LE PRINCIPE DU MAXIMUM ET LA MÉTHODE DES SUR ET SOUS SOLUTIONS

MA YUE ET QIU YANQI

Introduction

Dans cet exposé de maîtrise, on va discuter les solutions des problèmes non-linéaires elliptiques suivants :

$$\begin{aligned} Lu + f(x,u) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ Bu &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, sauf mention contraire, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est de classe $C^{k,\alpha}(0 < \alpha < 1)$ avec $k \geq 2$, c'est-à-dire pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage Ude x, et une carte local $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^{k,\alpha}$, telle que $\varphi(U \cap \overline{\Omega}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$. L est un opérateur elliptique de degré 2 :

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

avec la matrice (a_{ij}) définie positive. B est l'un des opérateurs frontières :

$$Bu = u \quad \text{ou} \quad Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ici $\partial/\partial\nu$ signifie la dérivée par rapport à la normale extérieure, et on suppose toujours $\beta \geq 0$ définie sur le bord $\partial\Omega$. Souvent, on suppose de plus que tous les coefficients de L sont de classe C^∞ et que la matrice (a_{ij}) est uniformément elliptique sur Ω, i.e. la plus petite valeur propre $\lambda(x)$ de la matrice symétrique (a_{ij}) satisfait l'inégalité $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0, \forall x \in \Omega$. f est suppose être régulière au sens suivant : f est de classe C^1 par rapport à u, et de classe C^α par rapport à x. Et si on a besoin, on suppose aussi que le domaine est assez régulier.

Pour étudier cette équation, on fait d'abord l'énoncé et la preuve du principe du maximum, puis on prouve quelques résultats sur l'espaces de Sobolev, et après, on étudie semi-groupes des opérateurs, enfin, on donne la méthode de sur et sous solutions pour résoudre le problème (1), et aussi les problèmes paraboliques correspondants et la stabilité de la solution du problème (1).

Table des matières

1. Le principe du maximum

Dans cette section nous allons discuter des principes du maximum sur les opérateurs elliptiques et paraboliques.

1.1. Le principe du maximum pour les opérateurs elliptiques.

Lemme 1.1. *Si l'on a l'inégalité stricte suivante :*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0 \tag{2}$$

où L est elliptique dans Ω, et u est de classe C^2. Alors u n'atteint pas de maximum dans Ω.

Démonstration. Car la matrice $A = (a_{ij})$ est définie positive, $A = PP^T$, $P \in GL(n)$. Si u atteint le maximum local, on note $H = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})$. Donc $Lu = Tr(AH)$. Car u atteint un maximum local, en ce point H est définie négative. Donc $H = -QQ^T$ avec $Q \in GL(n)$. $Tr(AH) = -Tr[PQ(PQ)^T] \leq 0$, donc $Lu \leq 0$. Contradiction. □

Théorème 1.2 (de Hopf)**.** *Si u satisfait*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

dans un domaine Ω où L est uniformément elliptique. Supposons que les coéfficients a_{ij} et b_i sont uniformément bornés dans Ω. Si u atteint un maximum M en un point de Ω, on a $u \equiv M$.

Démonstration. Supposons que $u = M$ en un point $P \in \Omega$, et $u < M$ sur un autre point $Q \in \Omega$. On veut trouver une contradiction.

Soit un chemin γ dans Ω de Q à P. Notons R le premier point où u(R)=M. Soit d $= dist(\gamma, \Omega^c)$, on considère un point P_1 de γ sur la partie $\widehat{QR}$ telle que $dist(P_1, R) \leq \frac{1}{2}$d, on construit la plus grande boule ouverte , notée K, avec lcentre P_1 telle que $u < M$ dans K. Comme le rayon de cette boule est plus petit que $\frac{1}{2}$d, il est contenu dans Ω. On sait qu'il y a au moins un point, noté S, sur $\partial\Omega$ (frontière de Ω), telle que u(S)=M.

On construit une autre boule ouverte, notée K_1 avec le rayon noté r_1, de centre $\tilde{x}$, telle que $K_1 \subset K$ et que $\partial K_1 \subset K \cup \{S\}$,$\partial K_1 \cap \partial K = \{S\}$.

On construit une troisième boule ouverte K_2, avec centre S, de rayon $r_2 = \frac{1}{2} r_1$, notons $C_2' = \partial K_2 \cap \bar{K_1}, C_2'' = \partial K_2 \cap \bar{K_1}^c$

Comme $u < M$ sur le compact C_2', il existe une constante ξ>0, telle que

$$u \leq M - \xi \quad sur \quad C_2'$$

et

$$u \leq M \quad sur \quad C_2''$$

On note $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \ldots, \tilde{x_n})$. On définit la fonction auxiliaire

$$z(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}$$

où α est une constante positive à déterminer. Il'est clair que

$$\begin{aligned} z &> 0 \quad dans \quad K_1, \\ z &= 0 \quad sur \quad \partial K_1, \\ z &< 0 \quad \text{en dehors de} \quad K_1. \end{aligned}$$

par calcul on sait que

$$Lz = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_i)^2} \{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - \tilde{x_i})(x_j - \tilde{x_j}) - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} [a_{ii} + b_i(x_i - \tilde{x_i})]\}$$

Comme L est uniformément elliptique sur Ω, on a
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - \tilde{x_i})(x_j - \tilde{x_j}) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x_i}).$$
Comme $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x_i}) \geq \frac{1}{4}r_1^2$ sur K_2, on a que pour tout $x \in K_2$
$$Lz \geq \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x_i})}\{\alpha\mu_0 r_1^2 - 2\sum_{i=1}^{n}[a_{ii} + b_i(x_i - \tilde{x_i})]\}$$
en choisissant α assez grand, on a
$$Lu > 0 \qquad sur \quad K_2.$$
Donc on forme la fonction
$$w = u + \varepsilon z$$
avec
$$0 < \varepsilon < \frac{\xi}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}.$$
la fonction w satifait les propriétés suivantes :
(i) $w < M$ sur C_2'. Parce que
$$0 \leq z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$$
$\varepsilon z < \xi$ et $u \leq M - \xi$ sur C_2'. On a $w < M$.
(ii) $w < M$ sur C_2''. Ça découle du fait que $z < 0$ et $u \leq M$ sur C_2''.
(iii) $w = M$ en S. Comme $u(S) = M$ et $z(S) = 0$.
Par ces trois propriétés, on sait que w a un maximum dans K_1. Mais
$$Lu = Lu + \varepsilon Lz > 0 \qquad sur \quad K_2$$
Ceci contredit le lemme 1.1 $\square$

Remarque. *(i)Dans la démostration on a juste utilisé la condition que les a_{ij} et b_i soient localment uniformément bornées. Donc quand les a_{ij}, b_i sont continues sur Ω, ce théorème est encore vrai.*
(ii)Le domaine n'est pas nécessairement borné.
(iii)Quand on traiter l'équation
$$Lu = 0$$
par ce théorème, la solution n'atteint ni minimun ni maximum dans Ω

Lemme 1.3. *Si u satisfait l'inégalité différentielle*
$$(L + h)u > 0$$
avec $h \leq 0$, et L elliptique sur Ω, u n'atteint pas son maximum positif.

Ceci découle directement du calcul différentiel comme le lemme 1.1.

Théorème 1.4. *Si u satisfait l'inégalité différentielle*
$$(L + h)u \geq 0$$
avec $h \leq 0$, et L uniformément elliptique dans Ω. Si de plus les coefficients de L et h sont (localement) uniformément bornés (ou bien continus). Si u atteint son maximum positif sur Ω, on a $u \equiv M$

La démostration sera la même que celle du théorème 1.2 : on construit la fonction auxiliaire z de la même façon, et après on trouve une contradiction avec le lemme 1.1.3.

1.2. **Principe du maximum pour les opérateurs paraboliques.** Dans cette section on discute les opérateurs de la forme suivante :

$$\mathcal{P} = L - \frac{\partial}{\partial t}$$

où L est un opérateur elliptique(de la forme d'équation(2)). La région sur laquelle on travaille est de la forme $E_T = \Omega \times [0, T]$ où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5. *Un opérateur $\mathcal{P} = L - \frac{\partial}{\partial t}$ est dit uniformément parabolique si L est uniformément elliptique.*

D'abord on discute de l'opérateur parabolique de dimention 2. Les résultats plus généraux vont être vus plus tard

Théorème 1.6. *Si u satisfait*

$$\mathcal{P}u = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

sur $E_T = \Omega \times [0, T], \Omega \subset \mathbb{R}$, $a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ uniformément elliptique et a et b sont bornées. Si $u \leq M$ dans E_T et $u(x_1, T) = M$, on a $u = M$ en tout point $(x,t) \in E_T$ qui peuvent être connecté à (x_1, T) avec des segments horizentaux et verticaux allant vers le bas, qui se trouvent dans E_T.

Pour la preuve, on introduit 4 lemmes.

Lemme 1.7. *Si u satisfait*

$$\mathcal{P}u = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

sur $E_T = \Omega \times [0, T], \Omega \subset \mathbb{R}$, si $\mathcal{P}$ est uniformément parabolique, a, b sont bornées. Soit K un disque ouvert telle que $\bar{K} \subset E_T$. Supposons que le maximum de u sur E_T est M, et $u < M$ sur K, $u = M$ en un point P de ∂K.

Alors la droite tangente à ∂K en P est parallèle à l'axe x.

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{t}) \in E_T$ le centre de K,R le rayon de K. Supposons que P n'est pas ni le point "le plus haut" ni le point "le plus bas". On veut trouver une contradiction.

On peut supposer que P est le seule point de ∂K en lequel $u = M$. (Car si non, on peut utiliser la méthode dans la démonstration de théorème 1.2, construit un disque K' plus petit telle que $K' \subset K$ et $\partial K' \cap \partial K = \{P\}$)

Supposons $P = (x_1, t_1)$ avec $x_1 \neq \bar{x}$, on construit un disque K_1, avec centre P et rayon R_1 telle que

$$R_1 < |x_1 - \bar{x}|$$

et tel que $K_1 \subset E_T$. Notons $C' = \partial K_1 \cap \bar{K}$, $C'' = \partial K_1 \cap (\bar{K})^c$. Comme $u < M$ sur K et $C' \subset K$ est compact, il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$u \leq M - \eta \quad sur \quad C'$$

de plus, car $u \leq M$ sur E_T, on a

$$u \leq M \quad sur \quad C''$$

On définit la fonction auxiliaire

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2 - (t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}$$

pour $\alpha > 0$, on a

$$\begin{cases} v > 0 & dans \quad K \\ v = 0 & sur \quad \partial K \\ v < 0 & \text{en dehors de} \quad \bar{K} \end{cases}$$

Par calcul élémentair, on a

$$\mathcal{P}v = 2\alpha e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2 - (t-\bar{t})^2]}[2\alpha a(x-\bar{x})^2 - a - b(x-\bar{x}) + (t-\bar{t})]$$

donc on peut choisir un α grand tel que

$$\mathcal{P}v > 0 \quad pour \quad tout \quad (x,t) \in K_1 \cup \partial K_1$$

On définit la fonction :

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

où ε est une constante positive à déterminer. On sait déjà que

$$\mathcal{P}w = \mathcal{P}u + \varepsilon \mathcal{P}v > 0 \quad sur \quad K_1$$

Comme $u \leq M - \eta$ sur C', on peut choisir $\varepsilon > 0$ telle que

$$w = u + \varepsilon v < M \quad sur \quad C'$$

De plus, car $v < 0$ dehors $\bar{K}$ et $u \leq M$, on a :

$$w = u + \varepsilon v < M \quad sur \quad C''$$

Donc $w < M$ sur ∂K_1 et $w(P) = M$ car $v(P) = 0$.

Donc il y a un maximum de w dans K_1. Ceci et le fait que $Pw > 0$ contredit le lemme suivant. □

Lemme 1.8. *Si u satisfait*

$$\mathcal{P}u = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

sur E_T et $a(x,t) > 0$. Alors u n'atteint pas de maximum (même local).

Remarque. *Ceci découle directement du calcul différentiel classique.*

De plus, si on prend

$$\mathcal{P}u = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} + hu > 0$$

où $h \geq 0$ est unt fonction (localement bornée), alors u n'atteint pas de maximum positif.

Lemme 1.9. *Supposon que dans E_T, u satisfait*

$$\mathcal{P}u \geq 0$$

avec $\mathcal{P}$ uniformément parabolique. Supposont que $u < M$ en point $(x_0, t_0) \in E_T$, et $u \leq M$ dans E_T. Si l est un segment parallèle à l'axe x contenu dans E_T, qui passe à (x_0, t_0) alors $u < M$ sur l.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $u = M$ en un point $(x_1, t_0) \in E_T$ sur l. Quitte à inverser la direction de l'axe de x, on peut supposer que $x_1 < x_0$. De plus on peut supposer que pour tout $x_1 < x < x_0$, $u(x, t_0) < M$ en prenant $x_1 = sup\{x < x_0 | u(x,t_0) = M\}$. Soit

$$\mathrm{d} = min\{|x_0 - x_1|, dist(\overline{x_0 x_1}, \partial E_T)\}$$

Pour $x_1 < x < x_1 + \mathrm{d}$, on définit la fonction $d(x)$ distance de (x, t_0) au point le plus proche dans E_T oú $u = M$. Car $u(x_1, t_0) = M$, $d(x) \leq |x_0 - x_1|$. Par le lemme 1.7, le point, noté Q, qui satisfait $d(x) = dist((x,t,), Q)$, est soit directement au-dessous de (x, t_0) soit directement au-dessus de (x, t_0) (Ce qui veut dire que le segment $\overline{(x,t_0), Q} \perp l$,donc $Q = (x, t_0 \pm d(x))$.

On considère le point $(x + M, t_0)$, alors $dist((x+M, t_0), Q) = \sqrt{d(x)^2 + M^2}$. On voit que :

$$d(x+M) \leq \sqrt{d(x)^2 + M^2} \leq d(x) + \frac{M^2}{2d(x)}$$

En remplacant x par $x + M$ et M par $-M$, on a aussi

$$d(x+M) > \sqrt{d(x)^2 - M^2}$$

Suppose maintenant que $d(x) > 0$ et choisit $0 < M < d(x)$, on divise l'intervalle $(x, x+M)$ en n parties égaux et on applique ces deux inégalités, on a

$$d(x + \frac{j+1}{n}M) - d(x + \frac{j}{n}M) \leq \frac{M^2}{2n^2 d(x + (j/n)M)} \leq \frac{M^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2 - M^2}}$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, n-1$$

On fait la somme de $j = 0$ à $n-1$. Alors :

$$d(x+M) - d(x) \leq \frac{M^2}{2n\sqrt{d(x)^2 - M^2}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $n \to \infty$, on a

$$d(x+M) \leq d(x)$$

pour tout $M > 0$. Alors $d(x)$ n'est pas croissante en x. Comme $d(x) \leq x - x_1$, quand $x_1 \to x$, on sait que $d(x) \equiv 0$ pour $x_1 < x < x_1 + \mathrm{d}$. Ceci contredit le fait que $u(x, t_0) < M$ sur ce segment. □

Remarque. *Ce lemme dit que dans un segment s'il y a un point en lequel u atteint le maximum, $u = M$ partout sur ce segment.*

Lemme 1.10. *Soit le domaine : $K_{t_1} = \{(x,t) | (x-x_1)^2 + (t-t_1)^2 < R^2, t \leq t_1\}$ (c'est un semi-disque inférieure du disque $K = \{(x,t) | (x-x_1)^2 + (t-t_1)^2 < R^2\}$). Si u satisfait l'inégalité $\mathcal{P}u \geq 0$ où $\mathcal{P}$ est uniformément parabolique. Si $u < M$ dans la partie de K où $t < t_1$, alors $u(P) < M$, ici P est le centre de K.*

Démonstration. On définit la fonction auxiliaire

$$v(x,t) = e^{-[(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1)]} - 1$$

par calcul on a

$$\mathcal{P}u = e^{-[(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1)]}[4a(x-x_1)^2 - 2a - 2b(x-x_1) + \alpha].$$

En choisissant $\alpha > 0$ assez large, on a

$$\mathcal{P}v > 0 \quad dans \quad K \quad \text{pour } t \leq t_1$$

La parabole

$$(x-x_1)^2 + \alpha(t-t_1) = 0$$

est tangente au segment $t = t_1$ en P. Notons C' la partie de ∂K au-dessous de la parabole (contenant les points extrêmes), C'' la partie de la parabole dans K. Notons D la rigion entre C' et C''. Car C'est compact et $u < M$ dans K_1, il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$u \leq M - \eta \quad sur \quad C'$$

On construit la fonction

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

où ε est une constante positive à choisir. On trouve que $v = 0$ sur C''. Donc on peut choisir un ε telle petit que les propriétés suivantes sont réalisées :

$$(i) \quad \mathcal{P}w = \mathcal{P}u + \varepsilon\mathcal{P}v > 0 \quad dans \quad D$$
$$(ii) \quad w = u + \varepsilon v < M \quad sur \quad C'$$
$$(iii) \quad w = u + \varepsilon v \leq M \quad sur \quad C''$$

Supposons que $u(P) = M$

De (i) on sait que dans D, w n'atteint pas le maximum (lemme 1.8), donc le maximum de w dans $\bar{D}$ est M et que w l'atteint en P. Par calcul différentiel on a

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geq 0 \quad en \quad P$$

Par calcul on a en P, $\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha < 0$ donc on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} > 0 \quad en \quad P$$

Mais comme le maximum de u est atteint en P, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \quad en \quad P$$

Ceci contredit le fait que $\mathcal{P}u \geq 0$ □

Démonstration. (du théorème 1.2.1.) Supposons que $u(x_1, t_0) < M, \quad t_0 < T$. Notons le segment $l_1 = \{(x,t)|x = x_1\}$. On prend $\tau = sup\{t|(x_1,t) \in E_T, u(x_1,t)\} < M$. Notons $P = (x_1, \tau)$ Par contimuité, $u(P) = M$. Par le lemme 1.9, on a : il existe un $R > 0$ telle que pour tout $(x,t), \quad |x - x_1| < R, \quad t_0 < t < \tau$ on a $u(x,t) < M$. Ceci contredit le lemme 1.10. □

Lemme 1.11. *Soit la région $E_{t_0} = \{(x,t) \in E_T | t \leq t_0\}$, Supposons que u satisfait*

$$\mathcal{P}u = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

et que $\mathcal{P}$ est uniformément parabolique. Supposons que a, b soient bornés, et que u soit de classe C^1. En un point $P = (x_0, t_0) \in \partial E_{t_0}$, $u(P) = M$, pour tout $(x,t) \in E_{t_0}$, $u(x,t) < M$ et que P se trouve sur le bord d'un disque $K \subset E_T$ qui tengent ∂E_T en P avec le centre (x_1, t_1), $x_1 \neq x_0$. Notons $K_{t_0} = K \cap E_{t_0}$, Si on note $\frac{\partial u}{\partial \mu}$ la dérivée par rapport à la normale extérieure de E_{t_0} en P, alors

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} > 0 \qquad en \quad P$$

Démonstration. On construit un disque K_1 de centre P est de rayon $R < |x_0 - x_1|$. Notons $C' = \partial K_1 \cap K_{t_0}$ (contient les points extrêmes), $C'' = \partial K \cap E_{T_0}$. on note la partie $D = K_{T_0} \cap K_1$, donc la frontiere de D est C', C'' et la partie du segment $t = t_0$.

On a les propriétés suivantes :

$(i) u < M$ sur $C'' - P$

$(ii) u = M$ en P

(iii) Il existe une constante $\eta > 0$ telle que $u \leq M - \eta$ sur C'.

On construit la fonction auxiliaire

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-x_1)^2 + (t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2},$$

on a

$$\mathcal{P}v = 2\alpha e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha(x-x_1)^2 - a - b(x-x_1) + (t-t_1)]$$

Donc pour α suffisamment grand, on a

$$\mathcal{P}v > 0 \text{ pour tout } (x,t) \text{ en } D.$$

On construit la fonction

$$w = u + \varepsilon v$$

La propriété (iii) nous permet de choisir un ε assez petit pout que

$$\begin{cases} \mathcal{P}w > 0 \text{ sur } D \\ w < M \text{ sur } C' \end{cases}$$

Comme $v = 0$ sur ∂K, on a

$$w < M \text{ sur } C'' - \{P\}$$

et $w(P) = M$.

Dans D, on applique le principe du maximum (Théorème 1.6). on obtient que le maximum de u sur $D \cup \partial D$ est atteint seulement en point P, donc en P

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \frac{\partial u}{\partial \mu} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial \mu} \geq 0.$$

Mais par calcul on a $\frac{\partial v}{\partial \mu} < 0$. Donc $\frac{\partial u}{\partial \mu} > 0$ □

Remarque. *(i) Si l'on prend l'opérateur de la forme*

$$\mathcal{P} = L - \frac{\partial}{\partial t} + h$$

Où $h \leq 0$ est une fonction (localement) bornée, alors on prend la même fonction auxiliaire $v = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2-(t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}$ dans le même domaine du lemme 1.7, par calcul,

$$\mathcal{P}v = 2\alpha e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2-(t-\bar{t})^2]}[2\alpha a(x-\bar{x})^2 - a - b(x-\bar{x}) + (t-\bar{t}) + \frac{h}{2\alpha}] - he^{-\alpha R^2}.$$

Car $h \leq 0$ est bornée, on peut choisir α assez grand tel que $\mathcal{P}v > 0$. En suivant la démostration du lemme 1.7(conclu par une contradiction à la remarque après le lemme 1.8), on trouve que :

Si le maximum de u dans E_T est $M \geq 0$ et $u < M$ dans un disque K, $u = M$ en un point P de ∂K. Alors la droite tangente à ∂K en P est parallèle à l'axe x.

Par la même démostration du lemme 1.9, on a :

Supposon que dans E_T, u satisfait

$$\mathcal{P}u \geq 0$$

avec $\mathcal{P}$ uniformément parabolique. Supposont que $u < M$ en le point $(x_0, t_0) \in E_T$, et $u \leq M$ sur E_T. Si l est un segment parallèle à l'axe x contenu dans E_T, alors $u < M$ sur l. Ici on suppose $M \geq 0$

Pour le lemme 1.10, on prend la fonction auxiliaire

$$v(x,t) = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]} - 1$$

Par clecul,

$$\mathcal{P}u = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}[4a(x-x_1)^2 - 2a - 2b(x-x_1) + \alpha + h] - h$$

Car $h \leq 0$ est borné, on peut aussi choisir un α assez grand tel que $\mathcal{P}u > 0$ et puis on suit la même méthod de la démonstration du lemme 1.10.

(ii) Touts les lemme et théorème de 1.2.1 à 1.11 sont encore vrais dans le car où la dimention est plus grande.

Le lemme 1.8 est encore vrai dans le car de dimention grande : car $L = L - \frac{\partial}{\partial t}$ où $\mathcal{L}$ est elliptique, par le lemme 1.1, si u atteint le maximum, $Lu \leq 0$, et $\frac{\partial}{\partial t}u = 0$. Donc $\mathcal{P}u \leq 0$, contradiction.

Dans le lemme 1.7, on pend les hyperplants à la place des droites. Pour la démostration, on prend encore les boules par la même méthode et la fonction auxiliaire

$$v(x,t) = e^{-\alpha[\sum_i^n (x_i-\bar{x}_i)^2-(t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}v &= Lv - \frac{\partial v}{\partial t} \\
&= e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_i)-(t-\bar{t})]}\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i(x_i-\bar{x}_i)]\} \\
&- 2\alpha e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_i)-(t-\bar{t})]}(t-\bar{t}) \\
&= e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_i)-(t-\bar{t})]} \\
&\times \{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i(x_i-\bar{x}_i)] - 2\alpha(t-\bar{t})\}
\end{aligned}$$

Car L est uniformément elliptique,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_i)^2$$

Par la même critique du théoème 1.2, $\mathcal{P}v > 0$, par la démostration du lemme 1.7, on sait qu'il est encore vrai.

Le lemme 1.9 dans la cas de dimension grande découle du lemme 1.7 de version de dimension grande.

Pour le lemme 1.10, on prend la fonction auxiliaire $v = e^{-[\sum_i^n (x_i - \bar{x_i})^2 - (t-\bar{t})^2]} - 1$*, et on considère la parabole* $\sum_i^n (x_i - \bar{x_i})^2 - (t-\bar{t})^2 = 0$*. Les choses restes sont les mêmes que ceux-là du lemme 1.10.*

(iii) Dans le cas où la dimension est plus grande, le (i) est encore vrai. Les démonstration sont mêmes que ceux-là dans (i) par les fonctions auxiliaires dans (ii).

Ce qu'on utilisera dans les parties suivantes sont (ii) et (iii).

2. Quelques résultats sur l'espace de Sobolev

Définition 2.1. *Pour tout* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert, et* $p \in [1, \infty]$*, on définit l'espace de Sobolev :*

$$W^{k,p}(\Omega) =: \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \textit{tel que} \quad |\alpha| \leq k\}$$

Toutes les dérivées ici sont au sens des distributions. Et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ *une norme :*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} =: \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Définition 2.2. *Avec les même notations, on définit* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *comme l'adhérence de sous-ev* $C_c^k(\Omega)$ *dans* $W^{k,p}(\Omega)$*, ou de façon équivalente, on prend* $\mathcal{D}(\Omega)$ *au lieu de* $C_c^k(\Omega)$*.*

On note $H^k(\Omega) =: W^{k,2}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) =: W_0^{k,2}(\Omega)$, ce sont des espaces de Hilbert.

Remarques. (1) *Tous les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.*

(2) *On observe une inclusion continue pour les normes évidentes :*

$$\begin{aligned} \Phi : W^{k,p} &\hookrightarrow (L^p)^{N+1} \\ u &\longmapsto (u, D^{\alpha_1} u, \cdots, D^{\alpha_N} u) \end{aligned}$$

où α *parcours tous les possibilités :* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\alpha| \leq k$*. Et on en déduit les propriétés de la réflexivité et la séparabilité dont ne fait pas l'énoncé ici.*

(3) *On peut faire la même chose pour* $W_0^{k,p}(\Omega)$*.*

Définition 2.3. *Une fonction* $u \in C(\Omega)$ *est dite dans* $C^\alpha(\Omega)$*, pour* $\alpha \in (0,1)$*, si*

$$H_\alpha =: \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

on munit $C^\alpha(\Omega)$ *une norme définie par*

$$|u|_\alpha =: \|u\|_\infty + H_\alpha.$$

on aussi définit l'espace $C^{m,\alpha}(\Omega)$*, consiste les fonctions* $u \in C(\Omega)$ *telles que*

$$|u|_{m,\alpha} =: \|u\|_\infty + \sum_{\beta : 0 < |\beta| \leq m} |D^\beta u|_\alpha < \infty.$$

Les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Théorème 2.4.

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si \ p < n \\ C(\overline{\Omega}) & si \ p > n. \end{cases}$$

où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *,i.e.* $p^* = np/(n-p)$*, et le symbole* $\hookrightarrow$ *signifie une injection continue. De plus,on a les inégalités : pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*,*

$$\begin{aligned} \|u\|_{p^*} &\leq C \|Du\|_p \quad si \quad p < n, \\ \|u\|_\infty &\leq M \|Du\|_p \quad si \quad p > n. \end{aligned}$$

Ici, C *ne dépend que de* n, p*,* M *ne dépend que de* n, p *et du diamètre de* Ω*.*

Démonstration. On va commencer par démontrer la première inégalité de l'estimation (2.4) pour $u \in C_0^1(\Omega)$. Dans le cas où $p = 1$, on a pout tout $i, 1 \leq i \leq n$:

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x) \mathrm{d}x_i \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x)| \mathrm{d}x_i$$

et donc

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x)| \mathrm{d}x_i \right)^{1/(n-1)}.$$

Puis on intègre par rapport à chaque variable x_i, on observe que chaque fois que l'on fait l'intégration, il y a un facteur ne dépend pas de x_i, ceci on-permet d'appliquer l'inégalité de Hölder plus générale : $\|u_1 \cdots u_m\|_1 \leq \|u_1\|_{p_1} \cdots \|u\|_{p_m}$, lorsque $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. On obtient l'inégalité :

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\partial_i u| \mathrm{d}x \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |\partial_i u| \mathrm{d}x$$

d'où $\|u\|_{n/(n-1)} \leq C\|Du\|_1$.

Pour $p > 1$, on observe que $u \in C_c^1(\Omega)$, implique $|u|^{\alpha-1}u \in C_c^1(\Omega)$ pour tout $\alpha > 1$, de plus, on a $D(|u|^{\alpha-1}u) = \alpha|u|^{\alpha-1}Du$. Donc on a :

$$\||u|^{\alpha}\|_{n/(n-1)} \leq \alpha C\||u|^{\alpha-1}Du\|_1 \leq C\||u|^{\alpha-1}\|_{p'}\|Du\|_p$$

si on prend α tel que $\alpha\frac{n}{n-1} = p'(\alpha - 1)$ i.e. $\alpha = p^*(1 - \frac{1}{n}) > 1$ on peut exactement obtenir l'inégalité que l'on veut : $\|u\|_{p^*} \leq \alpha C\|Du\|_p$, et par la définition de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, cette inégalité reste encore vraie pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Pour le cas où $p > n$, on ne donne pas la démonstration ici, par contre, on va donner un résultat plus fort ci-dessous. □

Corollaire 2.5. *On a des inclusions continues :*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-l,p_l^*}(\Omega)$$

en particulier, on a :

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p_k^*}(\Omega) & si \;\; kp < n \\ C^m(\overline{\Omega}) & si \;\; 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

où on définit $p_0^* = p, p_l^* = (p_{l-1}^*)^*$, *i.e.* $\frac{1}{p_l^*} = \frac{1}{p_{l-1}^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$

Démonstration. Il suffit de montrer le corollaire dans le cas où $l = 1$: $\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, par l'inégalité de Sobolev, on sait que $u \in W_0^{k-1,p^*}(\Omega)$, d'où une inclusion de $W_0^{k,p}(\Omega)$ dans $W_0^{k-1,p^*}(\Omega)$, et si on a une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ qui converge à la fois vers $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{W_0^{k,p}}$, et vers $v \in W_0^{k-1,p^*}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{W_0^{k-1,p^*}}$, alors $u = v$ p.p. et par le théorème du graphe fermé, on a la continuité de cette inclusion. □

Remarque. *En général, on ne peut pas remplacer $W_0^{k,p}(\Omega)$ par $W^{k,p}(\Omega)$ dans le théorème précédent, mais si on inclut la régularité du bord du domaine, par exemple, si on suppose que Ω a pour bord Lipschitzinne, on a les inclusions continues :*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{np/(n-kp)}(\Omega) & si \;\; kp < n \\ C_b^m(\Omega) & si \;\; 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

Lemme 2.6. *Pour $p > n$, et $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, il existe $C > 0$,tel que pour toute $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. On note par C_ρ un cube de coté de longueur ρ dont l'origine est un point d'intérieur, on a :

$$|u(x)-u(0)| = \left|\int_0^1 x\cdot\nabla u(tx)\mathrm{d}t\right| \leq \rho\int_0^1 |\nabla u(tx)|\mathrm{d}t \quad \forall x\in C_\rho.$$

Alors, on a :

$$\left|\frac{1}{\rho^n}\int_{C_\rho} u(x)\mathrm{d}x - u(0)\right| \leq \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^1 \mathrm{d}t\int_{C_\rho}|\nabla u(tx)|\mathrm{d}x = \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^n}\int_{C_{t\rho}}|\nabla u(y)|\mathrm{d}y$$

et par l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_{C_{t\rho}}|\nabla u(y)|\mathrm{d}y \leq \left(\int_{C_{t\rho}}|\nabla u|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{C_{t\rho}}\mathrm{d}y\right)^{1/p'} \leq M(t\rho)^{n/p'}\|u\|_{W^{1,p}},$$

on en déduit finalement :

$$\left|\frac{1}{\rho^n}\int_{C_{t\rho}} u(x)\mathrm{d}x - u(0)\right| \leq C\rho^\alpha\|u\|_{W^{1,p}}.$$

On peut refaire tous les arguments si on remplace 0 par un autre point y dans l'intérieur de C_ρ, on en déduit $|u(x)-u(y)|$ est contrôlé par $2C\rho^\alpha\|u\|_{W^{1,p}}$ lorsque $x,y\in C_\rho$, et on peut aussi refaire tous les arguments pour n'importe quel cube de coté de longueur ρ, dans la démonstration, C ne dépend pas du cube que l'on a choisi, donc le résultat est vrai. □

Théorème 2.7. *Pour $p>n$, on a des inclusions continues :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$$

sur $C(\mathbb{R}^n)$, on prend la topologie de convergence sur tout compact qui le rend un espace de Fréchet. Le résultat plus fort est :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

où $\alpha = 1-\frac{n}{p}$, et on prend la topologie sur $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ connu qui le rend un espace de Fréchet.

Remarque. *En effet, on a : $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, on va utiliser cette remarque dans la démonstration suivante.*

Démonstration. Pour tout $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers u pour la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, pour un compact $K\subset\mathbb{R}^n$ fixé, et on applique le lemme (2.6), on trouve que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_K$, donc elle est une suite de Cauchy dans l'espace de Fréchet $C(\mathbb{R}^n)$, et il est clair que la limite de cette suite dans $C(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec u p.p. donc on a l'inclusion naturelle de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ par $C(\mathbb{R}^n)$. Puis cette inclusion est continue, avec le théorème du graphe fermé, c'est trivial.

Pour la deuxième partie de théorème, on a :

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi on voit que la suite qu'on vient d'utiliser est de Cauchy dans l'espace de Fréchet $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tous les autres sont ressemble à la première partie de la démonstration. □

Remarque. *Si on remplace $\mathbb{R}^n$ par Ω dans le théorème (2.7), on a le théorème de Morrey qui nous-donne le même résultat :*

$$\textit{pour tout}\ \ p>n, W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})\ \ \textit{de façon continue}$$

Corollaire 2.8. *Pour k plus grand, on suppose $k-\frac{n}{p}-1\leq m<k-\frac{n}{p}$ et $\alpha = k-m-\frac{n}{p}\in(0,1]$. Si $0<\alpha<1$, alors on a l'inclusion continue :*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n),$$

et si $\alpha = 1$, alors pour tout $0 < \beta < 1$, on a l'inclusion continue :

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\mathbb{R}^n).$$

les résultats ici sont encore vrais si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un domaine Ω de bord assez régulier.

On distingue ici un résultat essentiel qu'on va utiliser dans le texte suivant.

Lemme 2.9. *Pour tout $p > n$, et tout Ω assez régulier, on a l'inclusion continue :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

où $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, on peut écrire pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$:

$$|u|_{m-1,\alpha} \leq K\|u\|_{W^{m,p}}.$$

où K est une constante.

3. La construction des solutions par la méthode monotone

3.1. **Problèmes elliptiques.** Ici, on va utiliser une méthode appelé la méthode monotone pour construire la solution du problème (1). Pour commencer, on donne les définitions de sous et sur solutions du problème (1).

Définition 3.1. *Une fonction $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ est dite une sur solution du problème (1), si on a :*

$$Lu_0 + f(x, u_0) \leq 0, \quad \text{et} \quad Bu_0 \geq g;$$

de même façon, on dit $v_0 \in C^2(\Omega) \cap C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ est une sous solution de problème (1), si on a :

$$Lv_0 + f(x, v_0) \geq 0, \quad \text{et} \quad Bv_0 \leq g.$$

Et on admet ici quelques résultats importants qu'on va utiliser dans la construction de la solution du problème (1)

Théorème 3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de classe $C^{k,\alpha}$, avec $k \geq 2$, et soient $c(x) \leq 0$, f et les coefficients de l'opérateur L bornés de classe C^{α}. Alors, pour toute φ fonction continue sur $\partial\Omega$, le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

a une unique solution $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Lemme 3.3. *Soit $c(x) \leq 0$, et soit $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors il existe C, indépendant de f, g, tel que

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C(\|f\|_p + \|g\|^*_{m-1/p}),$$

où $m = 2$, si $Bu = u$ et $m = 1$ si $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u$, et

$$\|g\|^*_{m-1/p} =: \inf_{\substack{v \in C^m(\overline{\Omega}) \\ v|_{\partial\Omega} = g}} \|v\|_{W^{m,p}}.$$

Lemme 3.4. *Soient $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ si $Bu = u$, $g \in C^{2,p}(\partial\Omega)$ si $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u$, et $c(x) \leq 0$, non identiquement nulle si $\beta \equiv 0$, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors on a l'estimation de Schauder :

$$|u|_{2,\alpha} \leq C\left(|f|_{\alpha} + |g|_{1,\alpha}\right),$$

où C ne dépend pas de u, f et g.

Théorème 3.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de classe au moinss $C^{2,\alpha}$, et soient $u_0, v_0 \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ deux fonctions $u_0(x) \geq v_0(x)$ telles que :*

$$Lu_0 + f(x, u_0) \leq 0, \quad Bu_0 \geq g$$

$$Lv_0 + f(x, v_0) \geq 0, \quad Bv_0 \leq g.$$

Supposons f est C^1 par rapport à u sur $\min v_0 \leq u \leq \max u_0$. Alors, il existe une solution régulère w du problème (1) :

$$w \in C^2(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad Lw + f(x, w) = 0, \quad Bw = g.$$

De plus, on a $v_0 \leq w \leq u_0$.

Démonstration. La fonction $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)$ est continue sur $\overline{\Omega} \times [\min v_0, \max u_0]$, donc bornée. On prend M assez grand, tel que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) + M > 0, \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall u \in [\min v_0, \max u_0].$$

On définit un opérateur T de la façon suivante : $v = Tu$, où v est l'unique solution de

$$\begin{cases} (L - M)v = -[f(x, u) + Mu], \\ Bv = g. \end{cases}$$

L'opérateur T est continue de $C^\alpha(\overline{\Omega})$ vers $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ par l'estimation de Schauder pour le problème elliptique à condition limite, de plus T est strictement monotone au sens : si $v \leq u$,et $u \neq v$, alors $Tv < Tu$ dans Ω. En effet, on a :

$$\begin{cases} (L - M)Tu = -[f(x, u) + Mu], \\ BTu = g, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (L - M)Tv = -[f(x, v) + Mv], \\ BTv = g. \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} (L - M)(Tu - Tv) = -[f(x, u) - f(x, v) + M(u - v)], \\ B(Tu - Tv) = 0. \end{cases}$$

Or $f(x, u) - f(x, v) + M(u - v) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x, \xi) + M\right)(u - v) \geq 0$, si on prend $w = Tu - Tv$, on a :

$$(L - M)w \leq 0, \quad Bw = 0.$$

Par le principe du maximum fort, $w > 0$ dans Ω, ou $w \equiv 0$, ce qui est exclu.

Maintenant, on définit $u_1 = Tu_0$ et $v_1 = Tv_0$. On montre que $u_1 < u_0$ et $v_1 > v_0$. Par la définition, on a

$$\begin{cases} (L - M)u_1 = -[f(x, u_0) + Mu_0], \\ Bu_1 = g, \end{cases}$$

donc en considérant l'hypothèse, on a

$$\begin{cases} (L - M)(u_0 - u_1) = Lu_0 + f(x, u_0) \leq 0, \\ B(u_0 - u_1) \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum dit alors que $u_0 - u_1 > 0$ i.e.$u_1 < u_0$ dans Ω (Ici on suppose que u_0 n'est pas une solution de problème (1), sinon, il n'y a rien à montrer). On montre $v_1 > v_0$ par le même raisonnement. Par la monotonie de T, $v_1 < u_1$. Ainsi, par récurrence sur k, on définit $u_k = Tu_{k-1}$, et $v_k = Tv_{k-1}$, alors on a $v_k < u_k$ dans Ω, et donc on obtient une suite suivante :

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_k < \cdots < u_k < \cdots < u_1 < u_0.$$

Puisque les suites $(u_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 0}$ sont monotones, on peut définir :

$$\tilde{u}(x) = \lim_{k \to \infty} u_k(x), \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x) = \lim_{k \to \infty} v_k(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

On va noter $\varphi_k =: -[f(x,u_k) + Mu_k]$ et $\tilde{\varphi} =: -[f(x,\tilde{u}) + M\tilde{u}]$, la suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ est bornée pour la norme uniforme, et $\varphi_k \to \tilde{\varphi}$ simplement lorsque $k \to \infty$, on a donc $\varphi_k \xrightarrow{L^p} \tilde{\varphi}$ pour tout $p \in [1,\infty)$ par le théorème de la convergence dominée. On choisit $p > n$, pour tout m, k

$$\begin{cases} (L-M)(u_m - u_k) = \varphi_m - \varphi_k, & \text{dans } \Omega, \\ B(u_m - u_k) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

par le lemme 3.3, $\|u_m - u_k\|_{W^{2,p}} \leq C\|\varphi_m - \varphi_k\|_p$, la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, on arrive à la convergence $u_k \to \tilde{u}$ dans l'espace $W^{2,p}(\Omega)$. Puis, le lemme 2.9 permet de dire $u_k \to \tilde{u}$ lorsque $k \to \infty$ dans l'espace de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. La suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est bornée, donc la suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ l'est aussi. Le lemme 3.4 permet d'écrire $|u_m - u_k|_{2,\alpha} \leq C|\varphi_m - \varphi_k|_\alpha$, d'où la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est bornée dans l'espace de Hölder $C^{2,\alpha}(\Omega)$ Par le théorème d'Ascoli-Arzela, de toute sous suite de $(u_k)_{k\geq 0}$, on peut extraire une sous-sous suite qui converge dans $C^2(\Omega)$, et par la convergence simple, on sait sa limite est $\tilde{u}$, on en déduit facilement que $u_k \to \tilde{u}$ dans $C^2(\Omega)$. Donc on a :

$$Lu_k \to L\tilde{u}, \quad \varphi_k \to \tilde{\varphi}, \quad \text{et} \quad Bu_k \to B\tilde{u} \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty.$$

On fait $k \to \infty$ pour le système

$$\begin{cases} (L-M)u_{k+1} = -[f(x,u_k) + Mu_k] & \text{dans } \Omega, \\ Bu_k = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} (L-M)\tilde{u} = -[f(x,\tilde{u}) + M\tilde{u}] & \text{dans } \Omega, \\ Bu = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} L\tilde{u} + f(x,\tilde{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ Bu = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc $\tilde{u}$ est une solution classique du problème (1). Le même raisonnement dit que $\tilde{v}$ est aussi une solution du problème (1). ☐

Corollaire 3.6. *Les solutions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ construites dans la preuve du théorème 3.5 sont les solutions maximale et minimale telle que $v_0 \leq u \leq u_0$, i.e. si w est une autre solution du problème (1) telle que $v_0 \leq w \leq u_0$, alors $\tilde{v} \leq w \leq \tilde{v}$.*

Démonstration. w est une solution du problème (1) si et seulement si $w = Tw$. Puisque T est monotone, on a $Tv_0 \leq Tw \leq Tu_0$, i.e. $v_1 \leq w \leq u_1$, par récurrence sur k, $v_k \leq w \leq u_k$, on fait $k \to \infty$, alors $\tilde{v} \leq w \leq \tilde{u}$. ☐

3.2. **Problèmes paraboliques.** Dans cette section on considère le problème de Cauchy suivant :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathcal{P}u = Lu + f(x,u) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \textit{dans} \quad E_T, \\ Bu = g(x,t) \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = g(x) \quad \textit{sur} \quad E_T \cap \{t = 0\}. \end{cases}$$

Où $E_T = \Omega \times [0,T]$.

Définition 3.7. *Une fonction u_0 est dite une sur solution si*

$$\begin{cases} Lu_0 + f(x,u_0) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \leq 0, \\ Bu_0 \geq g. \\ u_0(x,0) \geq g(x). \end{cases}$$

On définit de même façon la sous solution.

Théorème 3.8. *Si pour le problème (3), il existe une sur solution u_0 et une sous solution v_0, $u_0 \geq v_0$, alors il existe une solution classique du problème (3)*

Démonstration. (existence) Comme dans la démonstration du problème elliptique, on forme la suite monotone de u_0 :

$$(\mathcal{P} - M)u_1 = -[f(x, u_0) + Mu_0]$$

et

$$(\mathcal{P} - M)u_1 \leq -[f(x, u_0) + Mu_0]$$

On en déduit

$$(\mathcal{P} - M)(u_1 - u_0) \geq 0$$
$$(u_1 - u_0)|_{\partial E_T} \leq 0$$

Une fois qu'on puisse montrer que $u_1 \leq u_0$, par la construction de cette suite (même que celui du problème elliptique), on sait que $\{u_n\}$ est décroissante.

Donc si $max\{u_1 - u_0|(x, t) \in \overline{E_T}\} > 0$ on sait que ce maximum est atteint en $(x_1, t_1) \in E_T$, donc par le troisième lemme dans la section du principe du maximum parabolique, on a $u_1 - u_0 = M > 0$ dans l'hyperplan $t = t_1$. Ceci contredit la condition bornée $u_1 - u_0 \leq 0$ et le fait que $u_1 - u_0$ est continue dans $\overline{E}_T$. Donc $u_1 \leq u_0$.

Dans le cas où $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u$. De même, on a

$$(\mathcal{P} - M)u_1 = -[f(x, u_0) + Mu_0]$$
$$B(u_1 - u_0)|_{\partial E_T} \leq 0$$

Si $M = max\{u_1 - u_0|(x, t) \in \overline{E_T}\} > 0$.

Si ce maximum n'est pas atteint dans E_T, on sait qu'il est atteint en un point$P = (x_0, t_0) \in \partial E_T$, donc $\beta\frac{\partial u}{\partial \nu}|_P \geq 0$, $u(P) > 0$, ceci contredit la condition aux bords.

Si ce maximum est atteint en $P = (x_0, t_0) \in E_T$, par le lemme 1.9, $u = M$ dans l'hyperplan $t = t_0$, donc si $Q \in \partial E_T \cap t = t_0$, $\beta\frac{\partial u}{\partial \nu}|_Q = 0$, u(Q)=0, donc $Bu > 0$, contradiction.

Donc ceci forme une suite croissante (pas strictement).

□

Sur la régularité, on construit d'abord la solution fondamentale.

Définition 3.9. *Soit $\mathcal{P}$ est un opérateur parabolique définit dans une région $E_T = \Omega \times [0, T]$, une solution fondamentale $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ de $\mathcal{P}$ est une fonction définite dans $\Omega \times (0, T) \times \Omega \times (0, T) \cap \{t > \tau\}$ telle que les propriétés suivantes*

$$\forall(\xi, \tau) \in \Omega \times (0, T) \quad \mathcal{P}[\Gamma] = 0;$$
$$\forall f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \quad \lim_{t \to \tau^+} \int_{E_T} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi d\tau = f(x)$$

soient vérifiées.

Définition 3.10. *On dit l'opérateur $L + c(x, t) - \frac{\partial}{\partial t}$ est de A_2 si tout les coefficients de L sont continues, et $\forall(x, t), \quad (x_0, t_0) \in E_T$,*

$$\begin{cases} |a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x_0, t_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2} \\ |b_i(x, t) - b_i(x_0, t_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2} \\ |c(x, t) - c(x_0, t_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2} \end{cases}$$

soient vérifiées.

Théorème 3.11. *Si un opérateur $\mathcal{P}$ est parabolique et A_2, Ω ouvert borné, alors dans $E_T = \Omega \times (0, T)$, il existe une et une seule solution fondamentale.*

La démonstration est assez longue, ici, on ne fait qu'une esquisse. La méthode est, en gros, (i) construire la solution fondamentale $Z(x, t; \xi, \tau)$ de l'opérateur de coefficient constant $\mathcal{P}|_{(\xi,\tau)}$ sur E_T ; (ii) on voit

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\Omega Z(x, t; \eta, \sigma)\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau),$$

on veut Γ soit la solution fondamentale de $\mathcal{P}$ dans E_T ; (iii) on peut montrer que si $f(x,t)$ est une fonction de $\beta-$Hölder par rapport à x dans E_T, $V(x,t)=\int_0^t\int_\Omega Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)$ est $\mathcal{C}^2$ et

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} = \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = f(x,t)+\int_0^t d\tau\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j} f(\xi,\tau)d\xi$$

Car $\mathcal{P}[\Gamma]=0$, on a

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=LZ(x,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t\int_\Omega LZ(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma.$$

On résout cette équation intégrale. On peut aussi montrer que Φ est assez régulière.

Notons $S=\partial E_T\cap\{T\geq t>0\}=\partial\Omega\times(0,T]$

Théorème 3.12. *Si L est uniformément elliptique et A_2, la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \mathcal{P}u=Lu+f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad dans \quad E_T, \\ Bu=g(x,t) \quad sur \quad S, \\ u(x,0)=g(x) \quad sur \quad E_T\cap\{t=0\}. \end{cases}$$

peut être construite par

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)\phi(\xi,\tau)dS_\xi d\tau+\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)g(\xi)d\xi \\ &+\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \end{aligned}$$

Où $\phi(\xi,\tau)$ est une fonction continue à déterminer.

Si l'on utilise ce théorème pour construire la suite monotone, on a

$$\begin{cases} \mathcal{P}u_1=Lu_1+f(x,u_0)-\frac{\partial u_1}{\partial t}=0 \quad dans \quad E_T, \\ Bu=g(x,t) \quad sur \quad S, \\ u_1(x,0)=u_0(x,0) \quad sur \quad E_T\cap\{t=0\}. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} u_1(x,t)=&\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)\phi(\xi,\tau)dS_\xi d\tau+\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)g(\xi)d\xi \\ &+\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_0)d\xi d\tau \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} u_n(x,t)=&\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)\phi(\xi,\tau)dS_\xi d\tau+\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)g(\xi)d\xi \\ &+\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_{n-1})d\xi d\tau \end{aligned}$$

Car $\{u_n\}$ converge ponctuellement, et tout les u_n sont majorés par u_0, qui est intégrable dans E_T. $f(x,u_n)\to f(x,u)$ dans $\overline{E_T}$. Car f est continue dans $\Omega\times[max(u_0),min(v_0)]$, alors $sup_n(f(x,u_n))$ est borné dans $\overline{E_T}$. Car toutes les $f(x,u_n)$ sont majorées par $sup_n(f(x,u_n))$, par le théorème de la convergence dominée, on a $f(x,u_n)\to f(x,u)$ an sens de L^p.

On voit le terme

$$\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_{n-1})d\xi d\tau$$

par l'inégalité de Hölder,

$$\left|\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_{n-1})d\xi d\tau - \int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_{n-1})d\xi d\tau\right|$$
$$\leq \|\Gamma\|_{L^2}\times\|f(x,u)-f(x,u_n)\|_{L^2}$$

Car $\|\Gamma\|_{L^2}<+\infty$, $\|f(x,u)-f(x,u_n)\|_{L^2}\to 0$, donc

$$\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u_{n-1})d\xi d\tau \to \int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u)d\xi d\tau,$$

donc u satisfait :

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)\phi(\xi,\tau)dS_\xi d\tau + \int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)g(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,u)d\xi d\tau \end{aligned}$$

Le premier terme et le duexième terme sont déjà réguliers. Ici si on admet que le u est Lipschiz, par (a),(b),(c), on sait que u est régulier.

Théorème 3.13. *Une sur solution de problème elliptique donne une solution décroissante de problème de Cauchy.*

Démonstration. On a

$$\begin{cases} Lu_0 + f(x,u_0)\leq 0, \\ Bu\geq g \end{cases}$$

On sait que u_0 est une sur solution du problème de Cauchy, donc de u_0, on peut construire une solution de ce problème, notée u. Par le théorème d'existence, on sait que $u\leq u_0$, et $u(x,0)=u_0(x)$. Donc on définit

$$w_h(x,t)=\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}.$$

Donc w_h satisfait

$$\begin{cases} L+\xi_h w_h - \frac{\partial w_h}{\partial t} = 0 \\ w_h(x,0)\leq 0 \\ Bw_h = 0 \text{ sur } \partial E_T \end{cases}$$

Où

$$\xi_h(x,t)=\int_0^1 f_u(x,su(x,t+h)+(1-s)u(x,t))ds.$$

Donc par le principe de maximum, $w_h\leq 0$. Donc on prend $\lim_{h\to 0^+} w_h$, alors $u_t\leq 0$.

□

4. Semi-groupes d'opérateurs à un paramètre

Pour étudier les problèmes paraboliques, la connaissance de semi-groupe des opérateurs est très utile. Dans cette section, on va donner la définition et un peu de propriétés des semi-groupes d'opérateurs.

Définition 4.1. *Soit H un espace de Hilbert, et $\{S(t), t\geq 0\}$ une famille des opérateurs linéaires continues de H vers H telle que*

(1) $S(0)=Id$;
(2) $S(t_1+t_2)=S(t_1)S(t_2), \quad t_1,t_2\geq 0$;
(3) $S(t)x\in C(\mathbb{R}_+,H), \quad \forall x\in H$;
(4) $\|S(t)\|\leq 1$,

alors on dit que $S(t)$ est un semi-groupe d'opérateurs contractants à un paramètre, et on dit simplement semi-groupe contractant dans le texte suivant. De plus, si $S(t)$ vérifie toutes les conditions ci-dessus sauf la condition (4), on dit que $S(t)$ est un semi-groupe.

Définition 4.2. *Soit* $\{S(t), t \geq 0\}$ *un semi-groupe contractant sur l'espace de Hilbert* H*, on note*

$$D = \left\{ x \in H : \lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} \quad \textit{existe} \right\},$$

D *est un sous espace vectoriel de* H*, sur* D*, on a un opérateur* $B : D \to H$ *linéaire défini par*

$$Bx = \lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

B *est appelé le générateur de semi-groupe contractant* $S(t)$*.*

Proposition 4.3. D *est dense dans* H*, et* $\forall t \geq 0, x \in H$*, on peut définir* $x_t = \int_0^t S(\tau)x d\tau$*, alors* $x_t \in D$*, de plus,*

$$S(t)x - x = Bx_t = B \int_0^t S(\tau)x d\tau.$$

Démonstration. Pour $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(S(h)x_t - x_t) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t S(\tau+h)x\mathrm{d}\tau - \int_0^t S(\tau)x\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(\tau)x\mathrm{d}\tau - \int_0^t S(\tau)x\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} S(\tau)x\mathrm{d}\tau - \int_0^h S(\tau)x\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

on fait $h \to 0+$, le terme à droite tend vers $S(t)x - x$, d'où $x_t \in D$, par la définition, $Bx_t = S(t)x - x$. De plus, on a $\frac{1}{t}x_t \to x$, lorsque $t \to 0+$, ceci implique D est dense dans H. □

Définition 4.4. *Soit* E, F *deux espaces vectoriels normés, l'opérateur* $T : \mathfrak{D}(T) \subset E \to F$ *est dit fermé si* $u_n \in \mathfrak{D}(T), u_n \to u, Tu_n \to v$ *implique* $u \in \mathfrak{D}(T)$ *et* $Tu = v$*.*

Proposition 4.5. *Pour tout* $x \in D$*,* $S(t)x \in C(\mathbb{R}_+, H)$*, et*

$$S(t)x - x = \int_0^t BS(\tau)x d\tau = \int_0^t S(\tau)Bx d\tau \quad t \geq 0,$$

on en déduit B *est un opérateur fermé.*

Démonstration. Pour tout $x \in D, t \geq 0$, on a

$$\frac{1}{h}(S(t+h)x - S(t)x) = \frac{1}{h}(S(h) - Id)S(t)x = \frac{1}{h}S(t)(S(h)x - x), \quad h > 0.$$

on fait $h \to 0+$, et on obtient

$$D^+S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx$$

ici D^+ signifie la dérivée à droite. De même, pour $t > 0$, si $0 < h < t$, on a

$$\frac{1}{h}(S(t)x - S(t-h)x) = S(t-h)\frac{1}{h}(S(h)x - x).$$

ainsi, on obtient

$$D^-S(t)x = S(t)Bx, \quad x \in d, t > 0.$$

Donc, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)x = S(t)Bx = BS(t)x$, ceci bien implique que $S(t)x \in C(\mathbb{R}_+, H)$, et on intègre cette équation

$$S(t)x - x = \int_0^t BS(\tau)x\mathrm{d}\tau = \int_0^t S(\tau)Bx\mathrm{d}\tau.$$

Puis, B est fermé. En effet, si $x_n \in D, x_n \to x, Bx_n \to y$,

$$\frac{1}{h}(S(h)x_n - x_n) = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Bx_n\mathrm{d}\tau.$$

alors, lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{1}{h}(S(h)x - x) = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)y\mathrm{d}\tau.$$

d'où

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(S(h)x - x) = S(0)y = y$$

i.e. $x \in D$, et $Bx = y$, donc B est fermé. $\square$

On a un résultat concerne la réciproque des propositions ci-dessus.

Théorème 4.6. *Soit H un espace de Hilbert, D un sous espace dense de H, un opérateur linéaire continue $B : D \to H$ est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si*

(1) *B est fermé.*
(2) *pour tout $\lambda > 0$, $\lambda - B : D \to H$ est bijectif, et $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \leq 1$*

Démonstration. Dans sens direct, on a déjà montré que si B est un générateur d'un semi-groupe contractant, alors il est fermé, de plus, pour $\lambda > 0$, la famille $\{e^{-\lambda t}S(t), t \geq 0\}$reste encore un semi-groupe contractant du générateur $B - \lambda : D \to H$, et donc

$$e^{-\lambda t}S(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)(B-\lambda)x\mathrm{d}\tau, \quad x \in D, t \geq 0,$$

$$e^{-\lambda t}S(t)y - y = (B-\lambda)\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)y\mathrm{d}\tau, \quad y \in H, t \geq 0.$$

Or $\|S(t)\| \leq 1$, les intégrales convergent lorsque $t \to \infty$, d'où

$$x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)(\lambda - B)x\mathrm{d}\tau, \quad x \in D,$$

$$y = (\lambda - B)\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)y\mathrm{d}\tau, \quad y \in H.$$

ces égalités impliquent bien $\lambda - B$ est bijectif de D vers H, et

$$\|(\lambda - B)^{-1}y\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\|y\|\mathrm{d}\tau = \lambda^{-1}\|y\|, \quad y \in H,$$

donc $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \leq 1$.

Réciproquement, on va construire un semi-groupe contractant à partir de B.

(1) On note $B_\lambda = \lambda B(\lambda - B)^{-1}$, i.e. $B_\lambda = -\lambda + \lambda^2(\lambda - B)^{-1}$, c'est un opérateur continu sur H. Et pour tout $x \in D, \lambda > 0$, observe que $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \leq 1$, on a donc

$$\|\lambda(\lambda - B)^{-1}x - x\| = \lambda^{-1}\|\lambda B(\lambda - B)^{-1}x\| = \lambda^{-1}\|\lambda(\lambda - B)^{-1}Bx\| \leq \lambda^{-1}\|Bx\|$$

d'où $\lambda(\lambda - B)^{-1}x \to x$, lorsque $\lambda \to \infty$. En considérant la densité de D dans H, de plus la famille $\{\lambda(\lambda - B)^{-1}\}$est bornée, donc $lambda(\lambda - B)^{-1}x \to x$, pour tout $x \in H$, alors pour $x \in D$,

$$B_\lambda x = \lambda(\lambda - B)^{-1}Bx \to Bx, \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty.$$

(2) On peut définir pour tout $\lambda > 0$ par la continuité de B_λ :

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(B_\lambda)^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

alors $\{S_\lambda(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe contractant, par exemple, on vérifie que

$$\|S_\lambda(t)\| = \|exp(t(-\lambda + \lambda^2(\lambda - B)^{-1}))\| = e^{-\lambda t}\|exp(\lambda^2(\lambda - B)^{-1}t)\| \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1.$$

et le générateur de $S_\lambda(t)$ est B_λ, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_\lambda(t)x = B_\lambda S_\lambda(t)x, \quad \forall x \in H.$$

On sait pour tout $x \in D$,

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)x\right)\mathrm{d}\tau.$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)x\right] = S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)(B_\lambda x - B_\mu x)$$

d'où $\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \le t\|B_\lambda x - B_\mu x\|$, alors pour tout $T > 0$ et tout $x \in D$ fixés, la famille $\{S_\lambda(t)x\}_{\lambda>0}$ est de Cauchy uniforme donc converge uniformément pour $t \in [0, T]$, lorsque $\lambda \to \infty$. Car $\|S_\lambda(t)\| \le 1$, et D est dense dans H, donc pour tout $x \in H$, $S_\lambda(t)x$converge uniformément pour $t \in [0, T]$, on note

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x,$$

alors $S(t)$ est un semi-groupe contractant.

Enfin, il faut dire B est le générateur de $S(t)$. Pour $x \in D, h > 0$, $S_\lambda(t)B_\lambda x \to S(t)Bx$, avec convergence uniforme pour $0 \le t \le h$, de l'équation

$$S_\lambda(h)x - x = \int_0^h S_\lambda(\tau)B_\lambda x \mathrm{d}\tau.$$

on obtient l'équation

$$S(h)x - x = \int_0^h S(\tau)Bx\mathrm{d}\tau.$$

d'où

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} = Bx.$$

□

On a l'unicité de semi-groupe contractant.

Proposition 4.7. *Soient $S(t), T(t)$ deux semi-groupes contractants du même générateur B. Alors $S(t) = T(t), \forall t \ge 0$.*

Démonstration. Dans la preuve précédente, on a pour tout $y \in H$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}S(\tau)y\mathrm{d}\tau = (\lambda - B)^{-1}y = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)y\mathrm{d}\tau, \quad \forall\lambda > 0,$$

alors pour tout $z \in H$ on a

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(S(\tau)y, z)\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(T(\tau)y, z)\mathrm{d}\tau, \quad \forall\lambda > 0.$$

par l'unicité de la transformation de Laplace, on a $(S(t)y, z) = (T(t)y, z)$ pour tout $y, z \in H$ et $t \ge 0$, d'où $S(t) = T(t)$. □

La proposition dit que si B est le générateur d'un semi-groupe contractant, alors ce semi-groupe contractant est unique, et va le noter par $e^{tB} = exp(tB)$. On a

$$exp((t_1 + t_2)B) = exp(t_1B)exp(t_2B), \quad t_1, t_2 \ge 0;$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} e^{tB}x = Be^{t_0B}x, \quad \forall x \in H;$$

$$e^{tB}x - x = B\int_0^t e^{\tau B}x\mathrm{d}\tau, \quad \forall x \in H.$$

Définition 4.8. *Un opérateur linéaire $B : \mathfrak{D}(B) \subset H \to H$ est dit accrétif si $(Bx, x) \ge 0, \forall x \in \mathfrak{D}(B)$, où H est un espace de Hilbert réel, si H est un espace de Hilbert complexe on remplace (Bx, x) par $Re(Bx, x)$.*

Théorème 4.9. *Pour un opérateur $B : D \subset H \to H$, on peut définir un semi-groupe contractant e^{tB} si et seulement si*

(1) *D est dense dans H, et B est fermé ;*

(2) *$-B$ est accrétif*

(3) *il existe $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 - B$ est surjectif.*

Démonstration. Par le théorème (4.6), si on peut définir e^{tB} comme un semi-groupe contractant, alors les conditions (1), (3) sont vérifiées, et $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \le 1$ implique pour tout $x \in D, \lambda > 0$

$$\|(\lambda - B)x\| \ge \lambda\|x\|$$

on a donc

$$(Bx, x) \le \frac{1}{2\lambda}\|Bx\|^2, \quad \forall x \in D,$$

$\lambda \to 0+$, on obtient $(Bx, x) \le 0$ pour tout $x \in D$, ceci dit $-B$ est accrétif.

Réciproquement, puisque $-B$ est accrétif, on a donc $(Bx, x) \le \frac{1}{2\lambda}\|Bx\|^2$, on en déduit $\|(\lambda - B)x\| \ge \lambda\|x\|$, d'où l'injectivité de $\lambda - B$, par l'hypothèse, on a en particulier la bijectivité de $\lambda_0 - B$, ainsi, on a $\|\lambda_0(\lambda_0 - B)^{-1}\| \le 1$, alors $(\lambda_0 - B)^{-1}$ est continu. Maintenant, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda - B = \lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - B = (Id + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - B)^{-1})(\lambda_0 - B)$$

or $\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - B)^{-1}\| \le |\lambda - \lambda_0|/\lambda_0$, si $|\lambda - \lambda_0|/\lambda_0 < 1$, alors $\lambda - B$ est inversible,avec l'inverse de H vers D i.e. pour $0 < \lambda < 2\lambda_0$, $\lambda - B$ est inversible, d'où on peut remplacer λ_0 par $\frac{3}{2}\lambda_0$ dans l'hypothèse, donc $\lambda - B$ est inversible pour $0 < \lambda < 3\lambda_0$, on peut continuer à utiliser cet argument, et on obtient que $\lambda - B$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.

$$\lambda - B : D \to H,$$

est inverse, et par l'inégalité

$$\|(\lambda - B)x\| \ge \lambda\|x\|,$$

on a $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\| \le 1$, par le théorème (4.6), on peut bien définir e^{tB}, il est un semi-groupe contractant. □

On va étudier l'opérateur strictement elliptique L, et on va montrer que on peut définir un semi-groupe e^{tL} si le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω est assez régulier.

Pour simplicité, on suppose les coefficients de L sont lisses. Notons $L_\lambda =: L - \lambda$ et commençons par définir un sous espace dense (pour la norme $\|\cdot\|$) de $L^2(\Omega)$:

$$D_\lambda = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : L_\lambda u \in L^2(\Omega) \text{ au sens des distributions } \right\}$$

la densité de D_λ dans $L^2(\Omega)$ vient du fait que $\mathcal{D}(\Omega) \subset D_\lambda$. On étudie en détail l'opérateur

$$L_\lambda : D_\lambda \to L^2(\Omega)$$

(1) Il existe $\lambda_0 > 0$, pour tout $\lambda > \lambda_0$, $-L_\lambda$ est accrétif. En effet, pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
(-Lu, u)_{L^2} &= -\int_\Omega u \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i u \ \partial_j(ua_{ij})\mathrm{d}x - \int_\Omega \sum_{i=1}^n ub_i \ \partial_i u\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i u\partial_j u \ a_{ij}\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} - b_i \right) u\partial_i u\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

or

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Donc

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i u \partial_j u \; a_{ij} \mathrm{d}x \geq \alpha_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2 \, \mathrm{d}x = \alpha_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

et on a aussi

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{ij} - b_i \right) u \partial_i u \mathrm{d}x \right| \leq C\|u\|_{L^2} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2C}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{C}{2\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2$$

Par l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq K\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

donc la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ est équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^1} = \|u\|_{W^{1,2}}$ sur $H_0^1(\Omega)$. Ainsi,

$$(-Lu, u)_{L^2} \geq C_1\|u\|_{H_0^1}^2 - C_2\|u\|_{L^2}^2$$

donc si on prend $\lambda_0 = C_2$, pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a

$$(-L_\lambda u, u) \geq \alpha_1\|u\|_{H_0^1}^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \lambda - C_2 > 0.$$

Cette inégalité est encore vraie pour tout $u \in D_\lambda$, d'où $-L_\lambda$ est accrétif.

(2) Pour $\lambda > \lambda_0$, L_λ est fermé. En effet, si on a une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ dans D_λ, telle que $u_k \to u$, et $L_\lambda u_k \to w$ dans $L^2(\Omega)$, lorsque $k \to \infty$, alors par l'inégalité

$$(L_\lambda(u_k - u_m), u_k - u_m) \geq \alpha_1\|u_m - u_k\|_{H_0^1}^2$$

la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ converge aussi dans $H_0^1(\Omega)$, en particulier, $u \in H_0^1(\Omega)$, et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (L_\lambda u)\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega u L_\lambda^* \varphi \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k L_\lambda^* \varphi \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (L_\lambda u_k)\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega w\varphi \mathrm{d}x$$

d'où $L_\lambda u = w \in L^2(\Omega)$, et $u \in D_\lambda$, on a bien L_λ est fermé.

(3) On va montrer que pour tout $\lambda > \lambda_0$, et tout $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$, le problème de Dirichlet

$$-L_\lambda u = f, \quad \text{au sens des distribution}$$

possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. En effet, on peut définir une forme bilinéaire

$$a : D_\lambda \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto (-L_\lambda u, v)_{L^2}$$

fixe $v \in H_0^1(\Omega)$, $a(\cdot, v)$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_{H_0^1}$, il suffit de montrer que dans l'expression de $a(u, v)$, le terme de degré 2 est continu

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u \right) v \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_j (v a_{ij}) \partial_i u \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u \partial_j v \mathrm{d}x \right| + \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v \partial_i u \partial_j a_{ij} \mathrm{d}x \right| \\
&\leq C\|\nabla u\|_{L^2} \left(\|v\|_{l^2} + \|\nabla v\|_{L^2}\right)
\end{aligned}$$

par le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre a comme une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$|a(u, u)| = (-L_\lambda u, u) \geq \alpha_1\|u\|_{H_0^1}^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par la continuité de a, cette inégalité reste vraie pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, i.e. a est coercive. Donc par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$a(u,v) = (f,v)$, c'est exactement à dire $-L_\lambda u = f$, au sens des distributions. D'où la surjectivité de $L_\lambda - \tilde{\lambda}$, avec $\tilde{\lambda} > 0$.

Ainsi, par le théorème (4.9), on peut définir un semi-groupe contractant e^{tL_λ}, pour tout $\lambda > \lambda_0$. C'est-à-dire, on peut définir $e^{t(L-\lambda)}$, alors $e^{tL} =: e^{t\lambda}e^{t(L-\lambda)}$ est un semi-groupe. De plus, on peut montrer l'unicité de semi-groupe engendré par L de même façon que la démonstration de l'unicité du semi-groupe contractant.

5. Sur et sous solutions faibles

Dans cette section, on va donner quelques résultats sur les sur et sous solutions faibles.

Définition 5.1. *On définit l'opérateur adjoint L^* de l'opérateur L. Le domaine de L^* est défini comme :*

$$\mathfrak{D}(L^*) =: \{\varphi \in L^2(\Omega) : \textit{il existe } \varphi^* \textit{ tel que } \ (Lu, \varphi) = (u, \varphi^*) \textit{ pour tout } u \in \mathfrak{D}(L)\}$$

et pour $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$, on note $\varphi^* = L^*\varphi$.

Définition 5.2. *Soit u_0 une fonction bornée et mesurable dans Ω, on dit que u_0 est une sous solution faible du problème (1), si*

$$\int_\Omega \Big(u_0 L^*\varphi + f(x,u_0)\varphi \Big) dx \geq 0$$

pour tout $\varphi > 0, \varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$. Et on définit la notion de sur solution de même façon.

Lemme 5.3. *Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et supposons que $(u_0, L^*\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*), \varphi \geq 0$. Alors la solution du problème*

$$\begin{cases} Lu - u_t = 0 & x \in \Omega \ , t > 0 \\ Bu|_{\partial\Omega} = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \end{cases}$$

est croissante par rapport à t.

Pour simplifier, on suppose dans la démonstration $Bu = u$.

Démonstration. Par le théorème (4.9), on a un semi-groupe e^{tL} sur $L^2(\Omega)$, d'où une écriture de $u(x,t)$:

$$u(x,t) = e^{tL}u_0(x)$$

pour $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}$, on écrit explicitement L^*, on trouve L^* reste encore un opérateur elliptique, il engendre un semi-groupe e^{tL^*}. Montrons que $e^{tL^*} = (e^L)^*$. En effet, si on note $S(t) = e^{tL}$, alors $S(t)^*$ reste encore un semi-groupe, et on suppose le générateur de $S(t)^*$ est $\tilde{L}$, pour $u \in \mathfrak{D}(L), v \in \mathfrak{D}(L^*)$, on a

$$(\frac{S(t)u - u}{t}, v) = (u, \frac{S(t)^*v - v}{t}),$$

passe à la limite, on a $(Lu, v) = (u, \tilde{L}v)$, puis par la densité de $\mathfrak{D}(L)$ et $\mathfrak{D}(L^*)$ dans $L^2(\Omega)$, on a bien $\tilde{L} = L^*$. Donc pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*), \varphi > 0$,

$$(u_t, \varphi) = (Lu, \varphi) = (Le^{tL}u_0, \varphi) = (u_0, e^{tL^*}L^*\varphi) = (u_0, L^*e^{tL^*}\varphi),$$

dans les égalités on a utilisé le fait que $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$ implique $e^{tL^*}\varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$, comme on a montré dans la section de semi-groupe. Par le principe du maximum pour le problème parabolique, $e^{tL^*}\varphi \geq 0$, avec l'hypothèse on a $(u_t, \varphi) \geq 0$. $\mathfrak{D}(L^*)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, d'où $u_t \geq 0$, pour tout $t > 0$. □

Théorème 5.4. *Soit u_0 une sur (sous) solution faible, et $u(x,t)$ satisfait le problème aux conditions initiales*

$$Lu + f(x,u) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad Bu\mid_{\partial\Omega} = 0.$$

dans le domaine $\Gamma_T =: \Omega \times (0,T)$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq 0 \ (\geq 0), \quad \textit{dans} \ \ \Gamma_T.$$

Démonstration. On va résoudre

$$\begin{cases} Lu_1 - Mu_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = -[f(x,u_0) + Mu_0], \\ Bu_1\mid_{\partial\Omega} = 0, \quad u_1(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

où $M > 0$ est assez grand, tel que $f_u(x,u) + M > 0$ pour tout $\min_{\Gamma_T} u(x,t) \leq u \leq u_0(x)$. Soit $\psi = Tu_0$, i.e.

$$\begin{cases} (L-M)\psi = -[f(x,u_0) + Mu_0], \\ B\psi\mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

si on pose $u_1 = v_1 + \psi$, alors, v_1 satisfait l'équation

$$\begin{cases} Lv_1 - Mv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \\ Bv_1\mid_{\partial\Omega} = 0, \\ v_1(x,0) = u_0(x) - \psi(x). \end{cases}$$

Or pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*), \varphi > 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u_0(x) - \psi(x))(L^* - M)\mathrm{d}x &= \int_\Omega u_0(x)(L^* - M)\varphi - (Tu_0)(L^* - M)\varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u_0(L^* - M)\varphi + (f(x,u_0) + Mu_0)\varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u_0 L^*\varphi + f(x,u_0)\varphi \mathrm{d}x \leq 0. \end{aligned}$$

par le lemme 5.3,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} \leq 0$$

On pose $u = u_1 + v$, et obtient l'équation pour v,

$$Lv + f(x, u_1 + v) - \frac{\partial v}{\partial t} = f(x,u_0) + Mu_0 - Mu_1,$$

$$Bv\mid_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x,0) = 0.$$

puis on pose

$$v_h(x,t) = \frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h}, \quad u_{1,h}(x,t) = \frac{u_1(x,t+h) - u_1(x,t)}{h},$$

$$\xi_h(x,t) = \int_0^1 f_u\left(x, s(u_1(x,t+h) + v(x,t+h)) + (1-s)(u_1(x,t) + v(x,t))\right)\mathrm{d}s.$$

Si on note

$$\zeta(s) = s\big[u_1(x,t+h) + v(x,t+h)\big] + (1-s)\big[u_1(x,t) + v(x,t)\big],$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x,\zeta(s)) = f_u(x,\zeta(s))(u_{1,h}(x,t) + v_h(x,t))h,$$

donc on a

$$Lv_h + \xi_h v_h - \frac{\partial v_h}{\partial t} = -[\xi_h + M]u_{1,h}.$$

Pour M assez grand tel que $\xi_h + M > 0$, et $\frac{\partial u_1}{\partial t} \leq 0$ implique $u_{1,h} \leq 0$, on a aussi $Bv_h = 0$ sur Ω, et

$$v_h(x,0) = \frac{u(x,h) - u_1(x,h)}{h} \leq 0.$$

L'inégalité vient du fait que $u_0(x) \geq u_1(x,t) \geq \cdots \geq u(x,t)$ par la construction de la solution par la méthode monotone. Par le principe du maximum $v_h(x,t) \leq 0$, on fait $h \to 0$, alors $\frac{\partial v}{\partial t} \leq 0$, donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0.$$

□

Théorème 5.5. *Soient u_0 et v_0 sur et sous solutions du problème (1) avec $g = 0$, et $v_0 \leq u_0$. Et $u(x,t), v(x,t)$ sont des solutions du problème aux conditions initiales avec les conditions initiales u_0 et v_0 respectivement, et $Bu = Bv = 0$. Alors $v(x,t) \uparrow \tilde{v}(x)$ et $u(x,t) \downarrow \tilde{u}(x)$, lorsque $t \to \infty$. Où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des solutions classiques du problème (1) avec $\tilde{v} \leq \tilde{u}$.*

Démonstration. On pose $w = u - v$, et on prend $M > 0$ assez grand, tel que l'on ait toujours $f_u + M > 0$ sur $\overline{\Omega} \times [\min v_0, \max u_0]$, alors w satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} (L-M)w - w_t = -[f(x,u) - f(x,v) + M(u-v)] \leq 0, \\ w(x,0) = u_0(x) - v_0(x) \geq 0, \\ Bw \mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, on a $w \geq 0$. On a donc $v(x,t) \leq u(x,t)$. De plus, avec le théorème 5.4, on a $v_0(x) \leq v(x,t) \leq u(x,t) \leq u_0(x)$, $u(x,t)$ est décroissante par rapport à t, $v(x,t)$ est croissante par rapport à t, ainsi, on peut définir

$$\tilde{u}(x) = \lim_{t \to \infty} u(x,t)$$

et

$$\tilde{v}(x) = \lim_{t \to \infty} v(x,t)$$

on a $\tilde{v} \leq \tilde{u}$. Il reste à montrer $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des solutions classiques du problème (1) avec $g = 0$, c'est équivalent à dire $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des solutions stationnaires du problème parabolique correspondant.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$ et $t > 0$, on a

$$\int_\Omega u_t \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \big[Lu\varphi + f(x,u)\varphi\big]\mathrm{d}x = \int_\Omega \big[uL^*\varphi + f(x,u)\varphi\big]\mathrm{d}x.$$

on fait $\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t$, et on obtient

$$\int_\Omega \frac{u(x,T) - u(x,0)}{T}\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \left\{L^*\varphi \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\mathrm{d}t + \varphi \frac{1}{T}\int_0^T f(x,u)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x.$$

on observe que $u(x,t) \to \tilde{u}$ lorsque $t \to \infty$ implique que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{u(x,T) - u(x,0)}{T} = 0,$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\mathrm{d}t = \tilde{u}(x),$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x,u(x,t))\mathrm{d}t = f(x,\tilde{u}(x)).$$

Par le théorème de la convergence dominée, on arrive à l'égalité :

$$0 = \int_\Omega \big\{\tilde{u}L^*\varphi + f(x,\tilde{u})\varphi\big\}\mathrm{d}x$$

on peut écrire aussi

$$(\tilde{u}, L^*\varphi) + (f(x,\tilde{u}), \varphi) = 0.$$

Il reste à montrer que si u est bornée, et $(u, L^*\varphi) + (f(x,u), \varphi) = 0$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*)$, alors u est une solution classique du problème elliptique aux conditions limites. Dans la section du semi-groupe des opérateurs, on a étudié les propriétés de L_λ, on a déjà la surjectivité de $L_\lambda : D_\lambda \to L^2(\Omega)$, pour λ assez grand, a fortiori la surjectivité de $L_\lambda : \mathfrak{D}(L_\lambda) \to L^2(\Omega)$, et par le principe du maximum, on a l'unicité de solution du problème elliptique aux conditions limites. Donc $L_\lambda : \mathfrak{D}(L) \to L^2(\Omega)$ est bijective, ainsi L_λ est inversible. On pose $T_\lambda = L_\lambda^{-1}$, $f_\lambda(x,u) = f(x,u) + \lambda u$, $w = -T_\lambda f_\lambda(x,u)$, alors pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L^*) = \mathfrak{D}(L_\lambda^*)$,

$$(u, L_\lambda^*\varphi) + (f_\lambda, \varphi) = 0,$$

et

$$(w, L_\lambda^*\varphi) = -(T_\lambda f_\lambda, L_\lambda^*\varphi) = -(f_\lambda, T_\lambda^* L_\lambda^*\varphi) = (-f_\lambda, \varphi).$$

d'où $(w-u, L_\lambda^*\varphi) = 0$, par la surjectivité de L_λ^*, $u = w = -T_\lambda f_\lambda(x,u)$. Au sens des distributions $L_\lambda u + f_\lambda(x,u) = Lu + f(x,u) = 0$.

Montrons que si $h \in L^p(\Omega)$, alors $v = T_\lambda h \in W^{2,p}(\Omega)$. En effet, on prend une suite $(h_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, telle que $h_k \xrightarrow{L^p} h$, une suite des fonctions régulières $(v_k)_{k\geq 0}$ est définie par

$$\begin{cases} L_\lambda v_k = h_k, \text{ dans } \Omega, \\ B v_k = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le lemme (3.3), on a

$$\|v_k - v_m\|_{W^{2,p}} \leq C\|h_k - h_m\|_p$$

donc la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, on note $v_k \to \hat{v} \in W^{2,p}(\Omega)$, et on montre que $v = \hat{v}$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(L_\lambda^*)$

$$(v, L_\lambda^*\varphi) = (L_\lambda v, \varphi) = (h, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (h_k, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (L_\lambda v_k, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (v_k, L_\lambda^*\varphi) = (\hat{v}, L_\lambda^*\varphi).$$

L_λ^* reste encore un opérateur elliptique, donc pour λ assez grand, L_λ^* est surjectivé à valeurs dans $L^2(\Omega)$, on a bien $v = \hat{v}$. Ainsi les conditions $u \in L^\infty(\Omega)$, et $L_\lambda u + f(x,u) = 0$ implique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$. Si $p > n$, on a $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. De même façon qu'on vient d'utiliser pour montrer $v = T_\lambda h \in W^{2,p}(\Omega)$ sous l'hypothèse que $h \in L^p(\Omega)$, on peut montrer $v = T_\lambda h \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ sous l'hypothèse que $h \in C^{1,\alpha}$, bien sur, cette fois, on a besoin d'utiliser le lemme (3.4). Ainsi les conditions $u \in L^\infty(\Omega)$, et $L_\lambda u + f(x,u) = 0$ implique $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$

Finalement, on a montré que $\tilde{u}$ et de même $\tilde{v}$ sont des solutions classiques. □

6. La stabilité des solutions

Définition 6.1. *Une solution du problème parabolique est dite stable en norme maximum si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|u_0(x) - U\|_\infty < \delta$, alors $\|u(x,t) - U\|_\infty < \delta$. Où $u(x,t)$ est la solution du problème*

$$\begin{cases} u_t &= Lu + f(x,u), \\ Bu &= g, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

U est dit asymptotiquement stable si $\|u(x,t) - U\|_\infty \to 0$.

Théorème 6.2. *Soit U une solution du problème elliptique, ϕ et ψ sont sous solution et sur solution respectivement et $\phi < U < \psi$ dans $\overline{\Omega}$. Si v satisfait le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} v_t &= Lv + f(x,v), \\ Bv &= g, \\ v(x,0) &= v_0(x) \end{cases}$$

Si $\phi < v_0 < \psi$, alors $\phi(x,t) < v(x,t) < \psi(x,t)$, où $\phi(x,t)$ et $\psi(x,t)$ sont les solutions du probléme ci dessous avec valueres initiales ϕ est ψ. Si $T^n\phi \uparrow U$ et $T^n \downarrow U$, alosr U est asymptotiquement stable et $v(x,t) \to U$ quand $t \to +\infty$.

Lemme 6.3. *(de comparaison) Si u, v deux fonctions de $C^{2+\alpha}(\Omega)$, $u(x,t)$,$v(x,t)$ sont les solutions de probléme (1) avec les valuers initiales u, v respectivement. Si L uniformément elliptique et $u > v$, alors $u(x,t) > v(x,t)$.*

On fait d'abord la démonstration du théorème.

Démonstration. On sait que $\phi \downarrow \tilde{\phi}$ quand $t \to +\infty$, et du lemme de comparaison on sait que $\phi(x,t) < v(x,t) < \psi(x,t)$. Donc si $\tilde{\phi} = \tilde{\psi}$, alosr $U = \tilde{\phi} = \tilde{\psi}$ et $v(x,t) \to U$. □

Démonstration. (Prueve du lemme) de (1), onsait que $w = v - u$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_t &=& Lw + f(x,v) - f(x,u), \\ Bw &=& 0, \\ w(x,0) &<& 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

donc on peut trouver un $D > 0$ constant assez grande telle que $\frac{\partial f}{\partial u} + D > 0$, est (2) devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} -w_t + Lw - Dw &=& -[f(x,v) + Dv] + [f(x,u) + Du], \\ Bw &=& 0, \\ w(x,0) &<& 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Si en un point $P' \in E_T$, $u = 0$. On prend $Q = (x_1, t_1) \in E_T$, où $t_1 = \inf\{t | w(x,t) = 0\}$. Alors $w(x_1, t_1) = 0$. Donc dans le domaine $E_T \cap t \leq t_1$, $Lw - w_t \geq 0$. Par le théorème 1.2.1(dans la remarque dernière, point (iii) dit que ce théorème est encore vrai), on conclut que $u = 0$ dans $E_T \cap \{t \leq t_1\}$. Ceci contredit le fait que $u(0) < 0$ et u est continue sur le bord. □

On note λ_1 le premier valeur propre du problème :

$$\left\{\begin{array}{rl} Lu + f'_u(x,U)u &= 0, \\ Bu &= 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

On sait aussi que la fonction prore associée $u_1 > 0$

Le théorème suivant nous donne une méthod à déterminer la stabilité d'une solution stationnaire.

Théorème 6.4. *Si $\lambda_1 < 0$, alors U est stable comme la limite des suite engendrées par le sous et sur solutions. Si $\lambda_1 > 0$, alosr U n'est pas stable et est la limite des suites engendrées par ϕ et ψ.*

Démonstration. Supposons $\lambda_1 < 0$, considérons la fonction $U + \varepsilon u_1$:

$$\begin{aligned} L[U + \varepsilon u_1] + f(x, U + \varepsilon u_1) &= Lu + f(x,U) + \varepsilon[Lu_1 + f'(x,U)u_1] + O(\varepsilon^2 u_1^2) \\ &= \varepsilon \lambda_1 u_1 + O(\varepsilon^2 u_1^2) \end{aligned}$$

et

$$B(U + \varepsilon u_1) = BU = g$$

Car $u_1 \geq 0$, $\lambda_1 u_1$ daomine le terme $O(\varepsilon^2 u_1^2)$ quand ε assez petit, $U + \varepsilon u_1$ est une sur solution quand $\varepsilon > 0$ et une sous solution quand $\varepsilon < 0$.

Donc si on prend une valeur initiale auxilaiaire v, si $\|U - v\|_\infty$ assez petit, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ telle que $U - \varepsilon u_1 < v < U + \varepsilon u_1$. car $U - \varepsilon u_1$, $U + \varepsilon u_1$ sont sous et sur solutions du problème elliptic, la solution dont le valeur est $U - \varepsilon u_1$ est croisante, la solution dont le valeur est $U + \varepsilon u_1$ est décroisante. donc par le lemme de combaraison, on sait que $\|v(x,t) - U\|_\infty < \varepsilon$, donc U est stable.

Si $\lambda_1 < 0$, on a $U - \varepsilon u_1$ sur solution est $U + \varepsilon u_1$ sous solution. Donc pour tout $\delta > 0$, $U + \delta u_1$ est croissante, donc U peut être approchée arbitrairement par dessus des sous solutions, ceci dit U est instable, mais ce n'est pas trivial d'avoir l'instabilité de U. □

7. Exemples et applications

Dans cette section, on va donner quelques exemples pour illustrer les applications de la méthode monotone et le théorème sur la stabilité de la solution.

Exemple 1. *Considérons le problème*

$$\left\{\begin{array}{c} -(\triangle + \mu)u + u^3 = 0, \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{array}\right.$$

dans un domaine Ω. On suppose φ_1 est la première fonction propre de Laplacien :

$$\begin{cases} \triangle\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0, \\ \varphi_1 \mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

où $\lambda_1 > 0$ est la plus petite valeur propre, on a $\varphi_1 > 0$ dans Ω. Pour construire des sur et sous solutions, on pose $u = \sigma\varphi_1$, avec σ une constante. Alors

$$(\triangle + \mu)u - u^3 = (\mu - \lambda_1)\sigma\varphi_1 - (\sigma\varphi_1)^3 = \sigma\varphi_1[(\mu - \lambda_1) - \sigma^2\varphi_1^2].$$

(1) *Supposons $\mu < \lambda_1$, alors $u = \sigma\varphi_1$ est une sur solution pour $\sigma > 0$, sous solution pour $\sigma < 0$. Donc la solution triviale $u \equiv 0$ est stable.*

(2) *Supposons $\mu > \lambda_1$. Pour $|\sigma|$ assez petit, $u = \sigma\varphi_1$ est une sous solution si $\sigma < 0$, elle est une sur solution si $\sigma > 0$. Dans ce cas, la solution triviale $u \equiv 0$ est instable.*

On peut montrer qu'il existe une solution positive qui est stable. En effet, on suppose $\tilde{\varphi}_1$ est la fonction propre de Laplacien de la plus petite valeur propre avec une certaine condition au bord, i.e.

$$\begin{cases} \triangle\tilde{\varphi}_1 + \lambda_1\tilde{\varphi}_1 = 0, \quad \textit{dans} \;\; \Omega, \\ \varepsilon\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial\nu} + \tilde{\varphi}_1 = 0. \quad \textit{sur} \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, pour ε assez petit, $\tilde{\lambda}_1$ est proche de λ_1, et $\tilde{\lambda}_1 > 0$ pour tout ε, $\tilde{\varphi}_1 > 0$ dans $\overline{\Omega}$. Donc pour $|\sigma|$ assez grand, $[(\mu - \tilde{\lambda}_1) - \tilde{\sigma}^2\tilde{\varphi}_1^2]$ est négatif, donc $u = \tilde{\sigma}\tilde{\varphi}_1$ est une sur solution pour $\tilde{\sigma} > 0$ assez grand, et elle est une sous solution pour $\tilde{\sigma} < 0$ assez grand. Entre la sur solution $\tilde{\sigma}\varphi_1$, $\tilde{\sigma} > 0$ assez grand, et la sous solution $\sigma\varphi$, $\sigma > 0$, on a une solution positive stable.

Exemple 2. *Considérons le problème*

$$\begin{cases} \triangle u + u^2 = 0, \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

On a une solution triviale $u \equiv 0$, dans quelque cas spécial, on peut construire des solutions non triviales.

On montre un résultat qui dit que toute la solution positive est instable. En effet, soit w est une solution non triviale, alors $\triangle w = -w^2 \leq 0$, par le principe du maximum, on a $w \geq 0$. On considère $\varphi = \sigma w$. Alors

$$\triangle\varphi + \varphi^2 = \sigma\triangle w + \sigma^2 w^2 = \sigma(\sigma - 1)w^2.$$

Ainsi, φ est une sur solution pour $0 < \sigma < 1$, et une sous solution pour $\sigma > 1$. Ceci implique que w est instable. En effet, si on pose $z_\sigma(x,t)$ la solution du problème

$$\begin{cases} z_t = \triangle z + z^2, \\ z \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ z(x,0) = \sigma w(x). \end{cases}$$

Alors, par rapport à t, z_σ est croissante pour $\sigma > 1$, et elle est décroissante pour $\sigma < 1$. Ceci implique bien que w est instable.

On note aussi dans ce cas, la solution triviale est stable, car on a $\varphi = \sigma w$ est une sous solution pour tout $\sigma < 0$.

Références

[1] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equation*, Plenum Press, New York, 1992.

[2] David Gilbarg et Neil S. Trudinger, *Elliptic partial defferential equations of sencond order*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J, Vol. 21, No. 11, 1972, 979-1000.

[4] M. H. Protter et H.F.Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, 1967.

Nous tenons également à remercier Grégoire Nadin pour ses conseils et ses explications.