

Une étude de carte aléatoire: l'UIPT

Ioan Manolescu

17 mars 2009

Résumé

Dans le cadre des cartes aléatoires, on va étudier la convergence faible de la mesure uniforme sur les triangulations enracinées de taille n de la sphère S^2 quand n tend vers l'infini. On va voir que l'objet limite est une triangulation à support homéomorphe au plan, on va le nommer UIPT (uniform infinite planar triangulation). Pour étudier ses propriétés on va construire un deuxième processus qui converge vers l'UIPT et, en l'utilisant, on va montrer que la taille de la boule de rayon r autour de la racine de l'UITP est de l'ordre de r^4 à termes logarithmiques près. On va aussi montrer que le paramètre critique de la percolation sur l'UIPT est p.s. $1/2$.

Je tiens à remercier Jean-Francois Le Gall pour son encadrement et pour m'avoir encouragé à m'intéresser à ce sujet.

1 Introduction générale

Dans ce travail, on se propose d'illustrer l'étude asymptotique des cartes aléatoires par un exemple, à savoir le cas des triangulations. On va commencer par une petite introduction dans le domaine des cartes aléatoires pour se pencher ensuite sur les résultats spécifiques à notre exemple. Ceux-ci viennent essentiellement des travaux de Angel et Schramm [?] et [?].

Une carte est un graphe connexe G plongé dans la sphère S^2 . Il faut comprendre que le plongement dans la sphère n'est important que du point de vue des conditions qu'il impose sur le graphe; la forme précise du plongement n'est pas importante car on identifie les cartes homéomorphes. On appelle faces de la carte les composantes connexes de $S^2 \setminus G$ et on dit qu'une face est m -gone si elle rencontre exactement m arêtes de G . Quand on parle de distance entre les sommets d'une carte, on parle de la distance de graphe sur G . Souvent on considère des cartes enracinées i.e. avec un sommet, une arête ou une face privilégiée.

L'étude des cartes a commencé dans les années 60 quand Tutte a attaqué le problème des quatre couleurs, c'est à ses travaux qu'on doit les résultats de dénombrement de différents types de cartes de taille finie. L'étude du comportement asymptotique des cartes a gagné en importance quand les physiciens ont commencé à les utiliser pour modéliser des surfaces dans le domaine de la

gravité quantique. En ce moment, les cartes aléatoires représentent un domaine très actif des probabilités, il y a beaucoup de nouveaux résultats mais il n'y pas encore une théorie unifié.

Ce qu'on fait en général, c'est prendre une mesure sur une classe de cartes d'une taille finie et étudier la convergence de cette mesure quand la taille des cartes tend vers l'infini. La mesure la plus naturelle à prendre, sachant qu'il n'y a qu'un nombre fini de cartes de taille fixée, est la mesure uniforme. Les classes de cartes les plus utilisées sont les cartes avec toutes les faces de la même forme, par exemple les triangulations, les quadrangulations ou plus généralement les p -angulations, mais d'autres classes sont envisageables.

En ce qui concerne la convergence, il y a deux types de topologies utilisés. Un vient de la distance de Gromov-Hausdorff et est utilisé quand on rééchelonne les cartes et on les regarde comme des espaces métriques aléatoires. C'est ce type d'approche qu'on utilise pour construire le CRT comme limite d'arbres aléatoires et c'est celui qui concerne le plus les physiciens car ils sont intéressés par la limite des cartes quand la taille des arêtes tend vers 0. On n'a pas encore des résultats de convergence pour cette distance mais on a déjà prouvé la tension pour les $2p$ -angulations uniformes, on a défini l'objet limite et on a commencé à l'étudier (voir [?]).

Une autre approche est de ne pas rééchelonner la distance de graphe des cartes mais de dire que deux cartes (enracinées) sont proches si elles ressemblent autour de la racine. Ph. Chassaing et Br. Durhuus ont utilisé ce type de distance pour construire, à l'aide de la bijection donnée par Schaeffer entre les quadrangulations et les arbres bien étiquetés, la quadrangulation uniforme infinie. Dans ce qui suit, on va utiliser ce type de distance pour définir et étudier la triangulation uniforme infinie du plan. Les deux approches qu'on vient de présenter ne sont pas complètement indépendantes, pour rééchelonner les cartes il faut connaître la taille asymptotique des voisinages de l'origine et on va voir qu'on peut les étudier en utilisant l'objet limite qu'on va créer.

2 Introduction et définitions spécifiques aux triangulations

Comme on l'a annoncé, notre étude va se restreindre à un sous-ensemble des cartes : les triangulations. Avant d'énoncer tout résultat, on va donner une définition précise des triangulations et de la topologie qu'on utilisera dans la suite.

Définition 1 *Soit G un graphe connexe (fini ou non) plongé dans la sphère S^2 . On appelle faces les composantes connexes de $S^2 \setminus G$. On dit qu'une face est un m -gone si sa frontière rencontre exactement m arêtes du graphe (si une face rencontre les deux côtés d'une arête alors on compte cela comme deux rencontres). Une triangulation T est formée d'un graphe G plongé dans la sphère et d'un sous-ensemble de l'ensemble des faces triangulaires de G , toute arête de*

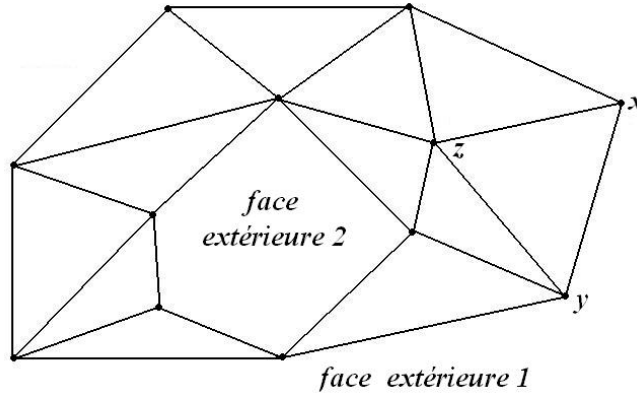


FIG. 1 – Une triangulation de taille 13 avec deux faces extérieures dont une est un pentagone et une un octogone.

G doit être adjacente à au moins une des faces de cet ensemble. On note $S(T)$ le graphe G union les faces de T , c'est le support de T .

On appelle *face extérieure* d'une triangulation T une composante connexe de $S^2 \setminus S(T)$. Si $S^2 \setminus S(T)$ est connexe et est un m -gone on dira que T est la triangulation d'un m -gone. On dit que T est une triangulation de la sphère si $S(T) = S^2$. On appelle *taille* d'une triangulation le nombre de sommets de son graphe.

Comme souvent dans l'étude des cartes aléatoires les triangulations qu'on va traiter vont être enracinées. Cela est particulièrement important chez nous pour pouvoir définir la distance entre les triangulations.

Définition 2 Une triangulation enracinée est une triangulation munie d'un drapeau (x, y, z) privilégié (i.e. un sommet racine x , une arête racine (x, y) et une face racine (x, y, z)).

On a déjà dit qu'on est intéressé que par l'aspect combinatoire de G , pas par la façon dont il est plongé dans la sphère. On va donc définir une relation d'équivalence entre les triangulations pour les quotienter ensuite par celle-ci.

Définition 3 On dit que deux triangulation enracinées T et T' sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de $S(T)$ dans $S(T')$ qui fait correspondre au graphe de T celui de T' et à la racine de T celle de T' .

On doit encore imposer une dernière condition aux triangulations, une condition qui peut paraître étrange mais elle est essentielle pour le bon fonctionnement de notre modèle.

Définition 4 On dit qu'une triangulation T est localement finie si tout point de $S(T)$ admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'arêtes, faces et sommets de T .

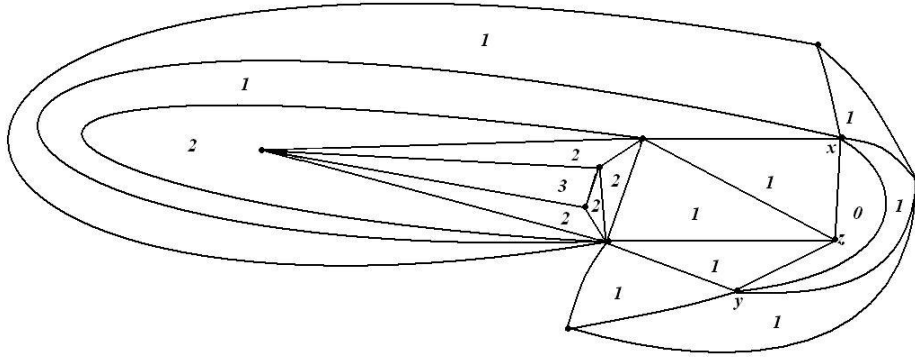


FIG. 2 – Le triangle marqué 0 est le triangle racine. En lui rajoutant les triangles marqués 1 on obtient $T|_1$. Les triangles marqués 2 et 3 font partie de $T|_2$ et $T|_3$.

L'idée de la topologie qu'on va utiliser dans cette étude est que deux triangulations sont proches si elles se ressemblent autour de la racine. Pour cela, il faut donner une définition exacte des voisinages de la racine.

Définition 5 Soit T une triangulation, on note $T|_0$ la triangulation formée uniquement par le triangle racine. Pour $n \geq 1$ on note $T|_n$ la triangulation qui à comme faces toutes les faces de T qui ont au moins un sommet dans T_{n-1} et comme graphe le graphe bordant ces faces. On appelle $T|_n$ le voisinage de taille n de la racine dans T .

En ce qui concerne les sommets de la triangulation T , ceux qui sont dans $T|_n$ sont exactement ceux qui sont à distance au plus n de la racine.

On est enfin près à définir l'espace des triangulations qu'on va utiliser. On ne va considérer que des triangulations enracinées et on va identifier les triangulations équivalentes. On peut voir que si une triangulation est localement finie, alors toute triangulation équivalente à celle-ci en est aussi. Il est vrai aussi que les voisinages des racines de deux triangulations équivalentes sont à leur tour équivalentes. On peut donc définir \mathcal{T} comme l'ensemble des triangulations enracinées, localement finies, T telles que les graphes duales de T ainsi que des $T|_n$ soient connexes. C'est pas difficile à voir que les triangulations de la sphère, ainsi que celles des m -gones, sont dans \mathcal{T} mais elles sont loin d'être les seules. Pour deux triangulations $T, T' \in \mathcal{T}$ on va dire que $T \subset T'$ si T' contient une copie de T avec la racine égale à celle de T' et telle que toutes ses faces soient aussi des faces de T' . A priori T' peut même contenir plusieurs telles copies de T mais la façon dont on a défini les triangulations empêche cela.

On va maintenant définir la distance à mettre sur \mathcal{T} . Comme on l'a déjà dit la distance entre deux triangulations va être d'autant plus petite que les triangulations sont identique sur un voisinage plus grand de la racine.

Définition 6 Soient $T, T' \in \mathcal{T}$, on note $d(T, T') = (1 + \max\{k \text{ t.q. } T|_k = T'|_k\})^{-1}$.

Pour s'habituer un peu avec l'espace qu'on vient de créer, on va vérifier que d est en effet une distance et on va voir quelques propriétés topologiques de \mathcal{T} . L'inégalité triangulaire vient du fait que pour trois triangulations T, T', T'' on a $d(T, T'') \leq \max(d(T, T'), d(T', T''))$. Comme les graphes des triangulations sont connexes si $T|_n = T'|_n$ pour tout n , alors $T = T'$. Ces deux propriétés sont suffisantes pour montrer que d est une distance.

Une première remarque est que dans cette topologie les triangulations finies sont toutes des points isolés mais qu'elles forment un ensemble dense, en particulier cela implique que (\mathcal{T}, d) est séparable. Observons aussi que si T_n est une suite de Cauchy dans \mathcal{T} , alors pour tout k les $T_n|_k$ vont être égales à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite T_n converge dans \mathcal{T} , donc que \mathcal{T} est complet. Par contre si on imagine une suite de triangulations ayant de plus en plus d'arêtes sortant de la racine on peut voir que \mathcal{T} n'est pas compacte (ca serraient le cas si les degrés des sommets des triangulations serraient bornés).

Même si \mathcal{T} n'est pas compacte, la complétude et la séparabilité suffisent pour appliquer une technique classique pour prouver la convergence d'une suite de mesures, à savoir montrer que la suite en question est tendue et qu'elle converge ponctuellement. C'est ce qu'on va faire dans la prochaine partie pour construire la triangulation uniforme infinie du plan comme limite faible des triangulations uniformes finies de la sphère.

3 L'objet limite

Une fois le cadre de notre travail bien défini, on va suivre la démarche la plus usuelle pour l'étude des cartes. On va considérer les mesures uniformes sur les triangulations de taille n de la sphère et on va étudier leur convergence quand n tend vers l'infini. Une fois la convergence prouvée on va étudier la mesure limite. Le choix des mesures uniformes n'est pas le seul possible, d'autres choix peuvent être faits : la mesure uniforme sur les triangulations de la sphère de taille au plus n , la mesure uniforme sur les triangulations d'un certain polygone ou encore la mesure uniforme sur les triangulations avec une limite sur le degré des sommets. Les convergences des deux premières sont des conséquences simples de ce qu'on va faire, la dernière est par contre encore une conjecture.

Voici l'énoncé exacte de la construction dont on a parlé :

Théorème 7 (Angel, Schramm) *Notons τ_n la mesure uniforme sur les triangulations de la sphère de taille n . Alors τ_n converge faiblement quand n tend vers l'infini vers une mesure τ sur \mathcal{T} qu'on appellera la loi de l'UIPT.*

La preuve du théorème est longue et calculatoire et on ne va pas l'écrire ici, on va juste donner les idées principales. On commence par montrer la tension de la famille $(\tau_n)_{n \geq 1}$ en utilisant des compacts de la forme

$$K = \{ T \in \mathcal{T} \mid \forall x \text{ sommet de } T, \deg(x) < a_r \text{ ou } r \text{ est la distance de } x \text{ à la racine} \}$$

avec (a_n) une suite croissante. Par conséquent toute sous-suite de $(\tau_n)_{n \geq 1}$ contient une sous-suite faiblement convergente. On continue par prouver que la limite de toutes les sous-suites est la même en montrant que $\tau_n(B)$ converge pour tout B de la forme $B = T|_r$. Les deux parties sont basées sur des résultats donnés par Tutte sur le dénombrement des triangulations de taille fixée des polygones.

Ce théorème nous garantit l'existence de l'UIPT mais ne nous donne pas d'image concrète de cet objet, en particulier on ne comprend pas pourquoi on dit qu'il s'agit d'une triangulation du plan. On rappelle qu'on a imposé que les triangulations de \mathcal{T} soient localement finies, il s'en suit qu'il n'existe pas de triangulation infinie de la sphère donc que le support de l'UIPT est un sous-ensemble strict de S^2 . On va voir que le support de l'UIPT est toujours homéomorphe à la sphère privée d'un point, donc au plan, d'où le nom. Cela découle d'une propriété de l'UIPT, à savoir qu'il a p.s. un seul bout infini.

Définition 8 *On dit qu'un graphe infini G a un seul bout infini si pour tout sous-graphe fini H , $G \setminus H$ a une seule composante connexe infinie.*

On ne va pas donner ni la preuve du fait que l'UIPT a un seul bout infini, ni celle du fait que avoir un seul bout infini implique que le support est homéomorphe au plan, la première est calculatoire et la deuxième intuitive.

L'avantage de la construction qu'on vient de faire est, entre autre, qu'on peut énoncer des résultats asymptotiques sur les triangulations finies de manière beaucoup plus simple et claire. Une telle propriété est par exemple que l'UIPT est invariant par marches aléatoires, plus exactement si on fait partir une marche aléatoire de la racine de l'UIPT et qu'on l'arête après un nombre de pas et on prend le sommet auquel on est arrivé comme nouvelle racine, on obtient une nouvelle triangulation infinie aléatoire qui a la même loi que l'UIPT.

Malheureusement cette construction de l'UIPT ne nous permet pas d'aller très loin dans son étude. Ce ci vient du fait qu'on n'a jamais une bonne vision du voisinage de la racine. Si on note T_n la triangulations uniforme de taille n de la sphère, alors $(T_n|_1)_{n > 0}$ n'est jamais stationnaire. En particulier $T_n|_1$ peut même avoir n sommets ce qui est exclu pour tout $T_k|_1$ avec $k < n$. On voit donc que la suite T_n ne nous donne jamais l'image exacte même du voisinage le plus proche de la racine. Bien sur que la convergence faible fait que les voisinages de la racine dans T_n ressemble de plus en plus à celui de l'UIPT quand n augmente mais cela est gênant quand on veut étudier l'UIPT. Ce qu'on aimerait bien avoir est une suite $(\mathfrak{T}_n)_{n > 0}$ qui converge vers l'UIPT et telle que pour tout k $(\mathfrak{T}_n|_k)_{n > 0}$ soit stationnaire à partir d'un certain rang. Un tel processus est le processus d'épluchage qu'on va introduire dans la partie suivante.

4 Processus d'épluchage et applications

4.1 Construction du processus d'épluchage

Ce qu'on va essayer de faire dans cette partie est de construire l'UIPT en partant du triangle racine et en rajoutant successivement des triangles de façon aléatoire. On va obtenir ainsi une suite croissante de triangulations qui va

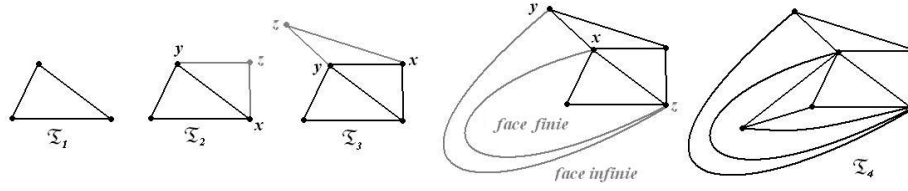


FIG. 3 – Les quatre premiers pas du processus d'épluchage

converger, sous certaines conditions, vers l'UIPT.

Dans la suite, on va noter $(\mathfrak{T}_n)_{n>0}$ le processus d'épluchage ; \mathfrak{T}_1 est tout simplement un triangle racine et pour tout $n \geq 1$ \mathfrak{T}_n est la triangulation d'un polygone. Le processus d'épluchage est une chaîne de Markov à valeurs dans les triangulations finies avec exactement une seule face extérieure ; décrivons sa loi de transition.

Plaçons nous au pas n de notre chaîne, comme on l'a annoncé \mathfrak{T}_n est la triangulation d'un polygone. On choisit une arête (x, y) sur le bord de \mathfrak{T}_n suivant une certaine stratégie (plusieurs stratégies sont possibles mais cela n'est pas très important pour l'instant). Comme (x, y) est sur le bord de \mathfrak{T}_n elle est déjà le côté d'un triangle (vers l'intérieur de la triangulation) mais on peut y coller un deuxième vers l'extérieur et c'est ce qu'on va faire pour passer à \mathfrak{T}_{n+1} . On peut faire cela de deux façons, une façon est de rajouter un nouveau sommet z extérieur à \mathfrak{T}_n et de rajouter à la triangulation déjà existante le triangle (x, y, z) et obtenir ainsi \mathfrak{T}_{n+1} . Une autre façon est de choisir un sommet z sur le bord de \mathfrak{T}_n et de rajouter le triangle (x, y, z) à la triangulation mais en faisant cela on obtient une triangulation avec deux faces extérieures, ce qui ne convient pas pour \mathfrak{T}_{n+1} . On va donc choisir une des deux faces extérieures et on va la trianguler avec une triangulation finie, obtenant ainsi une triangulation avec une seule face extérieure. Cette triangulation va être \mathfrak{T}_{n+1} . Mais comment faire tous ces choix pour garantir que \mathfrak{T}_n converge vers l'UIPT ? La réponse vient d'un lemme qu'on obtient encore à l'aide des dénombrements faits par Tutte.

Lemme 9 Soit $A \in \mathcal{T}$, finie, de taille n , avec $k \geq 1$ faces extérieures de tailles m_1, \dots, m_k et soit T une version de l'UIPT. Alors :

$$\mathbb{P}(A \subset T) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} \sum_{i=1}^k \frac{C_{m_i-2}}{Z_{m_i-2}} \prod_{l=1}^k Z_{m_l-2}$$

Comme T a un seul bout infini on sait que, conditionnellement à $A \subset T$, $T \setminus A$ contient une seule composante infinie. On peut donc partitionner l'évènement $A \subset T$ en $R_i(A) = \{A \subset T \text{ et la } i^{\text{ème}} \text{ face extérieure de } A \text{ contient la composante infinie de } T\}$ pour $1 \leq i \leq k$. On a alors :

$$\mathbb{P}(R_i(A)) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} \frac{C_{m_i-2}}{Z_{m_i-2}} \prod_{l=1}^k Z_{m_l-2}$$

De plus, soit T_i la composante sur la $i^{\text{ème}}$ face extérieure de A prise sous la loi de T conditionnée par $R_1(A)$. Alors :

- les triangulations T_i sont indépendantes pour $1 \leq i \leq k$;
- pour $i \geq 2$, T_i a une loi qui ne dépend que de m_i (dite la distribution libre d'un m_i -gone) ;
- T_1 à une loi qui ne dépend que de m_1 (dite la loi de l'UIPT d'un m_1 -gone).

Les quantités α , C_k et Z_k viennent des dénombrements des triangulations finies et ont des formes explicites mais qui ne sont pas très intéressantes à ce niveau. La loi qu'on a appelée distribution libre est aussi connue, c'est une combinaison linéaire de mesures uniformes sur des triangulations finies de tailles fixées. Ce qui est intéressant pour nous dans ce lemme est que la probabilité qu'une certaine triangulation se retrouve dans l'UIPT ne dépend que de la taille de la triangulation et de la forme de sa frontière. De plus si on conditionne l'UIPT à ce qu'il contienne une certaine triangulation A et qu'on regarde la triangulation d'une des faces de A on peut rencontrer à priori deux comportements : une triangulation finie ou infinie. Ce que le théorème dit est qu'une fois qu'on conditionne par l'un de ces événements, la triangulations de la face en question ne dépend plus que de la taille de sa frontière.

Revenons à la construction du processus d'épluchage ; en utilisant le lemme précédent on peut calculer la probabilité, conditionnellement à ce que \mathfrak{T}_n soit dans l'UIPT, que le sommet z soit extérieur à la frontière de \mathfrak{T}_n . On peut aussi calculer la probabilité de choisir pour z un certain sommet de la frontière de \mathfrak{T}_n et une des faces comme face infinie. Dans ce cas on va bien sur remplir la face finie par une triangulation choisie suivant la distribution libre. On sent bien que la chaîne construite ainsi va bien converger vers l'UIPT, cela est en effet vrai sous certaines conditions sur la stratégie de choix de (x, y) .

La première et la plus importante condition est que le choix de (x, y) au pas n soit mesurable par rapport à $\mathcal{F}((\mathfrak{T}_k)_{k \leq n})$. Cela fait que le processus (\mathfrak{T}_k) ai une structure arborescente. Plus exactement, sauf pour un ensemble de (ω, ω') de mesure nulle, $\mathfrak{T}_n(\omega) = \mathfrak{T}_n(\omega')$ implique que pour tout $k \leq n$ $\mathfrak{T}_k(\omega) = \mathfrak{T}_k(\omega')$. Ainsi, si T est une triangulation telle que $\mathbb{P}(\mathfrak{T}_n = T) > 0$, alors $\mathbb{P}(\mathfrak{T}_n = T) = \mathbb{P}(T \subset UIPT)$. La deuxième conditions est que le choix de (x, y) soit fait de sorte que la distance de la racine de \mathfrak{T}_n à la face extérieure tende vers l'infini. Sous ces deux conditions le processus d'épluchage converge faiblement vers l'UIPT et il converge même p.s. vers une version de l'UIPT.

4.2 Application : taille des voisinages de la racine

Une question très importante relative à l'UIPT et plus généralement aux cartes aléatoires est la taille asymptotique de la boule de rayon r , ce qui se traduit chez nous par l'étude de $|T|_r$ quand r tend vers l'infini, T étant un UIPT. Ce qu'on espère trouver est un nombre α tel que $r^{-\alpha} |T|_r$ converge faiblement quand r tend vers l'infini vers une loi non triviale. Des résultats physiques non rigoureux ainsi que des résultats mathématiques pour d'autres cartes ne font penser que le α cherché est 4 mais on n'arrive pas encore à prouver cela. Les

résultats qu'on va donner ici sur la croissance de $|T|_r$ vont dans le même sens mais nous montrent même pas que $r^{-4}|T|_r$ est borné. Par contre ils montrent que si un tel α existe c'est forcément 4. On va aussi regarder la taille de la frontière du voisinage de la racine et on va voir qu'elle est près de r^2 .

On va commencer par introduire deux notations : pour T un UIPT, $\overline{T|_r}$ est la sous triangulation de T formée de $T|_r$ et des triangulations de toutes ses faces extérieures à part celle qui contient la composante infinie de T , on l'appelle l'enveloppe de la boule de taille n ; on note $\partial\overline{T|_r}$ sa frontière. $|\partial\overline{T|_r}|$ est donc le nombre de sommets sur la frontière de la face extérieure infinie de $T|_r$. On va donner des résultats d'encadrement asymptotique pour les tailles de ces trois quantités. On va les donner tous car d'une par ils se démontrent l'un à partir de l'autre et d'autre par car les résultats sur la taille de la frontière et sur celle de l'enveloppe pourraient s'avérer très utiles. Les résultats exacts qu'on a sur les tailles des voisinages de la racine sont les suivants.

Théorème 10 (Angel)

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|\partial\overline{T|_r}|}{r^2(\log r)^3} < \infty$$

Et pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\partial\overline{T|_r}| (\log r)^{6+\epsilon}}{r^2} = \infty$$

Théorème 11 (Angel) Pour tout $\epsilon > 0$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|\overline{T|_r}|}{r^4(\log r)^{6+\epsilon}} < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\overline{T|_r}| (\log r)^{32/3+\epsilon}}{r^4} = \infty$$

Théorème 12 (Angel) Pour tout $\epsilon > 0$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|T|_r}{r^4(\log r)^{6+\epsilon}} < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|T|_r (\log r)^{30+\epsilon}}{r^4} = \infty$$

L'idée des démonstrations est de prendre pour le processus d'épluchage une stratégie qui le fait passer par les $\overline{T|_r}$ et d'étudier la taille de sa frontière. Il se trouve que cette taille est une chaîne de Markov et en étudiant aussi les moments n où $\mathfrak{F}_n = \overline{T|_r}$ on obtient le premier résultat. Au cours de ce calcul, on voit qu'il faut à peu près r^3 pas du processus d'épluchage pour arriver à $\overline{T|_r}$ mais en étudiant le nombre de points qu'on rajoute à chaque pas on tombe sur les encadrements du théorème ???. Pour passer de celui-ci au dernier résultat, il faut montrer que les faces extérieures finies de $T|_r$ ne contiennent pas un nombre trop grand de points.

4.3 Application : loi du tout ou rien et percolation sur l'UIPT

Commençons par expliquer ce que c'est que la percolation sur l'UIPT. Prenons $p \in [0, 1]$, T un UIPT et colorions les sommets de T en noir ou blanc, indépendamment l'un de l'autre, avec probabilité p en blanc et $1 - p$ en noir. La question qu'on se pose est s'il existe des composantes connexes blanches infinies, dans ce cas on dit qu'on a percolation. Pour les graphes fixes on a un théorème qui nous dit que pour tout p la probabilité d'avoir percolation est soit 0 soit 1. Grâce au processus d'épluchage on peut montrer que ce résultat reste valable pour l'UIPT et non seulement pour la percolation mais pour tout événement mesurable par rapport à T mais indépendant de tout $T|_n$.

Le résultat sur la percolation sur l'UIPT est analogue à celui sur la lattice triangulaire planaire.

Théorème 13 (Angel) *Pour $p \leq 1/2$ presque sûrement il n'y a pas percolation pour l'UIPT et pour $p > 1/2$ il y en a presque sûrement.*

La preuve de ce théorème part d'un processus d'épluchage qu'on construit tel qu'il ai toujours une frontière avec au plus une composante connexe de chaque couleur. Cela se fait en choisissant toujours une arête bicolore pour continuer le processus. Ainsi, si la frontière devient à un moment donné entièrement noire cela veut dire que la composante connexe blanche reliée à la racine est finie, si par contre la frontière contient toujours du blanc la composante connexe blanche de la racine est infinie. En étudiant le nombre de sommets de chaque couleur sur la frontière du processus d'épluchage (il s'agit toujours d'une chaîne de Markov dont on connaît la loi de transition) on arrive à la conclusion que pour $p < 1/2$ le blanc disparaît une infinité de fois, pour $p = 1/2$ les deux couleurs disparaissent une infinité de fois et pour $p > 1/2$ la probabilité que la racine soit dans une composante connexe infinie blanche est non-nulle. La loi du tout ou rien énoncée plus haut nous donne alors le résultat recherché.

Références

- [1] O. Angel. Growth and Percolation on the Uniform Infinite Planar Triangulation. *Geometric and Functional Analysis*, 13 (2003) pp. 935-974.
- [2] O. Angel et O. Schramm. Uniform Infinite Planar Triangulations. *Communications in Mathematical Physics*, 241 (2003) pp. 191-213.
- [3] J. Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge University Press (1996)
- [4] Ph. Chassaing, Br. Durhuus. Local limit of labelled trees and expected volume growth in a random quadrangulation. *Annals of Probability* vol. 34, nr. 3 (2006)
- [5] Ph. Chassaing, G. Schaeffer. Random Planar Lattices and Integrated Super-Brownian Excursion. *Probability Theory and Related Fields* 128, nr 2, feb 2004, pp. 161-212.

- [6] I.P. Goulden et D.M. Jackson. *Combinatorial enumeration*. New York, Wiley, (1983)
- [7] J.F Le Gall. *The Topological Structure of Scaling Limits of Large Planar Maps*. *Inventiones mathematicae*, vol. 169, nr. 3 (sept 2007) pp. 621-670.
- [8] V.M. Zolotarev. *One-Dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society, Providence RI (1986)