Rigidité topologique et chirurgie

Alexandre Martin (encadré par Andrew Ranicki)

21 octobre 2009

Un des objectifs principaux de la topologie des variétés est de classer les variétés compactes. Différentes classifications sont possibles : équivalence d'homotopie, homéomorphisme, difféomorphisme. Remarquons déjà que deux variétés lisses difféomorphes sont homéomorphes, et que deux variétés topologiques homéomorphes ont même type d'homotopie. Se pose alors la question de savoir si deux variétés équivalentes pour une certaines relation d'équivalence le sont encore pour une relation d'équivalence plus forte.

Le cas de la dimension 2 fournit un premier exemple : toutes les classifications précédentes sont équivalentes, une surface compacte connexe étant complètement déterminée à difféomorphisme près par son orientabilité et son genre [Gra71].

En revanche, la situation se complique dès la dimension 3. En effet, les espaces lenticulaires découverts par Whitehead fournissent les premiers exemples de variétés ayant le même type d'homotopie mais non homéomorphes. De même, la découverte par Milnor [Mil56] des sphères exotiques donne des exemples de variétés lisses homéomorphes à la sphère standard mais qui ne lui sont pas difféomorphes.

Donnons néanmoins quelques exemples de variétés pour lesquelles une classification faible implique une classification forte.

Conjecture de Poincaré. Une variété topologique ayant le type d'homotopie de $\mathbb{S}^n$ lui est homéomorphe.

Théorème de rigidité de Mostow [Mos68] . Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre variétés hyperboliques complètes de dimension $n \geq 3$ de volume fini. Alors f est homotope à une isométrie.

Motivé par ce résultat, Borel formula la conjecture suivante, qui peut être vu comme l'analogue topologique du théorème de rigidité de Mostow.

Conjecture de Borel. Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre variétés compactes asphériques. Alors f est homotope à un homéomorphisme.

Cette conjecture fut démontrée pour le cas du tore (en dimension ≥ 5) dans les années 60 par Hsiang et Wall [HW69] grâce à la théorie de la chirurgie introduite par Kervaire et Milnor et étendue au cas simplement connexe par Browder [Bro72], puis au cas général par Wall [Wal70]. Nous nous proposons ici de présenter la théorie de la chirurgie est d'expliquer en quoi elle est un cadre naturel pour étudier les questions de rigidité topologique.

Table des matières

1 Chirurgie

Pour éviter à avoir à préciser en permanence si nous parlons de variétés topologiques, PL, ou lisses, nous utiliserons la notation suivante.

Notation. Pour $CAT = TOP, O$ (parfois également noté *DIFF*), nous appelerons :
- *CAT-variété* une variété topologique (resp. lisse),
- *CAT-isomorphisme* un homéomorphisme (resp. difféomorphisme).

Dans toute la suite, M sera une CAT-variété **compacte**, **connexe orientable**, **sans bord** et de **dimension** $n \geq 5$. Précisons toutefois que la théorie générale de la chirurgie permet de traiter la cas non orientable, cas que nous n'aborderons pas ici pour éviter d'avoir à considérer des systèmes locaux de coefficients en homologie. En revanche, la restriction sur la dimension de M est absolument fondamentale, les résultats nécessaires pour développer la théorie de la chirurgie ne s'appliquant qu'en dimension au moins 5 (et parfois en dimension 4 sous certaines hypothèses sur $\pi_1(M)$).

1.1 $\mathcal{S}_{CAT}(M)$ et rigidité topologique

La chirurgie est le cadre naturel pour étudier les deux questions suivantes :
- *existence*. Étant donné un CW-complexe fini X, existe-t-il une CAT-variété compacte ayant le type d'homotopie de X ?
- *unicité*. Étant donnée une CAT-variété compacte M, une CAT-variété ayant le type d'homotopie de M lui est-elle homéomorphe (resp. difféomorphe) ?

Dans la suite, nous ne traiterons que la question de l'unicité. La question d'existence, bien que plus naturelle pour introduire les concepts qui vont suivre, demande des outils de théorie de l'homotopie que nous n'avons pas la place de décrire ici. Nous renvoyons le lecteur à [Lüc01] pour plus de détails.

Rappelons que la question de départ était de savoir si deux variétés ayant même type d'homotopie sont homéomorphes. Plus précisément, nous nous intéressons au problème de *rigidité topologique* suivant.

Définition 1.1 (rigidité topologique)**.** Une variété topologique compacte sans bord N est dite *topologiquement rigide* si toute équivalence d'homotopie $f : N' \to N$ est homotope à un homéomorphisme.

L'objet de base étudié par la théorie de la chirurgie, bien évidemment lié à la définition précédente, est le suivant.

Définition 1.2 (ensemble structural)**.** Soit M une CAT-variété compacte connexe orientable sans bord de dimension ≥ 5. L'ensemble structural $\mathcal{S}_{CAT}(M)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de paires (N, f), avec N une CAT-variété compacte et $f : N \to M$ une équivalence d'homotopie, où (N_1, f_1) et (N_2, f_2) sont dites équivalentes s'il existe un CAT-isomorphisme $h : N_1 \to N_2$ tel que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & M \\ N_2. \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}_{TOP}(M)$ reflète les différentes structures topologiques dont peut être munie M, et est donc l'objet que l'on cherche à calculer.

Proposition 1.1. *Une variété compacte connexe orientable M est topologiquement rigide si et seulement si $\mathcal{S}_{TOP}(M)$ est réduit à un élément.*

Formulé de cette façon, l'ensemble structural apparaît comme un objet difficilement calculable. Nous développerons plus loin un outil algébrique important, la *suite exacte de chirurgie*, permettant de le calculer dans certains cas favorables.

1.2 Applications normales de degré un et chirurgie

C'est un fait connu [MS74] qu'il existe une correspondance bijective entre
- classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables lisses au dessus d'une variété lisse N,
- classes d'homotopie d'applications $N \to BO$, où BO désigne l'espace classifiant du groupe topologique $O = \lim_{\to} O_n(\mathbb{R})$,

où tout fibré vectoriel stable lisse au dessus de N s'obtient comme tiré en arrière du fibré universel au dessus de BO, pour une certaine application $N \to BO$ unique à homotopie près.

De la même manière, on peut construire un espace classifiant $BTOP$ pour des variétés topologiques, donnant une correspondance bijective entre
- classes d'isomorphisme de CAT-fibrés vectoriels stables au dessus d'une CAT-variété N,
- classes d'homotopie d'applications $N \to BCAT$.

Définition 1.3. Une *application normale de degré un* entre deux CAT-variétés N et M est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \nu_N \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\ N \arrow[r, "f"] & M, \end{tikzcd}$$

avec $f : N \to M$ une application de degré un, $\eta : M \to BCAT$ un CAT–fibré stable, $b : \nu_N \to \eta$ isomorphisme stable de CAT-fibrés, et ν_N le fibré normal stable de N. On écrira souvent $(f, b) : M \to N$ pour désigner une application normale de degré un.

Étant donné une application normale de degré un, l'idée va être de la déformer pour en faire, si possible, une équivalence d'homotopie. Pour cela, un argument classique de topologie algébrique dit qu'il suffit de la déformer en une application induisant un isomorphisme sur le groupe fondamental et sur les goupes d'homologie (par dualité de Poincaré, il suffira de le montrer jusqu'en dimension moitié).

Proposition 1.2. *Soit $f : N \to M$ une application de degré un entre deux variétés orientables compactes connexes. Alors f induit un épimorphisme sur le groupe fondamental.*

Démonstration. Soit $\widetilde{M} \to M$ le revêtement associé au sous-groupe $\mathrm{Im}(\pi_1(N) \xrightarrow{f_*} \pi_1(M))$. Par les propriétés de base des revêtements, il existe un relèvement

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d] \\ N \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & M. \end{tikzcd}$$

induisant un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H_n(\widetilde{M};\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ H_n(N;\mathbb{Z}) \arrow[ur] \arrow[r, "\simeq"'] & H_n(M;\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Il s'ensuit alors que le revêtement est fini. Comme $H_n(\widetilde{M};\mathbb{Z}) \to H_n(M;\mathbb{Z})$ est la multiplication par d, où d est le nombre de feuillets, il vient $d = 1$. Ainsi, $f_* : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ est surjective. $\square$

Proposition 1.3. *Soit $f : N \to M$ une application de degré un entre deux variétés orientables compactes. Alors f induit une surjection sur les groupes d'homologie.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H_i(N) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[d, "D"'] & H_i(M) \arrow[d, "D"'] \\ H^{n-i}(N) & H^{n-i}(M), \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

où D est l'inverse de l'isomorphisme donné par la dualité de Poincaré. Soit $f_\sharp = D^{-1} \circ f^* \circ D$. Alors, f étant de degré un, $f_*[X] = [Y]$, et on a pour tout $y \in H_i(Y)$,

$$f_* \circ f_\sharp(y) = f_*(f^*(Dy) \cap [X]) = Dy \cap f_*[X] = Dy \cap [Y] = y.$$

Ainsi $f_* \circ f_\sharp = id$, et f_* est surjective. $\square$

L'idée est alors la suivante : partant d'une application normale de degré un, nous allons effectuer certaines opérations topologiques, appelées *chirurgies*, de façon à tuer les éléments de $\ker(\pi_1(N) \to \pi_1(M))$ et $\ker(H_i(N;\mathbb{Z}) \to H_i(M,\mathbb{Z}))$.

Pour simplifier les choses, nous commençons par donner une version assez visuelle d'une chirurgie comme simple opération sur une variété

Définition 1.4 (Chirurgie sur une variété). Soit M une variété compacte, et $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \hookrightarrow M$ un plongement de $\mathbb{S}^k$ dont le fibré normal est trivial. Une *chirurgie* sur M est l'opération qui consiste à construire une nouvelle variété compacte

$$M' = \overline{M - (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k})} \cup_{\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}} (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})$$

en enlevant la variété à bord plongée $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ et en recollant $\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ le long de $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$.

Remarque. Les variétés M et M' sont dans la même classe de cobordisme orienté.

Proposition 1.4 (Effet d'une chirurgie). *If $2k+1 \leq n$,*

$$\pi_i(M) \simeq \pi_i(M') \text{ pour } i < k,$$

$$\pi_k(M') \simeq \pi_k(M)/\langle x \rangle,$$

où x est la classe dans $\pi_n(M)$ représentée par le plongement $\mathbb{S}^k \hookrightarrow M$.

On voit donc qu'une chirurgie est une opération permettant naturellement de tuer un certaine classe d'un groupe d'homotopie. Définissons maintenant l'opération adaptée à notre situation, à savoir une *chirurgie sur une application normale de degré* un.

Proposition 1.5 (Chirurgie sur une application normale de degré un). *Soit $(f,b) : N \to M$ une application normale de degré un, et $\mathbb{S}^k \hookrightarrow N$ un plongement tel que*

- $2k+1 \leq n$,
- *le fibré normal de ce plongement soit trivial,*
- $\mathbb{S}^k \hookrightarrow N \xrightarrow{f} M$ *soit homotopiquement nulle.*

La situation peut se résumer par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k} \arrow[r, "\Phi"'] & M. \end{tikzcd}$$

Alors, il existe une application normale de degré un $(f', b') : N' \to M$, où N' est la variété obtenue par chirurgie le long du plongement $\mathbb{S}^k \hookrightarrow N$, telle que

- $\pi_i(f) = \pi_i(f')$ *pour* $i \leq k$
- *il y a un épimorphisme $\pi_{k+1}(f) \to \pi_{k+1}(f')$ dont le noyau contient la classe de $\mathbb{S}^k \hookrightarrow N$.*

En particulier, la proposition précédente permet de montrer, par une simple récurrence, le résultat suivant.

Proposition 1.6. *Soit $(f, b) : N \to M$ une application normale de degré un entre variétés orientables compactes de dimension n. Alors, après un nombre de fini de chirurgies (sur une application normale de degré un), on peut se ramener à une application normale de degré un $(f', b') : N' \to M$ telle que $f' : N' \to M$ soit $[\frac{n}{2}]$-connexe.*

Notre procédure pour transformer une application normale de degré un en équivalence d'homotopie par chirurgies successives se terminerait s'il était possible de poursuivre un cran plus loin (par dualité de Poincaré). Cependant, une obstruction, appelée *obstruction de chirurgie*, apparait en dimension $[\frac{n}{2}]$. Cette obstruction, vivant dans un groupe provenant de la L-théorie de l'anneau $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ s'annule si et seulement si l'application normale peut être déformée via un nombre fini de chirurgies en une équivalence d'homotopie.

2 La suite exacte de chirurgie

Nous présentons ici l'outil algébrique principal permettant de calculer $\mathcal{S}_{CAT}(M)$, pour une variété compacte orientable de dimension $n \geq 5$.

Proposition 2.1. *Soit M une CAT-variété compacte sans bord de dimension $n \geq 5$. Alors nous avons la suite exacte d'ensembles suivante :*

$$L_{n+1}\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right) \to \mathcal{S}_{CAT}(M) \to [M, G/CAT] \xrightarrow{S} L_n\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right).$$

2.1 Les différents ensembles en jeu dans la suite exacte

2.1.1 L'ensemble structural $\mathcal{S}_{CAT}(M)$

C'est l'objet qui reflète les différentes CAT-variétés ayant le même type d'homotopie que M, et est donc l'objet qui nous intéresse.

2.1.2 Les invariants normaux $[M, G/CAT]$

Comme on l'a vu précédement, les applications normales de degré un sont les candidats sur lesquels on peut tenter d'effectuer une chirurgie pour obtenir une équivalence d'homotopie. L'ensemble de ces applications, quotienté par une relation d'équivalence que nous ne décrirons pas ici, est alors en correspondance bijective (non naturelle) avec l'ensemble $[M, G/CAT]$ des classes d'homotopie d'applications de M dans un espace noté G/CAT. Cet espace est la fibre d'homotopie de la fibration $BCAT \to BG$, où BG est l'espace classifiant associés aux fibrés en sphères stables.

Les espaces classifiants $BG, BCAT$ ainsi que leurs fibres d'homotopie G/CAT ont été intensément étudiés. Les techniques de théorie de l'homotopie permettent en général d'obtenir suffisament d'information sur le groupe $[M, G/CAT]$.

2.1.3 Les L-groupes $L_*(\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$

Ce sont les groupes dans lesquels vivent les *obstructions de chirurgie*. Ils sont définis en termes de formes et formations quadratiques. Pour une description de ces groupes, nous renvoyons à [Ran02].

Donnons toutefois un exemple. Si la variété M étudiée est simplement connexe et de dimension n divisible par 4, on a alors $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \simeq \mathbb{Z}$, et l'obstruction pour déformer une application normale de degré un en équivalence d'homotopie est donnée par

$$\frac{1}{8}(\sigma(N) - \sigma(M)).$$

En d'autres termes, l'application $(f, b) : N \to M$ peut être déformée en une équivalence d'homotopie si et seulement si N et M ont même signature.

2.2 Les applications présentes dans la suite exacte de chirurgie

2.2.1 La *surgery obstruction map* S

Étant donnée une application normale de degré un $f : N \to M$ entre deux variétés compactes orientables de dimension n, on peut effectuer des chirurgies pour obtenir une application normale de degré un qui soit $\left[\frac{n}{2}\right]$-connexe. On définit alors $S(f,b)$ comme l'obstruction de chirurgie pour transformer cette application en une équivalence d'homotopie. Cette obstruction vit dans $L_n\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right)$.

2.2.2 L'application d'oubli $\mathcal{S}(M) \to [M, G/CAT]$

Une équivalence d'homotopie $f : N \to M$ produit naturellement une application normale de degré un

$$\begin{tikzcd} \nu_N \arrow[r] \arrow[d] & (f^{-1})^*\nu_N \arrow[d] \\ N \arrow[r, "f"] & M. \end{tikzcd}$$

2.2.3 L'action de $L_{n+1}\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right)$ sur $\mathcal{S}_{\boldsymbol{CAT}}(M)$

Il existe une action naturelle de $L_{n+1}\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right)$ sur $\mathcal{S}_{CAT}(M)$, que nous ne décrirons pas ici. L'exactitude de la suite exacte de chirurgie en $\mathcal{S}_{CAT}(M)$ signifie alors que deux éléments du CAT-structure set donnent la même classe d'application normale de degré un si et seulement si ils sont dans la même orbite sous l'action de $L_{n+1}\left(\mathbb{Z}\left[\pi_1(M)\right]\right)$.

2.3 Suite exacte de chirurgie et conjecture de Borel

L'avantage principal de la suite exacte de chirurgie est de relier $\mathcal{S}_{CAT}(M)$, objet dont la définition topologique le rend difficilement calculable, à des objets dont la nature algébrique permet des calculs plus aisés. Le problème majeur est alors de comprendre les applications mises en jeu dans cette suite exacte.

La conjecture de Borel a été démontrée pour une large classe de groupes. Citons entre autres les variétés à courbure négative ou nulle (Farrell-Jones [FJ90]), et les variétés asphériques dont le groupe fondamental est hyperbolique ou CAT(0) (Lück-Bartels [BL09]). La géométrie des groupes s'est révélée être un élément crucial dans la compréhension des applications en jeu dans la suite exacte de chirurgie.

Références

[BL09] A. Bartels and W. Lück. The Borel conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups. Preprintreihe SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 506 Münster, arXiv :0901.0442v1 [math.GT]. 2009.

[Bro72] W. Browder. *Surgery on Simply-Connected Manifolds.* Ergebnisse series 65, Springer-Verlag, 1972.

[FJ90] F.T. Farrell and L.E. Jones. Topological rigidity for compact nonpositively curved manifolds. *Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)*, pages 229–274, 1990.

[Gra71] A. Gramain. *Topologie des surfaces.* Presses Universitaires de France, 1971.

[HW69] W.C. Hsiang and C.T.C. Wall. On homotopy tori II. *Bull. of the Lond. Math. Soc.*, (1969).

[Lüc01] W. Lück. A basic introduction to surgery theory. *ICTP Lecture Notes Series 9, Band 1, of the school "High-dimensional manifold theory" in Trieste*, 2001.

[Mil56] J.W Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.* ***64**, n°2*, pages 399–405, 1956.

[Mos68] G.D Mostow. Quasi-conformal mappings and the rigidity of the hyperbolic space forms. *Publ. Math. IHES* ***34***, pages 53–104, 1968.

[MS74] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic classes.* Annals of Mathematic Studies 76, Princeton University Press, 1974.

[Ran02] A. Ranicki. *Algebraic and geometric surgery.* Oxford Science Publications. (2002).

[Wal70] C.T.C. Wall. *Surgery on compact manifolds.* (1970).