)^\sigma}\right)}{\Delta(x_0)} \end{cases}.$$

**Proposition 3.** Les fonctions  $\xi$  et  $\eta$  définies ci-dessus vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi^{\alpha+1}(\xi^p + 1)^{\frac{\beta}{p}} \\ \dot{\eta} = \eta^{\delta+1}(\eta^p - 1)^{\frac{\gamma}{p}} \end{cases},$$

avec pour conditions initiales  $\xi(0) = \frac{x_0}{\Delta(x_0)}$  et  $\eta(0) = \frac{1}{\Delta(x_0)}$ .

**Preuve :** On a par définition de  $(X, Y)$  :

$$\dot{X} = X^{\alpha+1}Y^\beta.$$

Or on sait que  $Y^p - X^p = 1 - x_0^p = \Delta(x_0)^p$ , donc par conséquent, on peut exprimer  $\dot{X}$  en fonction de  $X$  :

$$\dot{X} = X^{\alpha+1}(X^p + \Delta(x_0)^p)^{\frac{\beta}{p}}.$$

Par conséquent, en utilisant que  $\sigma = \alpha + \beta$ , on a bien :

$$\dot{\xi} = \xi^{\alpha+1}(\xi^p + 1)^{\frac{\beta}{p}}.$$

L'égalité pour  $\eta$  s'obtient de la même manière.

□

On obtient alors en écrivant  $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$  et en intégrant :

$$t = \int_{\frac{x_0}{\Delta(x_0)}}^{\xi(t)} \frac{w^{-\alpha-1}}{(1+w^p)^{\frac{\beta}{p}}} dw.$$

Puis par le changement de variables  $\zeta = w^{-\alpha}$  ( $\alpha < -1$ ) :

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_{\left(\frac{x_0}{\Delta(x_0)}\right)^{-\alpha}}^{\xi(t)^{-\alpha}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^{\frac{-p}{\alpha}})^{\frac{\beta}{p}}}.$$

**Définition 7.** On définit, pour  $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$  les fonctions suivantes :  
La fonction pseudo-arcsinus par la formule intégrale :

$$J_{r,\lambda}(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{(1+\xi^r)^\lambda}.$$

La fonction pseudo-sinus comme inverse local de  $J_{r,\lambda}$  dans un voisinage complexe de 0 :

$$S_{r,\lambda}(J_{r,\lambda}(u)) = J_{r,\lambda}(S_{r,\lambda}(u)) = u.$$

La fonction pseudo-cosinus est définie pour  $s \in \mathbb{Q}^*$  dans un voisinage complexe de 0 par :

$$C_{r,s,\lambda}(u) = (1 + S_{r,\lambda}(u)^r)^{\frac{1}{s}}.$$

**Preuve :**  $J$  est analytique dans  $B(0, \frac{1}{2})$  dans lequel on a une détermination analytique de  $\ln(1+z^r)$  donc de  $\frac{1}{(1+z^r)^\lambda}$ ,  $J$  est donc définie dans ce voisinage simplement connexe de 0 comme primitive d'une fonction analytique, et est de l'ordre de  $u + O(u^{r+1})$  au voisinage de 0. Par conséquent,  $J$  est inversible dans un voisinage de 0, et  $S$  est bien définie, et de l'ordre de  $u + O(u^{r+1})$ .  $C$  est alors définie dans un voisinage de 0 dans lequel  $1 + S^r$  ne s'annule pas, est analytique et est de l'ordre de  $1 + O(z^r)$ .

□

**Théorème 2.** Soit une urne équilibrée  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  avec  $\alpha < 0$  et  $\delta \neq 0$ , on pose :

$$\lambda = \frac{\beta}{p}, \quad r = \frac{-p}{\alpha}, \quad s = \frac{-p}{\delta}.$$

On pose également les fonctions

$$J = J_{r,\lambda}, \quad S = S_{r,\lambda}, \quad C = C_{r,s,\lambda}.$$

On peut alors exprimer  $H$  par la formule suivante :

$$H(x, 1, z) = \Delta(x)^{s_0} S(-\alpha z \Delta(x)^\sigma + J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha))^{\frac{-\alpha_0}{\alpha}} C(-\alpha z \Delta(x)^\sigma + J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha))^{\frac{-b_0}{\delta}}.$$

**Preuve :**

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_{\left(\frac{x}{\Delta(x)}\right)^{-\alpha}}^{\xi(t)^{-\alpha}} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^r)^\lambda}.$$

Soit, avec les notations précédentes,

$$-\alpha t = J(\xi(t)^{-\alpha}) - J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha).$$

Par conséquent, on a

$$\xi^{-\alpha} = S(-\alpha t + J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha)).$$

Puisque  $\xi^p - \eta^p = 1$ , on obtient pour  $\eta^{-\delta}$  l'expression :

$$C(-\alpha t + J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha)).$$

On a alors l'expression voulue pour  $H$ .

□

**Exemple.** L'utilisation de ces fonctions pour l'urne d'Erhenferst donne :

$$J(u) = J_{2, \frac{1}{2}}(u) = \operatorname{argsh}(u).$$

Par conséquent, on a :

$$S(u) = \operatorname{sh}(u) \text{ et } C(u) = \operatorname{ch}(u).$$

On obtient alors :

$$H(x, 1, z) = (1 - x^2)^{\frac{N}{2}} \operatorname{sh}^N \left( z + \operatorname{argsh} \left( \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \right),$$

qui est bien égal au résultat obtenu précédemment :

$$H(x, 1, z) = (x \operatorname{ch}(z) + \operatorname{sh}(z))^N.$$

## 4 Urnes semi-sacrificielles

**Définition 8.** Une urne semi-sacrificielle est une urne  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  telle que lorsqu'on tire une boule blanche, on enlève des boules blanches, mais lorsqu'on tire une boule noire, on en ajoute, i.e.  $\alpha < 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta\gamma \neq 0$  et donc  $\sigma > 0$  (car  $\beta$  et  $\gamma$  sont positifs).

### 4.1 Propriétés analytiques des fonctions de base

La forme particulière des urnes semi-sacrificielles permet d'obtenir certains résultats analytiques sur les fonctions pseudo-sinus et pseudo-cosinus associées, en particulier sur leurs rayons de convergence, qui permettront par la suite d'obtenir certains résultats probabilistes pour les urnes.

**Lemme 3.** *Pour une urne semi-sacrificielle, le rayon de convergence commun  $\rho$  des fonctions  $C$  et  $S$  définies précédemment est donné par :*

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\Gamma(\frac{1}{r})\Gamma(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{s})}{\Gamma(\frac{1}{s})}.$$

**Preuve :** On remarque que grâce au théorème 2 appliqué à l'urne, avec pour conditions initiales  $a_0 = -\alpha$  et  $b_0 = 0$ , on a

$$H(0, 1, z) = S(-\alpha z).$$

Par conséquent, les termes du développement de Taylor de  $S$  en 0 sont strictement positifs, il suffit donc, pour déterminer son rayon de convergence d'étudier  $S$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Or  $S$  est définie comme l'inverse de  $J$  au voisinage de 0, et  $J$  est analytique en tout point de  $\mathbb{R}^+$ . Il suffit de trouver dans quel domaine  $J$  est injectif pour en déduire le domaine dans lequel  $S$  est analytique. Or  $J'(u) = (1 + u^r)^{-\lambda} > 0$ .

Par conséquent, on en déduit  $\rho = J(+\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^r)^\lambda}$ , d'où l'expression recherchée, grâce aux résultats sur la fonction bêta d'Euler.

Montrons ensuite que  $S(z)^r \neq -1$ , pour  $|z| < \rho$ . En effet, par formule de la dérivée de l'inverse,  $S$  est solution de l'équation différentielle :

$$f' = (1 + f^r)^\lambda.$$

Si  $f$  solution de l'équation précédente était analytique au voisinage de  $z_0$  vérifiant  $f(z_0)^r = -1$ , on aurait :

$$f \sim a + ba(z - z_0)^n, \quad f' \sim nba(z - z_0)^{n-1} \text{ et } (1 + f^r)^\lambda \sim (-rb)^\lambda (z - z_0)^{n\lambda},$$

avec  $n > 1$ ,  $a^r = 1$ . L'égalité est alors impossible, car on aurait  $\lambda n = n - 1$  avec  $\lambda > 1$ .

Par conséquent,  $S^r \neq -1$  sur le disque de convergence, donc  $C$  est analytique dans ce domaine. □

On étudie ensuite le comportement de  $S$  et  $C$  au voisinage de  $\rho$ .

**Lemme 4.** *Posons  $r_0 = r\lambda - 1$  et  $r_1 = r(\lambda + 1) - 1$ , on a, au voisinage de  $\rho$  :*

$$S(z) = (r_0(\rho - z))^{-\frac{1}{r_0}} \left[ 1 - \frac{\lambda}{r_1} (r_0(\rho - z))^{\frac{r}{r_0}} + O\left((\rho - z)^{\frac{2r}{r_0}}\right) \right],$$

$$C(z) = (r_0(\rho - z))^{-\frac{r}{sr_0}} \left[ 1 + \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{r\lambda}{r_1} \right) (r_0(\rho - z))^{\frac{r}{r_0}} + O\left((\rho - z)^{\frac{2r}{r_0}}\right) \right].$$

**Preuve :** On commence par donner un développement asymptotique de  $J(u)$  pour  $u \rightarrow +\infty$ , grâce à son expression comme intégrale de  $(1 + \xi^r)^{-\lambda}$  :

$$J(u) - \rho = - \int_u^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi^r)^\lambda}.$$

Or on sait que :

$$(1 + \xi^r)^{-\lambda} = \xi^{-\lambda r} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\lambda}{k} \xi^{-kr}.$$

D'où, en échangeant série et intégrale, et en limitant le développement à l'ordre 2

$$J(u) = \rho - \frac{1}{r_0 u^{r_0}} + \frac{1}{r_1 u^{r_1}} + 0 \left( \frac{1}{u^{r(\lambda+2)-1}} \right).$$

$S$  étant défini comme l'inverse de  $J$ , on peut en déduire un équivalent de  $S$  pour  $z \rightarrow \rho$ . De plus,  $C(z) = (1 + S(z)^r)^{\frac{1}{r}}$ , on obtient son développement par composition.

□

**Lemme 5.** *On note  $\rho(x)$  le rayon de convergence de la série  $H(x, 1, z)$  vu comme une fonction de  $z$ . Il existe un voisinage complexe de 1 pour  $x$  dans lequel ce rayon de convergence est analytique et vérifie :*

$$\rho(x) = x^{-\sigma} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\lambda}{k} \frac{1}{\sigma + kp} \left( \frac{1 - x^p}{x^p} \right)^k.$$

**Preuve :** Connaissant le rayon de convergence  $\rho$  de  $S$  et  $C$ , et l'expression de  $H$ , le rayon de convergence  $\rho(x)$  est déterminé par la relation :

$$-\alpha \rho(x) \Delta(x)^\sigma + J(x^{-\alpha} \Delta(x)^\alpha) = \rho.$$

Or on a :

$$\rho - J(u) = \int_u^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi^r)^\lambda}.$$

Par conséquent, on obtient, en posant  $e(x) = \frac{\Delta(x)}{x}$  :

$$\rho(x) = x^{-\sigma} \frac{-1}{\alpha e(x)^\sigma} \int_{e(x)^\alpha}^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi^r)^\lambda}.$$

Par changement de variable  $\xi = v^\alpha$  ( $\alpha \leq -1$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(x) &= x^{-\sigma} e(x)^{-\sigma} \int_0^{e(x)} \frac{v^{\alpha-1} dv}{(1 + v^{-p})^\lambda} \\ &= x^{-\sigma} e(x)^{-\sigma} \int_0^{e(x)} \frac{v^{\alpha-1+\lambda p} dv}{(1 + v^p)^\lambda}. \end{aligned}$$

Puis, par développement en séries entières, on a ensuite :

$$\rho(x) = x^{-\sigma} e(x)^{-\sigma} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\lambda}{k} \int_0^{e(x)} v^{\alpha+\beta+kp-1}.$$

Et donc en intégrant, on obtient :

$$\rho(x) = x^{-\sigma} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e(x)^{kp}}{\sigma + kp}.$$

Ce qui donne l'égalité désirée.

□

## 4.2 Propriétés probabilistes des urnes semi-sacrificielles

**Théorème 6.** *Soit une urne semi-sacrificielle,  $a_n$  le nombre de boules blanches présentes à l'instant  $n$  dans l'urne. On a alors*

$$\frac{a_n}{n} \text{ converge presque sûrement vers } \mu, \\ \frac{a_n - n\mu}{\sqrt{n}} \text{ converge en loi vers une loi gaussienne } N(0, \xi^2).$$

$$\text{où on a posé } \mu = \frac{\sigma\gamma}{\beta + \gamma} \text{ et } \xi^2 = \frac{\beta\gamma\sigma}{-\alpha + \beta + 2\gamma} \left( \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \gamma} \right)^2.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un lemme d'analyse fonctionnelle sur les séries génératrices :

**Lemme 7.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage du domaine  $\Delta = \Delta(\eta, \phi) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 + \eta, |\text{Arg}(z - 1)| \geq \phi\}$ , sauf en 1 au voisinage duquel il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f = O(|z - 1|^a)$ , alors  $[z^n]f(z) = O(n^{-a-1})$ .*

**Preuve :** Puisque  $(1 - z)^a$  est de module minoré par une quantité strictement positive sur tout compact de  $\Delta$  ne contenant pas 1, la condition d'existence d'un voisinage de 1 dans  $\Delta$  et  $K > 0$  tel que  $f(z) < K(1 - z)^{-a-1}$  est équivalente à l'existence d'une constante  $K$  tel que  $f(z) < K(1 - z)^{-a-1}$  sur tout  $\Delta \setminus 1$ . Soit  $n > 2|a| + 4$ , on pose  $f_n = [z^n]f$ , on a alors par la formule de Cauchy :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_o f(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

où  $o$  est un contour constitué de  $(\partial\Delta^+ \setminus D(1, \varepsilon)) \cup (\partial D(1, \varepsilon)^+ \setminus \Delta)$ .

On calcule alors l'intégrale sur chacun des contours :

– Sur le petit cercle, pour  $n \geq 4$  on obtient un majorant de l'intégrale en

$$\frac{1}{2\pi} K \left( \frac{1}{n} \right)^a \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-n-1} \left( \frac{2\pi i}{n} \right).$$

Soit une majoration en  $5Kn^{-a-1}$ .

– Sur la partie rectiligne, on pose  $\omega = e^{i\phi}$  et on réalise le changement de variable  $z \rightarrow 1 + \frac{\omega t}{n}$ . On a une majoration du terme en

$$\int_1^{En} K \left( \frac{t}{n} \right)^a \left| 1 + \frac{\omega t}{n} \right|^{-n-1} \frac{dt}{n}.$$

Soit, après majoration, on en tire encore une majoration en  $cKn^{-a-1}$ .

– On obtient une majoration exponentielle décroissante en :

$$K \frac{\eta^a}{(1 + \eta)^n}.$$

En sommant ces termes on obtient bien le résultat demandé. □

**Remarque** On a de la même manière un résultat de la même forme si on suppose  $f = o((1-z)^a)$ , la définition est donnée en détail dans [3].

**Corollaire 8.** *Si  $f$  analytique au voisinage de  $\Delta \setminus 1$  avec pour équivalent en  $1$   $K(1-z)^a$ , on a alors*

$$[z^n]f(z) \sim \frac{K}{\Gamma(-a)} n^{-a-1}.$$

**Preuve :** On applique la remarque précédente à  $f - K(1-z)^a$ , le reste provient du développement en séries entières de  $K(1-z)^a$ . □

**Preuve du Théorème :** On a, grâce à l'expression de  $H$  et aux propriétés des fonctions  $S$  et  $C$  :

$$H(x, 1, z) \sim_{z \rightarrow \rho(x)} \sigma^{-\frac{s_0}{\sigma}} (\rho(x) - z)^{-\frac{s_0}{\sigma}}.$$

C'est également la seule singularité jouant vraiment un rôle pour  $x$  au voisinage de 1, car les autres singularités partent à l'infini. Or on sait que :

$$[z^n](\rho(x) - z)^{-\frac{s_0}{\sigma}} = \rho(x)^{-n-\frac{s_0}{\sigma}} \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})n!} \sim \frac{n^{\frac{s_0}{\sigma}-1}}{\rho(x)^{n+\frac{s_0}{\sigma}} \Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}.$$

En particulier, pour  $x$  proche de 1, certains résultats pour les séries génératrices permettent alors d'affirmer que :

$$[z^n]H(x, 1, z) \sim \frac{\sigma^{-\frac{s_0}{\sigma}}}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})} \rho(x)^{-n-\frac{s_0}{\sigma}} n^{\frac{s_0}{\sigma}-1} \left[ 1 + O\left(n^{-\frac{p}{\sigma}}\right) \right].$$

Or on sait qu'on a par définition :

$$\begin{aligned} H(x, 1, z) &= \sum_{n,a,b} h_{n,a,b} b x^a \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_n h_n \frac{z^n}{n!} \sum_a \mathbb{P}(a_n = a) x^a \\ &= \sum_n h_n \frac{z^n}{n!} \mathbb{E}(x^{a_n}). \end{aligned}$$

On peut donc calculer un équivalent de  $\chi_n(x) = \mathbb{E}(x^{a_n})$ , sachant que

$$h_n = \sigma^n \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})} :$$

$$\chi_n(x) \sim \left( \frac{\rho(1)}{\rho(x)} \right)^{n+\frac{s_0}{\sigma}} \left[ 1 + O\left(n^{-\frac{p}{\sigma}}\right) \right].$$

On peut alors reprendre la démonstration du théorème central limite. On étudie la fonction caractéristique de  $\frac{a_n - n\mu}{\sqrt{n}}$  :

$$\Phi_n(\lambda) = \mathbb{E} \left( e^{i\lambda \frac{a_n - n\mu}{\sqrt{n}}} \right) = \chi_n \left( e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}} \right) e^{-i\sqrt{n}\mu\lambda}.$$

On cherche alors un équivalent de  $\Phi_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\Phi_n(\lambda) \sim \left[ e^{-i\frac{\mu\lambda}{\sqrt{n}}} \left( \frac{\rho(1)}{\rho\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right)} \right) \right]^n \left( \frac{\rho(1)}{\rho\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right)} \right)^{\frac{s_0}{n\sigma}} \left[ 1 + O\left(n^{-\frac{p}{\sigma}}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

On cherche tout d'abord le développement de :

$$\frac{1 - e^{ip\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}}{e^{ip\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}} = -ip\frac{\lambda}{\sqrt{n}} - p^2\frac{\lambda^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Puis celui de :

$$\rho\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 - \frac{i\sigma\lambda}{\sqrt{n}} \frac{\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\lambda^2}{2n} \left( \sigma^2 \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} + p^2 \left( \frac{\beta}{(\sigma + p)(\sigma + 2p)} - \frac{\lambda^2}{\sigma + 2p} \right) \right) \right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

On pose  $\mu = \frac{\sigma\gamma}{\beta + \gamma}$ , on obtient :

$$\frac{\rho(1)}{\rho\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right)} = 1 + i\mu\frac{\lambda}{\sqrt{n}} - \frac{\lambda^2}{2n} \left[ \frac{\sigma^2(\beta^2 + \gamma^2)}{(\beta + \gamma)^2} + p^2 \left( \frac{\beta}{(\sigma + p)(\sigma + 2p)} - \frac{\lambda^2}{\sigma + 2p} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

On obtient alors par développement :

$$e^{-i\frac{\mu\lambda}{\sqrt{n}}} \left( \frac{\rho(1)}{\rho\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right)} \right) = 1 - \frac{\lambda^2\xi^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

en posant  $\xi^2 = \frac{\beta\gamma}{-\alpha + \beta + 2\gamma} \left( \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \gamma} \right)^2 \sigma$ .

Par conséquent, on en tire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2\xi^2}{2}},$$

qui est la fonction caractéristique de la loi gaussienne centrée de paramètre  $\xi^2$ , le théorème de Lévy permet d'en déduire la convergence en loi de la suite.

□

**Remarque.** On notera que pour toute urne semi-sacrificielle, quelle que soit la composition de départ de l'urne, la proportion de boules blanches  $\frac{a_n}{s_0 + n\sigma}$  converge presque sûrement vers la quantité  $\frac{\gamma}{\beta + \gamma}$ . On obtient un résultat de convergence classique pour les écarts à la moyenne.

On notera également que  $\mu$  est un rationnel strictement inférieur à  $\frac{1}{2}$ .

**Exemple.** L'urne  $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  aura une proportion de boules blanches qui tendra presque sûrement vers  $\frac{1}{3}$ .

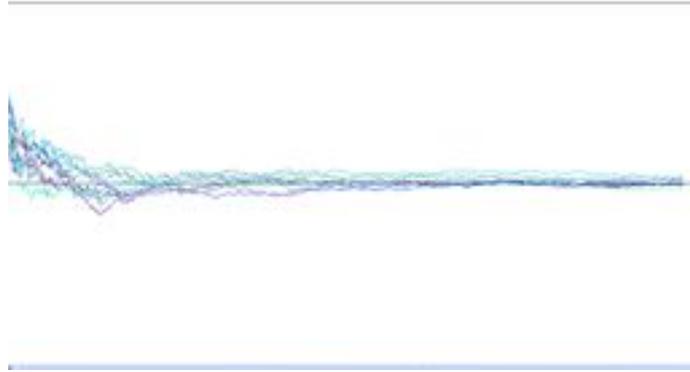


FIG. 3 – Proportion de boules blanches au cours de 1000 simulations de tirage de l'urne avec 50 boules de chaque couleur au départ. Les deux traits horizontaux représentent  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$

## 5 Urnes triangulaires

**Définition 9.** Une urne  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  est dite triangulaire si elle vérifie  $\gamma = 0$ . Elle est alors de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & \sigma - \alpha \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$  puisqu'on la suppose toujours équilibrée. On suppose de plus  $0 < \alpha < \sigma$ .

**Remarque.** On impose la condition  $0 < \alpha < \sigma$ . En effet,

- le cas  $\alpha = 0$  nous donne une urne  $[0, \sigma, 0, \sigma]$ , et en supposant que  $\sigma$  divise  $a_0$  et  $b_0$ , on se ramène au cas de l'urne record déjà traitée,
- le cas  $\alpha = \sigma$  se ramène de la même manière au cas de l'urne de Pólya.

### 5.1 Résultats de la théorie des martingales

On peut ici utiliser la théorie des martingales pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de  $a_n$ .

**Proposition 4.** La variable aléatoire  $\frac{a_n}{n^\alpha}$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire dans  $L^1$ .

**Preuve :** On définit la filtration  $F_n = \sigma(a_0, \dots, a_n)$ , et on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{n+1}|F_n) &= \frac{a_n}{s_0 + n\sigma}(a_n + \alpha) + \left(1 - \frac{a_n}{s_0 + n\sigma}\right) a_n \\ &= a_n \left(1 + \frac{\alpha}{s_0 + n\sigma}\right). \end{aligned}$$

On définit alors  $X_n = \frac{a_n}{\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{\alpha}{s_0 + k\sigma}\right)}$ . C'est une martingale positive finie

presque sûrement, qui converge donc p.s vers  $X \in L^1$ . Or

$$\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{\alpha}{s_0 + n\sigma}\right) \sim Cn^{\frac{\alpha}{\sigma}}.$$

Par conséquent, on en déduit que  $\frac{a_n}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$  converge p.s. vers  $d \in L^1$ .

On en déduit que presque sûrement,  $a_n$  est dominé par  $n^{\frac{\alpha}{\sigma}}$ .

□

On essaiera ici de déterminer grâce à nos outils analytiques quelle est la loi de la variable aléatoire  $d$  vers laquelle converge presque sûrement  $\frac{a_n}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$ .

## 5.2 Fonctions génératrices

Commençons par déterminer quelle est la série génératrice associée à l'urne triangulaire  $\begin{pmatrix} \alpha & \sigma - \alpha \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ , grâce au Théorème 1.

**Proposition 5.** On a  $H(x, 1, z) = x^{a_0}(1-\sigma z)^{-\frac{b_0}{\sigma}} \left(1 - x^\alpha \left(1 - (1-\sigma z)^{\frac{\alpha}{\sigma}}\right)\right)^{-\frac{a_0}{\alpha}}$ .  
Par conséquent, on a, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(a_n = a_0 + k\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)} \binom{k + \frac{a_0}{\alpha} - 1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n + \frac{b_0 - \alpha i}{\sigma} - 1}{n}.$$

**Preuve :** Le système différentiel associé à une urne triangulaire est

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{\alpha+1}Y^{\sigma-\alpha} \\ \dot{Y} = Y^{\sigma+1} \end{cases}.$$

Une solution  $(X, Y)$  vérifiant  $(X(0), Y(0)) = (x, y)$  vérifie :

$$Y(t) = y(1 - \sigma y^\sigma t)^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Dès lors on a

$$\dot{X} X^{-\alpha-1} = Y^{\sigma-\alpha},$$

qui s'intègre en

$$X(t) = x \left(1 - x^\alpha \left(1 - (1 - \sigma y^\sigma t)^{\frac{\alpha}{\sigma}}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

D'où, par le théorème, l'expression de  $H$  :

$$H(x, y, z) = x^{a_0} y^{b_0} \left(1 - x^\alpha \left(1 - (1 - \sigma y^\sigma z)^{\frac{\alpha}{\sigma}}\right)\right)^{-\frac{a_0}{\alpha}} (1 - \sigma y^\sigma z)^{-\frac{b_0}{\sigma}}.$$

On a  $a_n = a_0 + k\alpha$ , de par la forme triangulaire de l'urne. On obtient alors :

$$[x^{a_0+k\alpha}]H(x, 1, z) = \binom{k + \frac{a_0}{\alpha} - 1}{k} (1 - \sigma z)^{-\frac{b_0}{\sigma}} \left(1 - (1 - \sigma z)^{\frac{\alpha}{\sigma}}\right)^k.$$

Le résultat s'obtient alors par développement en séries entières de  $z$  de cette fonction.

□

**Exemple.** On étudie l'urne triangulaire  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les résultats généraux sur ces urnes donnent, pour  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 0$  :

$$H(x, 1, z) = \frac{x}{(1 - x(1 - \sqrt{1 - 2z}))}.$$

Que l'on développe en séries entières pour obtenir le coefficient suivant devant  $x^k$  :

$$[x^k]H(x, 1, z) = (1 - \sqrt{1 - 2z})^{k-1}.$$

Or si on pose  $\Phi(z) = 1 - \sqrt{1 - 2z}$ , cette fonction vérifie :

$$\Phi = \frac{z}{2 - \Phi}.$$

On peut donc calculer  $[z^n]\Phi^{k-1}$  grâce à la formule d'inversion de Lagrange, qui donne :

$$[z^n]\Phi^{k-1} = \frac{k-1}{n!} \partial_t^{n-1} \left( \frac{t^{k-2}}{(2-t)^n} \right) \Big|_{t=0}.$$

En développant on obtient, pour  $n \geq k-1$  :

$$[z^n]\Phi^{k-1} = \frac{k-1}{n} \binom{2n-k}{n-1} 2^{-2n+k-1}.$$

De même on calcule le coefficient de  $H(1, 1, z)$  :

$$[z^n]H(1, 1, z) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

On en tire alors :

$$\mathbb{P}(a_n = k) = \frac{k-1}{n} 2^{k-1} \frac{\binom{2n-k}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

On en cherche un équivalent pour  $\mathbb{P}(a_n = \xi\sqrt{n}) \sim \frac{\xi}{2\sqrt{n}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ .

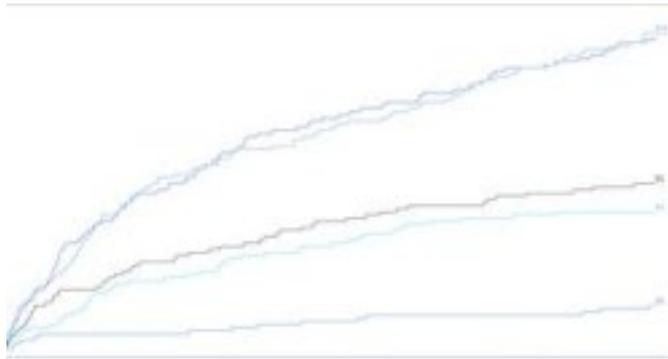


FIG. 4 – Nombre de boules blanches au cours d'une simulation de l'urne du dessus avec une boule blanche au départ. On voit nettement que les courbes sont de la forme  $c\sqrt{x}$ .

Grâce à l'expression simple de  $H$ , on peut sans difficultés calculer des équivalents des différents moments de  $a_n$ , comme nous l'avions remarqué au 2.2.1.

**Proposition 6.** *La variable aléatoire  $a_n$  vérifie*

$$\mathbb{E}[a_n] = a_0 \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma})} n^{\frac{\alpha}{\sigma}} + O(n^{\frac{\alpha}{\sigma}-1}),$$

$$(\sigma[a_n])^2 = a_0 \left[ (a_0 + \alpha) \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma})} - a_0 \left( \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma})} \right)^2 \right] n^{\frac{2\alpha}{\sigma}} + O(n^{\frac{\alpha}{\sigma}}).$$

**Preuve :** On sait que :

$$H(x, 1, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_a h_n(a, \sigma n - a) x^a \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} [\partial_x H(x, 1, z)]_{x=1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_a a h_n(a, \sigma n - a)) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \mathbb{E}(a_n) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Or, on connaît l'expression de  $H(x, 1, z)$  et on a :

$$H(z) = H(1, 1, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{z^n}{n!}.$$

Par le calcul, on obtient donc :

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - \sigma z)^{-\frac{s_0}{\sigma}}, \\ [\partial_x H(x, 1, z)]_{x=1} &= a_0 (1 - \sigma z)^{-\frac{s_0+2\alpha}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Que l'on développe sans difficulté en séries entières pour obtenir :

$$\mathbb{E}(a_n) = a_0 \frac{\Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma} + n) \Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n) \Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma})}.$$

On a un équivalent du terme obtenu par la formule de Stirling :

$$\mathbb{E}(a_n) = a_0 \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{s_0+2\alpha}{\sigma})} n^{\frac{\alpha}{\sigma}} + O(n^{\frac{\alpha}{\sigma}-1}).$$

On obtient de la même manière la formule pour la variance en dérivant deux fois la fonction  $H$ .

□

### 5.3 Loi de $d$

**Proposition 7.** *On pose  $\xi = \frac{k}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$ , on a alors la variable aléatoire  $a_n$  qui vérifie*

$$\mathbb{P}(a_n = a_0 + \alpha \xi n^{\frac{\alpha}{\sigma}}) = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}} \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{a_0}{\alpha})} \xi^{\frac{a_0}{\alpha}-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^k}{\Gamma(\frac{b_0-k\alpha}{\sigma}) k!} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}\right).$$

En particulier,  $\frac{a_n}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$  converge en loi vers une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On connaît donc la loi de  $d$ , de densité :

$$\frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{a_0}{\alpha})} \xi^{\frac{a_0}{\alpha}-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^k}{\Gamma(\frac{b_0-k\alpha}{\sigma}) k!}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 9. Formule des compléments.** La fonction  $\Gamma$  d'Euler vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

**Preuve :** On utilise l'écriture de  $\Gamma$  suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n^z n!}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}{n^{z+1-z} (n!)^2} \\ &= \frac{z(n+1-z)}{n(n!)^2} (1-z^2)(2^2-z^2)\dots(n^2-z^2) \\ &= \frac{z(n+1-z)}{n} (1-z^2)(1-\frac{z^2}{2^2})\dots(1-\frac{z^2}{n^2}). \end{aligned}$$

Or le produit infini  $h(z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$  est normalement convergent sur tout disque de centre 0, car la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{n^2}$  l'est.

On calcule alors sa dérivée logarithmique, qui est, par théorème de Weierstrass :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Il se trouve que l'on peut calculer cette limite par développement en séries de Fourier de  $f(t) = \cos(ut)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , pour  $u \in \mathbb{R}$ . La série est normalement convergente, et on a convergence ponctuelle :

$$\cos(ut) = \frac{\sin(u\pi)}{u\pi} + 2u \sin(u\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{\pi(u^2 - n^2)}.$$

Pour  $t = \pi$ , on a en particulier :

$$\pi \frac{\cos(\pi u)}{\sin(\pi u)} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

Par identification de deux fonctions entières égales sur la droite réelle, on a :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \pi \cotan(\pi z) = \frac{\sin'(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

De plus,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi$ , par conséquent on en déduit :

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

On a bien en définitive :

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

□

On utilise ce lemme pour calculer l'intégrale suivante :

**Lemme 10.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2i\pi} \int_h u^{-z} e^u du,$$

où  $h$  est un contour de Hankel, un chemin entourant l'axe réel négatif contenu dans l'union d'un cône strict issu de 0 et d'un disque centré en 0.

**Preuve :** Posons  $h_{a,r}$  le contour parcouru dans le sens direct réunion des deux demi-droites  $\{|z| > r, |\text{Arg}(z)| = \pi - a\}$  et du cercle de centre O et de rayon  $r$ .

On suppose que  $h$  est inclus dans le domaine  $\{\text{Arg}(z) \in ]\pi - d, \pi + d[ \cup D(0, r')\}$ .

On applique le théorème de Cauchy dans l'ouvert simplement connexe  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

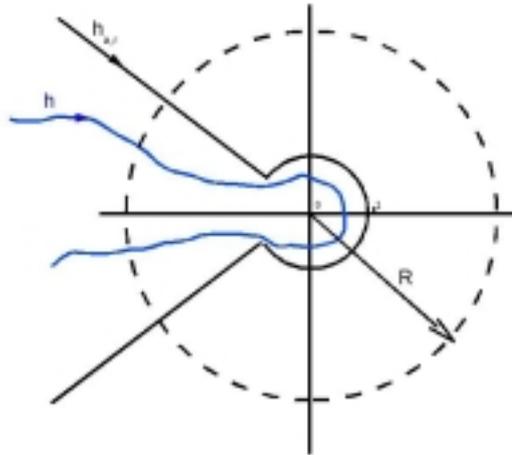


FIG. 5 – Dessin du contour

au contour constitué d'une partie de  $h_{a,r}$ , de  $h$  et du cercle de centre 0 et de rayon  $R$ , on a :

$$|(Re^{i\theta})^{-z} e^{Re^{i\theta}}| = O\left(R^b e^{-R \sin(d)}\right),$$

indépendamment de  $u$ , par conséquent en faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$ , on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_h u^{-z} e^u du = \frac{1}{2i\pi} \int_{h_{a,r}} u^{-z} e^u du.$$

Faisons maintenant tendre  $a$  vers 0, on note  $c_r$  le chemin constitué du cercle de centre 0 et de rayon  $r$  parcouru dans le sens trigonométrique en partant de  $-r$ , on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_h u^{-z} e^u du = \frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{c_r} u^{-z} e^u du - e^{-i\pi z} \int_r^{+\infty} u^{-z} e^u du + e^{i\pi z} \int_r^{+\infty} u^{-z} e^u du \right],$$

On suppose alors  $Re(1-z) > 0$ , dans ce cas l'intégrale sur  $c_r$  tend vers 0 quand  $r \rightarrow 0$ , on obtient alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_h u^{-z} e^u du = \sin(\pi z) \Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Par identification des deux fonctions holomorphes sur l'ensemble  $\{Re(1-z) > 0\}$ , on étend cette égalité à tout  $z \in \mathbb{C}$ .

□

#### Preuve de la Proposition 7 :

On commence par développer  $H$  en séries entières de  $x$ , on obtient :

$$H(x, 1, z) = x^{a_0} (1 - \sigma z)^{\frac{b_0}{\sigma}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k + \frac{a_0}{\alpha} - 1}{k} x^{k\alpha} (1 - (1 - \sigma z)^{\frac{\alpha}{\sigma}})^k.$$

On obtient alors, connaissant l'expression de  $h_n = \sigma^n \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}$  :

$$\mathbb{P}(a_n = a_0 + k\alpha) = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{s_0}{\sigma}) \binom{k + \frac{a_0}{\alpha} - 1}{k}}{\sigma^n \Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)} [z^n] \left( (1 - \sigma z)^{\frac{b_0}{\sigma}} (1 - (1 - \sigma z)^{\frac{\alpha}{\sigma}})^k \right).$$

On pose  $f_k(z) = (1-z)^{-\frac{b_0}{\sigma}} (1 - (1-z)^{\frac{\alpha}{\sigma}})^k$ , et on cherche à calculer  $[z^n] f_k(\sigma z) = \sigma^n [z^n] f_k(z)$ , grâce à la formule de Cauchy.

On pose  $\gamma_R$  un chemin qui fait le tour de 0 et qui évite la valeur 1. On a alors :

$$[z^n] f_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(u) \frac{du}{u^{n+1}}.$$

On fait tendre le grand rayon  $R$  vers  $+\infty$ , la longueur du cercle varie comme  $R$ , et sur le cercle de centre 0 et de rayon  $R$ ,  $|f|$  est dominée par  $R^{\frac{k\alpha}{\sigma}}$ , donc pour  $n$  assez grand, la contribution due au grand cercle devient négligeable devant celle au voisinage de la singularité.

On réalise le changement de variables  $n(1-u) \rightarrow t$ . On note  $g$  un contour qui entoure l'axe réel négatif, l'intégrale calculée précédemment est donc équivalente à :

$$\frac{1}{2in\pi} \int_g \left( \frac{t}{n} \right)^{-\frac{b_0}{\sigma}} \left( 1 - \left( \frac{t}{n} \right)^{\frac{\alpha}{\sigma}} \right)^k \frac{dz}{\left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{n+1}}.$$

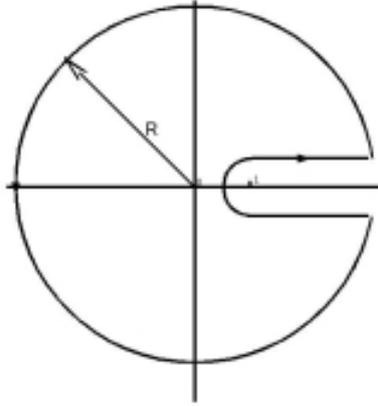


FIG. 6 – Schématisation de  $\gamma_R$

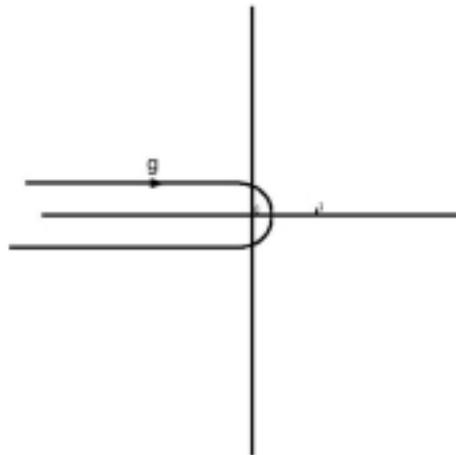


FIG. 7 – Schématisation de  $g$

On pose alors  $\xi = \frac{k}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$ , on a donc :

$$[z^n]f_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{n^{1-\frac{b_0}{\sigma}}} \int_g t^{-\frac{b_0}{\sigma}} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\sigma}}\right)^{\xi n^{\frac{\alpha}{\sigma}}} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1}}.$$

Ce qui conduit à l'approximation suivante :

$$[z^n]f_k(z) \sim \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{n^{1-\frac{b_0}{\sigma}}} \int_g t^{-\frac{b_0}{\sigma}} e^{-\xi t^{\frac{\alpha}{\sigma}} + t} dt.$$

Nous pouvons calculer cette intégrale en développant  $e^{-\xi t^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$  en séries entières :

$$\begin{aligned}
\int_g t^{-\frac{b_0}{\sigma}} e^{-\xi t^{\frac{\alpha}{\sigma}} + t} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_g \frac{(-\xi)^k}{k!} t^{\frac{k\alpha - b_0}{\sigma}} e^t dt \\
&= 2i\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\xi)^k}{\Gamma(\frac{b_0 - k\alpha}{\sigma}) k!}, \text{ grâce au lemme précédent.}
\end{aligned}$$

On en tire :

$$[z^n]f_k(z) = \frac{1}{n^{1-\frac{b_0}{\sigma}}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\xi)^k}{\Gamma(\frac{b_0 - k\alpha}{\sigma}) k!}.$$

De plus, grâce à la formule de Stirling, on a les équivalents suivants :

$$\begin{aligned}
\left(k + \frac{a_0}{\alpha} - 1\right) &\sim \frac{k^{\frac{a_0}{\alpha} - 1}}{\Gamma(\frac{a_0}{\alpha})}, \\
\frac{n!}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)} &\sim \frac{1}{n^{\frac{s_0}{\sigma} - 1}}.
\end{aligned}$$

On obtient alors, en définitive (rappelons que  $h_n = \sigma^n \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n)}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}$ )

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a_n = a_0 + k\alpha) &= \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma}) n!}{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma} + n) \sigma^n} \left(k + \frac{a_0}{\alpha} - 1\right) \sigma^n [z^n]f_k(z) \\
&\sim \frac{\Gamma(\frac{s_0}{\sigma})}{\Gamma(\frac{a_0}{\alpha})} \xi^{\frac{a_0}{\alpha} - 1} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\xi)^k}{k! \Gamma(\frac{b_0 - k\alpha}{\sigma})}.
\end{aligned}$$

□

**Remarque.** On notera que les urnes triangulaires sont nettement plus sensibles aux changements de conditions initiales que les urnes semi-sacrificielles, comme on peut l'illustrer sur les graphiques suivants. De plus, la loi limite de  $\frac{a_n}{n^{\frac{\alpha}{\sigma}}}$  semble être peu étudiée.

## 6 Conclusion

Dans ce document, nous avons tout d'abord développé des outils généraux pour l'analyse des urnes aléatoires. Dans un second temps, nous nous sommes concentrés sur deux types d'urnes particulières : les urnes semi-sacrificielles et les urnes triangulaires, et grâce à des résultats d'analyse complexe, nous avons obtenus des résultats de convergence très différents.

Les urnes semi-sacrificielles suivent un régime de convergence semblable au théorème de la limite centrale pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Pour les urnes triangulaires, nous avons obtenu un résultat de type limite locale, et la convergence vers une distribution peu connue.

## Références

- [1] Philippe Flajolet, Philippe Dumas et Vincent Puyhaubert, *Some exactly solvable models of urn process theory*, 2006. Visible à la page <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/FlDuPu06.pdf>.

- [2] Jim Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, rapport technique 621, 2002. Lecture Notes of Saint-Flour Course, 231 pages.
- [3] Philippe Flajolet et Andrew M. Odlyzko, *Singularity analysis of generating functions*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 3 (1990), no 2, 216-240.
- [4] Philippe Flajolet, *Analytic combinatorics*, 2008, Cambridge University Press. Visible à la page <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf>
- [5] Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, 1997, Hermann.