

# **Théorie de Morse et topologie des variétés**

Alexis BOUTHIER

Alexandre MARTIN

## **Table des matières**

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 - Fonctions de Morse</b>	<b>5</b>
<b>2 - Décomposition des variétés</b>	<b>9</b>
<b>3 - Inégalités de Morse</b>	<b>13</b>
<b>4 - Théorème de Künneth</b>	<b>18</b>
<b>5 - Homologie des variétés réelles</b>	<b>23</b>
<b>6 - Vers les sphères exotiques...</b>	<b>25</b>
<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

**Remerciements:**

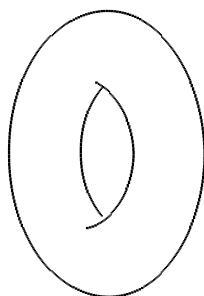
Nous tenons à exprimer notre sincère reconnaissance à Frédéric PAULIN pour ses nombreux conseils, et la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de notre travail.

*“ De toute façon, c’est un problème local... ”*

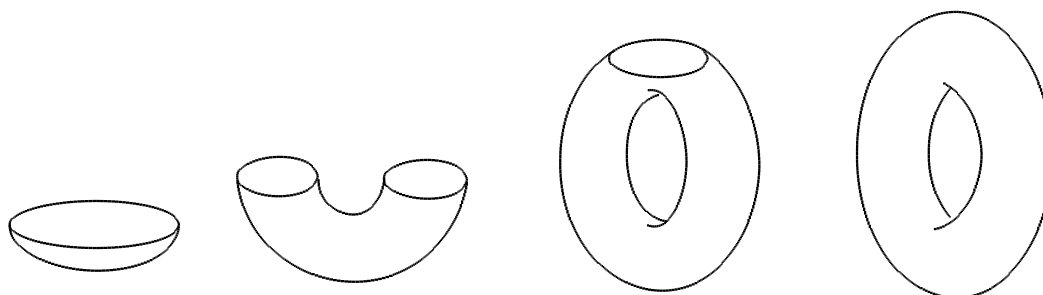
## Introduction

Le but de notre étude est de comprendre dans quelle mesure la connaissance de certaines fonctions réelles sur une variété permet d'obtenir des informations sur la topologie de la variété sous-jacente. Illustrons nos propos par un exemple:

Considérons la fonction hauteur  $h$  sur le tore.



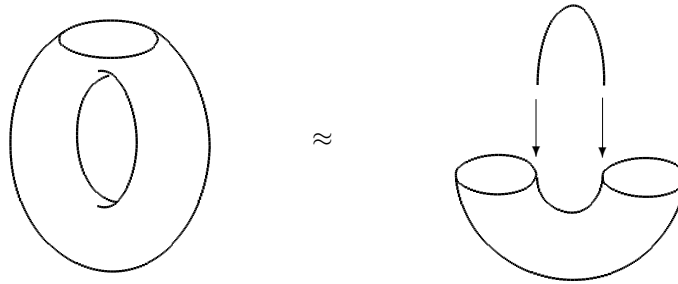
et étudions les sous-surfaces de niveau  $M_a = h^{-1}(]a, \infty])$  au fur et à mesure que  $a$  croît. À équivalence d'homotopie près on obtient successivement quatre espaces (plus l'ensemble vide):



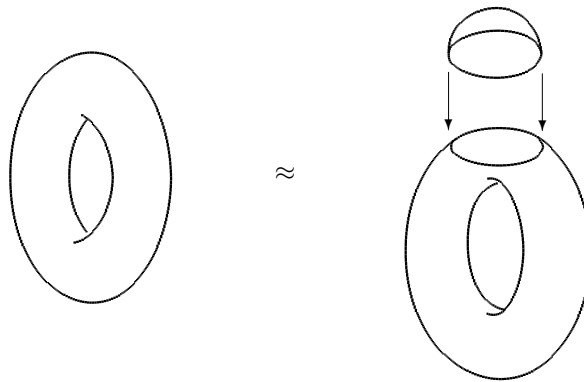
Regardons comment passer d'un espace à l'autre (à équivalence d'homotopie près).

- (i) Le passage du minimum se fait en attachant un point à l'ensemble vide.
- (ii) Le passage des points selles se fait en attachant un segment (recollé par ses extrémités).





(iii) Le passage du maximum se fait en attachant un disque (recollé suivant son bord).



Ainsi, le changement obtenu au passage d'un point critique semble se faire par recollement d'espaces relativement simples dont la nature semble très fortement liée à la nature du point critique.

Le but de notre étude est de formaliser et de démontrer cette décomposition des variétés compactes, dont nous verrons ensuite diverses applications.

# 1 Fonctions de Morse

Soit  $M$  une variété compacte  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ , et  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$

**Définition** Un point  $x_0 \in M$  est dit *critique* si  $T_{x_0}f = 0$  ou, de manière équivalente, si l'application lue dans une carte locale  $(U, \varphi)$  admet  $\varphi(x_0)$  comme point critique.

Un point critique sera dit *non dégénéré* si l'application lue dans une carte locale  $(U, \varphi)$  admet  $\varphi(x_0)$  comme point critique non dégénéré, i.e si la matrice hessienne de  $f \circ \varphi^{-1}$  en  $\varphi(x_0)$  est inversible.

Une application  $f$  sera dite *de Morse* si tous ses points critiques sont non dégénérés. Si  $x_0$  est un point critique de  $f$  et  $(U, \varphi)$  une carte locale, notons

$$\mathcal{H}_f(x_0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On définit alors *l'indice* du point critique  $x_0$  comme la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel sur lequel  $\mathcal{H}_f(x_0)$  induit une forme quadratique définie négative.

Cette définition a bien un sens dans la mesure où ces définitions sont indépendantes du système de coordonnées choisi. En effet, si  $(V, \psi)$  représente un autre système de coordonnées, on a

$$\mathcal{H}_{f, \psi}(x_0) = {}^t J(x_0) \mathcal{H}_{f, \varphi}(x_0) J(x_0)$$

avec  $J(x_0) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

Le résultat fondamental suivant permet de mieux comprendre une fonction de Morse au voisinage d'un point critique.

**Lemme de Morse** Soit  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  de Morse,  $x_0$  un point critique de  $f$  d'indice  $\lambda$ . Alors il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U), \quad f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) - f(x_0) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

**Démonstration** Par localité, on se ramène au cas où  $M$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{i, j=1}^n \underbrace{\left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) ds dt \right)}_{=h_{ij}(x)} x_i x_j$$

Notons  $H(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $Q := H(0) = d^2 f_{x_0}$ , et soit  $\xi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ , l'application définie par  $A \longmapsto {}^t A Q A$ .

Montrons que  $d\xi_{I_n}$  est surjective. On a  $d\xi_{I_n}(a) = {}^t a Q + Q a$ . Si  $q \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $d\xi_{I_n}(Q^{-1}q/2) = q$ , ce qui conclut. Le théorème des submersions donne l'existence d'une fonction  $\varphi$  définie au voisinage de  $Q$ , avec  $\varphi(Q) = I_n$ , et  ${}^t \varphi(q) Q \varphi(q) = q$ .

Posons alors  $\psi(x) = \varphi(H(x))x$ , d'où

$$f(x) - f(x_0) = {}^t x H(x) x = {}^t x {}^t \varphi(H(x)) Q \varphi(H(x)) x = {}^t \psi(x) Q \psi(x)$$

Comme  $\psi(0) = 0$ ,  $d\psi_0 = \varphi(H(0)) = I_n$ ,  $\psi$  est un difféomorphisme local, et le théorème de réduction des matrices symétriques réelles assure l'existence de  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $f \circ \psi^{-1} \circ P^{-1}(x) - f(x_0) = {}^t x I_{\lambda, n-\lambda} x$ , ce qui conclut.  $\square$

**Corollaire** Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés. En particulier, si  $M$  est compacte, alors  $f$  n'a qu'un nombre fini de points critiques.

Nous allons à présent démontrer l'existence de fonctions de Morse pour une variété compacte quelconque. Pour cela nous allons démontrer un résultat plus fort stipulant que, en un sens à préciser, toute fonction  $\mathcal{C}^\infty$  peut être approchée par une fonction de Morse. Commençons par traiter le cas d'un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^p$ , le cas général s'y ramenant grâce à des cartes locales.

**Lemme 1.1** Soit  $U$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  de Morse, telle que  $\|f - g\|_{\mathcal{C}^2} < \epsilon$ , où

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^2} = \|f - g\|_\infty + \sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial(f - g)}{\partial x_i} \right\|_\infty + \sum_{i,j=1}^p \left\| \frac{\partial^2(f - g)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty.$$

**Démonstration** Définissons  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ , qui est  $\mathcal{C}^\infty$ , par  $h(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq p}$ .

On remarque que la matrice jacobienne de  $h$  est exactement la matrice hessienne de  $f$ , donc  $x$  est un point critique non dégénéré de  $f$  si et seulement si  $h(x) = 0$  et  $dh_x$  est inversible. Or, par le théorème de Sard (cf [H], ch.3 page 68), on peut trouver  $a_1, \dots, a_p$  aussi petits que voulus tels que  $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$  soit une valeur régulière de  $h$ . Posons alors

$$\tilde{f}(x) = f(x) - (a_1 x_1 + \dots + a_p x_p)$$

L'application  $\tilde{f}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de même matrice hessienne que  $f$ . Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  un point critique de  $\tilde{f}$ . On a donc  $h((x_i)_{1 \leq i \leq p}) = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$  et, par choix des  $a_i$ ,  $\mathcal{H}_{\tilde{f}}((x_i)_{1 \leq i \leq p}) = \mathcal{H}_f((x_i)_{1 \leq i \leq p})$  est inversible, et  $\tilde{f}$  est une fonction de Morse. Enfin, par relative compacité de  $U$ , on peut, quitte à choisir les  $a_i$  suffisamment petits, imposer  $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{C}^2} < \epsilon$ , ce que l'on voulait.  $\square$

Passons au cas général. Remarquons que  $M$  étant compacte, on peut se donner un atlas fini  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  de cartes locales dont les domaines recouvrent  $M$ , et des compacts  $K_i \subset U_i$  tels que  $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$  soit aussi un recouvrement de  $M$  (en effet, par locale compacité, les intérieurs de compacts inclus dans des domaines de cartes recouvrent  $M$ ).

Fixons une fois pour toute ces  $U_i, \varphi_i, K_i$ , et donnons-nous des fonctions plateaux  $(\rho_i)_{1 \leq i \leq N}$ , avec  $\rho_i$  valant 1 sur un voisinage de  $K_i$  et à support compact inclus dans  $U_i$ . Commençons par préciser ce que l'on entend par "approximation d'une fonction":

**Définition** On appelle  $(\mathcal{C}^2, \epsilon)$ -approximation d'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  une fonction  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \|(f \circ \varphi_i^{-1} - g \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(U_i)}\|_{\mathcal{C}^2} < \epsilon.$$

Fixons  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ . Notre but est de construire, pour tout  $\epsilon > 0$ , une  $(\mathcal{C}^2, \epsilon)$ -approximation de  $f$  par une fonction de Morse. Nous allons construire cette approximation par perturbations

successives de  $f$  sur les compacts  $K_i$ . Nous aurons donc besoin du lemme suivant nous assurant que la propriété de n'avoir que des points critiques non dégénérés sur un compact est stable par petites perturbations.

**Lemme 1.2** *Soit  $K$  un compact de  $M$  tel que  $f$  n'ait pas de point critiques dégénérés dans  $K$ . Alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , toute  $(\mathcal{C}^2, \epsilon)$ -approximation de  $f$  n'ait pas de points critiques dégénérés dans  $K$ .*

**Démonstration** Il suffit de traiter le cas où  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (puisque l'on a un nombre fini d'ouverts de cartes recouvrant  $M$ ). Mais alors le résultat est évident puisque ne pas avoir de points critiques dégénérés sur un compact  $K$  est équivalent à

$$\forall x \in K, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(g)}{\partial x_i}(x) \right| + \left| \det \left( \left( \frac{\partial^2(g)}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \right| > 0$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cette section:

**Théorème 1.1** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe des fonctions  $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec:*

- (i)  $f - f_k$  est à support dans  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i$ ,
- (ii)  $f_k$  est une  $(\mathcal{C}^2, k\epsilon)$ -approximation de  $f$ ,
- (iii)  $f_k$  n'a que des points critiques non dégénérés sur  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} K_i$ .

En particulier,  $f_N$  est une fonction de Morse.

**Démonstration** Posons  $f_0 = f$  et  $U_0 = K_0 = \emptyset$  et montrons le résultat par récurrence sur  $k$ . La propriété est trivialement vraie pour  $k = 0$ , supposons-la vraie au rang  $k \geq 0$ .

D'après la démonstration du lemme 1.1, on peut choisir  $a_1, \dots, a_n$  arbitrairement petits tels que l'application de  $U_{k+1}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $x \mapsto f(x) - (a_1(\varphi_{k+1})_1(x) + \dots + a_n(\varphi_{k+1})_n(x))$  n'ait pas de points critiques dégénérés. Définissons  $f_{k+1}$  comme suit:

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x) - \rho_{k+1}(x)(a_1(\varphi_{k+1})_1(x) + \dots + a_n(\varphi_{k+1})_n(x)) & \text{si } x \in U_{k+1} \\ f_k(x) & \text{si } x \in (\text{Supp } \rho_{k+1})^c \end{cases}$$

On définit ainsi une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , qui vérifie (i) par hypothèse de récurrence.

On a,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= \rho_{k+1}(x)(a_1(\varphi_{k+1})_1(x) + \dots + a_n(\varphi_{k+1})_n(x)), \\ \frac{\partial (f_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial (f_k \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i}(x) &= a_i \rho_{k+1}(\varphi_{k+1}^{-1}(x)) + (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \frac{\partial (\rho_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1})^{-1}}{\partial x_i}(x) \\ \frac{\partial^2 (f_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 (f_k \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= a_i \frac{\partial \rho_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1}}{\partial x_j}(x) + a_j \frac{\partial (\rho_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i}(x) \\ &\quad + (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \frac{\partial^2 (\rho_{k+1} \circ \varphi_{k+1}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x) \end{aligned}$$

donc, quitte choisir les  $a_i$  suffisamment petits, on peut supposer que  $f_{k+1}$  soit une  $(\mathcal{C}^2, \epsilon)$ -approximation de  $f_k$ , donc une  $(\mathcal{C}^2, (k+1)\epsilon)$ -approximation de  $f$ , d'où (ii). Par construction,  $f_{k+1}$  n'a pas de points critiques dégénérés dans  $K_{k+1}$ . Enfin, quitte à choisir les  $a_i$  suffisamment petits, on peut appliquer le lemme 1.2 à  $f_k$  et  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} K_i$ , d'où (iii), ce qui achève la récurrence.  $\square$

Ainsi, en appliquant ce théorème à la fonction nulle de  $M$ , on en déduit l'existence d'une fonction de Morse sur  $M$ . De plus, le théorème 1.1 et le lemme 1.2 (appliqué à  $K = M$ ) traduisent respectivement la densité et l'ouverture de l'ensemble des fonctions de Morse dans  $(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^2})$ , avec  $\|g\|_{\mathcal{C}^2} = \sum_{i=1}^N \|(g \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(U_i)}\|_{\mathcal{C}^2}$ . Remarquons que cette topologie sur  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  (ou plus naturellement sur  $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$ ) ne dépend pas du recouvrement choisi.

Il sera utile par la suite de supposer qu'à deux points critiques distincts correspondent deux valeurs critiques différentes (on dira alors que la fonction  $f$  est ordonnée). Cela résulte du lemme suivant.

**Lemme 1.3** *Toute variété compacte  $M$  possède une fonction de Morse ordonnée.*

**Démonstration** Soit  $x_0$  un point critique d'une fonction de Morse  $f$  sur  $M$ . Par le lemme de Morse, soit  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  en  $x$  tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U), \quad f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) - f(x_0) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

On peut par exemple supposer que  $\varphi(U) \supset B(0, 2)$ . Soit  $\rho : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction plateau sur un voisinage de 0, à support dans  $B(0, 1)$ , et valant 1 sur  $B(0, 1/2)$ . Soit  $\epsilon > 0$  et considérons  $g_\epsilon = f + \epsilon \rho \circ \varphi$  prolongée par  $f$  en dehors de  $U$ . Il est clair que pour  $\epsilon$  suffisamment petit,  $f$  et  $g$  ont mêmes points critiques dans  $U$ , donc sur  $M$ , et  $g(x_0) = f(x_0) + \epsilon$ . Pour tout autre point critique  $y$ , on a  $g(y) = f(y)$ . On conclut par récurrence.  $\square$

Dans la suite, toutes les fonctions de Morse seront supposées ordonnées. En considérant une suite exhaustive de compacts, on peut de même démontrer l'existence de fonctions de Morse (ordonnées) sur une variété non nécessairement compacte.



## 2 Décomposition des variétés compactes

Dans cette section, nous montrons que la donnée d'une fonction de Morse sur une variété compacte permet une décomposition relativement simple de cette variété, comme pressenti dans l'introduction.

Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ , et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .  
Notons, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $M_a = f^{-1}(]-\infty, a])$

**Lemme 2.1** *Soit  $a < b$ . Si  $f^{-1}([a, b])$  ne contient aucun point critique, alors*

- (i) *Les variétés compactes à bord  $M_b$  et  $M_a$  sont difféomorphes,*
- (ii)  *$M_a$  est un rétracte par déformation forte de  $M_b$*

**Démonstration:** On peut, quitte à utiliser le théorème de Whitney, supposer que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . On dispose donc d'un produit scalaire sur  $M$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit alors  $\text{grad } f$  l'unique champ de vecteurs sur  $M$  vérifiant

$$\forall X \in \Gamma(TM), \langle X, \text{grad } f \rangle = \mathcal{L}_X(f) \quad (\text{dérivée de Lie})$$

Soit  $V$  un voisinage de  $f^{-1}([a, b])$  tel que  $f$  n'ait pas de point critique dans  $V$  (par compacité de  $f^{-1}([a, b])$  et continuité de  $\text{grad } f$ ), et  $\chi$  une fonction plateau à support dans  $V$ , valant 1 sur un voisinage  $V'$  de  $f^{-1}([a, b])$ . Définissons alors  $X \in \Gamma(TM)$  par

$$X(q) = \begin{cases} \frac{\chi(q)}{\|\text{grad } f(q)\|^2} (\text{grad } f)(q) & \text{si } q \in V \\ 0 & \text{si } q \in (Supp \chi)^c. \end{cases}$$

Soit  $\phi$  le flot local de ce champ. La variété  $M$  étant compacte, on a  $\phi$  est défini sur  $M \times \mathbb{R}$ .

Pour  $x \in V'$ ,  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} f \circ \phi_t(x) = \langle \text{grad } f(\phi_s(x)), X(\phi_s(x)) \rangle = 1$

Par suite  $\phi_{b-a} : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme de  $M$  induisant un difféomorphisme de  $M_a$  sur  $M_b$ , d'où (i).

On définit ensuite, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $r_t : M_b \rightarrow M_b$  par

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{si } q \in M_a \\ \phi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } q \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

L'application  $M_b \times [0, 1] \rightarrow M_b$  définie par  $(x, t) \mapsto r_t(x)$  est continue (dépendance en les conditions initiales).  $r_0 = Id, r_1$  est une rétraction de  $M_b$  sur  $M_a$ , d'où (ii).  $\square$

Passons maintenant au cas d'un point critique d'indice  $\lambda$ . Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse (ordonnée) sur  $M$ ,  $p$  un point critique de  $f$  d'indice  $\lambda$  et  $c = f(p)$ . Nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.1:** *Pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, il existe une application continue  $g : \mathbb{S}_\lambda \rightarrow M$  telle que  $M_{c+\epsilon}$  ait le type d'homotopie de  $M_{c-\epsilon} \cup_g \mathbb{D}_\lambda$ . On dit que  $M_{c+\epsilon}$  a le type d'homotopie de  $M_{c-\epsilon}$  avec une  $\lambda$ -cellule attachée.*

**Démonstration** Par application du lemme de Morse, soit  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  en  $p$  avec  $\varphi(p) = 0$ .

On a donc  $\forall x \in U$ ,  $f(x) - c = -\varphi_1(x)^2 - \dots - \varphi_\lambda(x)^2 + \varphi_{\lambda+1}(x)^2 + \dots + \varphi_n(x)^2$

Soit  $\epsilon > 0$  tel que

(i)  $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  est compact avec  $p$  pour seul point critique (par compacité locale de  $M$  et caractère isolé des points critiques),

(ii)  $\varphi(U) \supset B(0, \sqrt{2\epsilon}) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2 \leq 2\epsilon \right\}$ .

Posons  $e^\lambda = \{x \in M / \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_\lambda(x)^2 \leq \epsilon, \varphi_{\lambda+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0\}$ , et  $\dot{e}^\lambda = \partial e^\lambda$ .

Montrons que  $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$  est un rétracte par déformation de  $M_{c+\epsilon}$ .

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction plateau à support dans  $] - \infty, \frac{7}{4}\epsilon]$ , valant 1 sur un voisinage de  $] - \infty, \frac{2}{3}\epsilon]$ , et soit  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto - \int_{2\epsilon}^x g(t) dt$

$\mu$  vérifie

(i)  $\mu(0) > \epsilon$

(ii)  $\mu(r) = 0$  pour  $r \geq 2\epsilon$

(iii)  $-1 < \mu'(r) \leq 0$  pour tout  $r$  dans  $\mathbb{R}$ .

Notons à présent, pour  $x \in U$ ,  $\xi(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_\lambda(x)^2$  et  $\eta(x) = \varphi_{\lambda+1}(x)^2 + \dots + \varphi_n(x)^2$ , et posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \mu(\xi(x) + 2\eta(x)) & \text{si } x \in U \\ f(x) & \text{si } \|\varphi(x)\|^2 \geq \frac{7}{4}\epsilon. \end{cases}$$

L'application  $F$  est  $C^\infty$  et on a donc  $F(x) = c - \xi(x) + \eta(x) - \mu(\xi(x) + 2\eta(x))$ , si  $x \in U$ .

**Fait 1**  $F^{-1}([-\infty, c + \epsilon]) = f^{-1}([-\infty, c + \epsilon])$ .

**Démonstration** En dehors de  $\{x \in U / \xi(x) + 2\eta(x) \leq 2\epsilon\}$ ,  $f$  et  $F$  coïncident.

Dans  $\{x \in U / \xi(x) + 2\eta(x) \leq 2\epsilon\}$ ,  $F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \epsilon$ . □

**Fait 2** Les applications  $f$  et  $F$  ont mêmes points critiques.

**Démonstration** Dans  $U$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$ , et  $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$ .

Comme  $dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$ , si  $dF(x) = 0$ , alors  $d\xi(x) = 0$  et  $d\eta(x) = 0$  donc  $\varphi(x) = 0$  et par conséquent  $x = p$ . □

**Fait 3** Le sous-espace  $F^{-1}([-\infty, c - \epsilon])$  est un rétracte par déformation forte de  $M_{c+\epsilon}$ .

**Démonstration**  $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \subset f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  d'après le Fait 1 et l'inégalité  $F \leq f$ , donc  $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  est compact avec pour seul point critique éventuel  $p$ . Mais  $F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$ . Par suite,  $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  est compact sans point critique, et d'après le lemme 2.1,  $F^{-1}([-\infty, c - \epsilon])$  est un rétracte par déformation de  $F^{-1}([-\infty, c + \epsilon])$ , ce qui conclut.  $\square$

On note  $H = \overline{F^{-1}([-\infty, c + \epsilon])} - M_{c-\epsilon}$ , de sorte que  $F^{-1}([-\infty, c + \epsilon]) = M_{c-\epsilon} \cup H$  ( $H$  est appelée une *anse attachée* à  $M_{c-\epsilon}$ ).

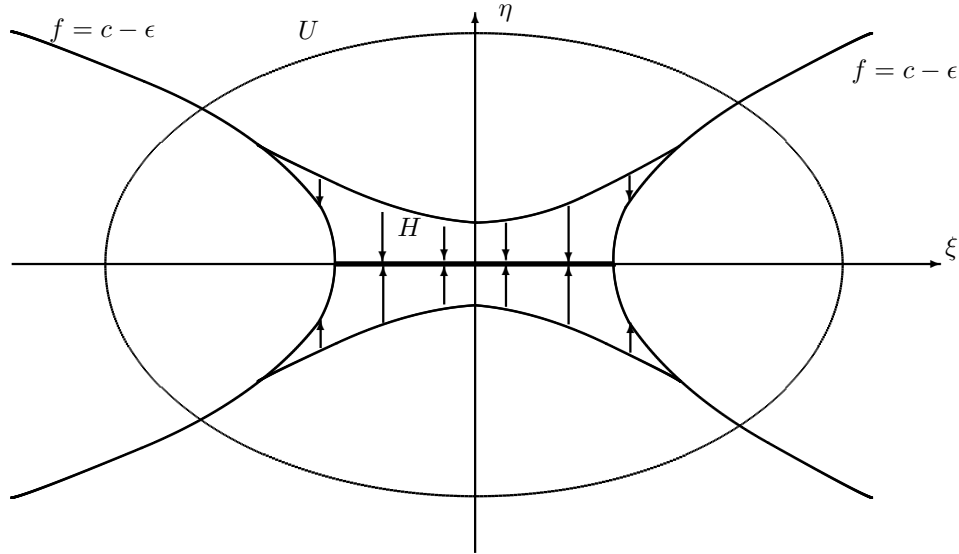
**Fait 4** On a  $e^\lambda \subset H$

**Démonstration** Comme  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ , pour tout  $q \in e^\lambda$ ,  $F(q) \leq F(p) < c - \epsilon$

Or  $f(q) \geq c - \epsilon \quad \forall q \in e^\lambda$ , ce qui conclut.  $\square$

**Fait 5** Le sous-espace  $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$  est un rétracte par déformation forte de  $M_{c-\epsilon} \cup H$ .

**Démonstration** La situation est résumée par la figure suivante (on renvoie à [Mil] pages 18-19 pour le détail des calculs).



Les faits 3 et 5 entraînent le théorème 2.1.  $\square$

**Définition** On appelle CW-complexe fini un espace topologique  $X$  tel qu'il existe des sous-espaces  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$  tels que

- (i)  $X_0$  est un ensemble fini de points,
- (ii)  $X_{k+1}$  est obtenu à partir de  $X_k$  en y attachant des  $(k+1)$ -cellules.

On est à présent en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

**Théorème 2.2** *Si  $M$  est une variété compacte, alors  $M$  a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini, avec une  $\lambda$ -cellule pour chaque point critique d'indice  $\lambda$ .*

**Démonstration** La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de points critiques, en utilisant les deux résultats classiques de topologie algébrique suivants (on renvoie à [Mi1] pages 20-21 pour leur démonstration):

**Lemme 2.2** (i) *Soit  $X$  un espace topologique avec une cellule attachée, et  $\varphi_0, \varphi_1 : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$  homotopes. Alors  $Id_X$  s'étend en une équivalence d'homotopie*

$$k : X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$$

(ii) *Soit  $\varphi : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$  une application d'attachement. Alors toute équivalence d'homotopie  $f : X \rightarrow Y$  s'étend en une équivalence d'homotopie*

$$F : X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f \circ \varphi} e^\lambda$$

□

Ce théorème de décomposition est un outil extrêmement puissant (ainsi que son équivalent lisse, la *décomposition en anses*, qui a d'ailleurs mené à la preuve de la conjecture de Poincaré en grandes dimensions). Les parties suivantes montrent des applications de la théorie de Morse à l'étude de la topologie des variétés.

### 3 Inégalités de Morse

Dans la section précédente, nous avons vu dans quelle mesure les points critiques d'une fonction de Morse permettaient de mieux comprendre la topologie d'une variété. Nous poursuivons ici cette étude d'un point de vue cohomologique, en reliant les points critiques d'une fonction de Morse et la dimension des espaces de cohomologie de la variété.

Soit  $S$  une fonction qui à une paire d'espaces topologiques associe un entier. La fonction  $S$  est dite:

- sous-additive si  $\forall X \subset Y \subset Z, S(Z, X) \leq S(Z, Y) + S(Y, X)$
- additive si  $\forall X \subset Y \subset Z, S(Z, X) = S(Z, Y) + S(Y, X)$

Une récurrence immédiate entraîne que

$$\forall X_0 \subset \dots \subset X_n, \quad S(X_n, X_0) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} S(X_i, X_{i-1})$$

avec égalité si  $S$  est additive.

Si  $M$  est une variété à bord, nous dirons qu'une fonction  $f$  sur  $M$  est de Morse si, dans une carte locale  $(U, \varphi)$ ,  $f$  se prolonge à un voisinage de  $\varphi(U \cap M)$  en une fonction de Morse.

On a le résultat suivant:

**Lemme 3.1** *Soit  $M$  une variété à bord compact. Il existe une fonction  $f$  de Morse sur  $M$  telle que*

- $f^{-1}(0) = \partial M$
- $0$  est valeur régulière de  $f$
- $f$  propre
- si  $x$  et  $y$  sont deux points critiques distincts de  $f$ ,  $f(x) \neq f(y)$ .

*En particulier, si  $M$  est connexe,  $f$  est de signe constant.*

**Démonstration** D'après le théorème de Whitney, on peut supposer  $M$  proprement plongée dans  $\mathbb{R}^m$ . Démontrons d'abord qu'il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  submersive et nulle sur  $\partial M$ .

Soit  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  un recouvrement fini de  $\partial M$  par des cartes locales de domaines relativement compacts telles que

$$\forall i \quad \varphi_i(U_i) = [0, \infty[ \times \mathbb{R}^{n-1}$$

On a,

$$\forall i, \quad \forall x \in \partial M \cap U_i \quad \varphi_i(x)_1 = 0.$$

Si  $\psi$  est un autre système de coordonnées autour de  $x$ , alors  $\frac{\partial((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_1}(\psi(x)) > 0$ .

En effet,  $(\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1}(0, x_2, \dots, x_n) = 0$  donc, par différenciation,

$$\frac{\partial((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(0, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i > 1.$$

Comme  $d((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})$  est non singulière,

$$\frac{\partial((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n) \neq 0.$$

Comme  $(\varphi_i)_1$  est positive, nécessairement  $\frac{\partial((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

Posons alors, pour tout  $x$  dans  $M$ ,

$$g(x) = \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi_i(x) (\varphi_i)_1(x)$$

Alors  $g$  est nulle sur  $\partial M$  et, pour tout  $x$  dans  $\partial M$ , si  $\psi$  est un système de coordonnées autour de  $x$ ,

$$\frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial x_1}(\psi(x)) = \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi_i(x) \frac{\partial((\varphi_i)_1 \circ \psi^{-1})}{\partial x_1}(\psi(x)) > 0.$$

donc  $g$  est submersive en tout point de  $\partial M$  (et nulle en dehors d'un voisinage compact de  $\partial M$ ).

Nous admettrons le lemme suivant (on renvoie à [Mu], théorème 5.9 page 56):

### **Théorème du voisinage tubulaire**

*Il existe un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $p$  de  $\partial M \times [0, 1[$  sur un voisinage de  $\partial M$ , avec  $p(x, 0) = x$  pour tout  $x \in \partial M$ . Un tel voisinage est appelé voisinage tubulaire.*  $\square$

Pour  $0 < \epsilon < 1$ , posons  $K = p(\partial M \times [0, \epsilon])$  (resp.  $L = p(\partial M \times [0, \epsilon/2])$ ), avec  $\epsilon$  choisi de sorte que  $g$  soit submersive sur  $K$ . D'après le lemme 1.2, soit  $\delta > 0$  tel que si  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  avec  $\|h|_K\|_{C^2} \leq \delta$ , alors  $g + h$  est submersive sur  $K$ . D'après le théorème de densité des fonctions de Morse, soit  $h$  une fonction de Morse sur  $M - L$  proche à  $\delta/4$  de la fonction  $x \mapsto \delta/2 + d(x, K)$ , que l'on prolonge par cartes locales en une fonction  $\tilde{h} \in C^\infty$  sur  $M$ , nulle sur un voisinage de  $\partial M$ . Alors  $g + h$  est de Morse sur  $M$ , et propre. Par cartes locales, et suivant la démonstration de l'existence de fonctions de Morse ordonnées, on peut se ramener à une fonction de Morse ordonnée non nulle sur  $M - \partial M$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Définition** Soit  $f$  une fonction de Morse sur  $M$ ,  $x_0$  un point critique d'indice  $\lambda$ ,  $(U, \varphi)$  une carte locale en  $x_0$  comme dans l'énoncé du lemme de Morse,  $\epsilon > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

On pose

$$M_b = f^{-1}(] - \infty, b])$$

$$M^b = f^{-1}(b)$$

$$\widetilde{M}_b = M_b - M^b$$

$$\begin{aligned}
V_b &= \widetilde{M}_b - \left\{ x \in U \cap \widetilde{M}_b \quad t.q \quad \sum_{1 \leq i \leq \lambda} \varphi_i(x)^2 < \frac{\epsilon}{8} \right\} \\
W_{1,b} &= \widetilde{M}_b - \left\{ x \in U \cap \widetilde{M}_b \quad t.q \quad \sum_{1 \leq i \leq \lambda} \varphi_i(x)^2 \leq \frac{\epsilon}{4} \right\} \\
W_{2,b} &= \widetilde{M}_b - \left\{ x \in U \cap \widetilde{M}_b \quad t.q \quad \frac{\epsilon}{8} \leq \sum_{1 \leq i \leq \lambda} \varphi_i(x)^2 \leq \frac{\epsilon}{4} \right\}
\end{aligned}$$

Soit  $M$  une variété compacte (éventuellement à bord),  $f$  une fonction de Morse ordonnée sur  $M$ ,  $x_1, \dots, x_k$  les points critiques de  $f$  d'indice  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , et  $a_1, \dots, a_k$  des réels non nuls tels que  $f(x_1) < a_1 < \dots < f(x_k) < a_k$ .

On dispose du résultat suivant, dont la démonstration est semblable à la décomposition en cellules.

**Lemme 3.2** *L'inclusion  $\iota : M_{a_i} \hookrightarrow V_{a_{i+1}}$  est une équivalence d'homotopie, d'où  $H^*(M_{a_i}, V_{a_{i+1}}) = 0$ .* □

On a donc:

$$\begin{aligned}
H^*(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) &= H^*(\widetilde{M}_{a_i}, M_{a_{i-1}}) \\
&= H^*(\widetilde{M}_{a_i}, V_{a_{i+1}}) && \text{(lemme 3.2)} \\
&= H^*(W_{1,a_i}, W_{2,a_i}) && \text{(excision)} \\
&= H^*(D_{\lambda_i}, S_{\lambda_i-1})
\end{aligned}$$

Pour  $(X, Y)$  une paire de variétés, posons,  $\forall \lambda \in \mathbb{N}$ ,  $b_\lambda(X, Y) = \dim H^\lambda(X, Y)$ . On appelle *polynôme de Poincaré* de  $(X, Y)$  le polynôme

$$P_{H^*(X, Y)}(T) = \sum_{\lambda \geq 0} b_\lambda(X, Y) T^\lambda$$

On a donc  $P_{H^*(\mathbb{D}_{\lambda_i}, S_{\lambda_i-1})} = T^{\lambda_i}$   
On en déduit le résultat suivant.

**Inégalités de Morse faibles** *Soit  $M$  une variété et  $f$  une fonction de Morse sur  $M$  possédant  $C_\lambda$  points critiques d'indice  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ). Alors*

- (i)  $b_\lambda(M, \partial M) \leq C_\lambda$
- (ii)  $\chi(M, \partial M) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda C_\lambda$

**Démonstration** (i)  $b_\lambda(\cdot, \cdot)$  est sous-additive et on a la décomposition  $\partial M = M_0 \subset M_{a_1} \subset \dots \subset M_{a_k} = M$ , d'où

$$b_\lambda(M, \partial M) \leq \sum_{1 \leq i \leq k} b_\lambda(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) = C_\lambda$$

L'assertion (ii) résulte du caractère additif de  $\chi$  □

### Inégalités de Morse fortes

$$\forall \lambda \in \mathbb{N} \quad , \quad \sum_{0 \leq k \leq \lambda} (-1)^k b_{\lambda-k}(M, \partial M) \leq \sum_{0 \leq k \leq \lambda} (-1)^k C_{\lambda-k}$$

**Démonstration** Posons  $R_\lambda(X, Y) = \sum_{0 \leq k \leq \lambda} (-1)^k b_{\lambda-k}(X, Y)$  et montrons que  $R_\lambda$  est sous-additive. Cela provient du lemme suivant, que l'on démontre par récurrence.

**Lemme 3.3** *Soit une suite exacte d'espaces vectoriels*

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{h_n} \dots \xrightarrow{h_4} E_3 \xrightarrow{h_3} E_2 \xrightarrow{h_2} E_1 \xrightarrow{h_1} E_0$$

Alors

$$\text{rg } h_1 = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \dim E_k \geq 0$$

On applique cela à la suite exacte longue de cohomologie d'un triplet  $Z \subset Y \subset X$  (voir [G] chapitre 12).

$$\dots \longrightarrow H^\lambda(X, Y) \longrightarrow H^\lambda(X, Z) \longrightarrow H^\lambda(Y, Z) \xrightarrow{\delta} H^{\lambda+1}(X, Y)$$

d'où  $\text{rg } \delta = R_\lambda(X, Y) + R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) \geq 0$

Par suite,  $R_\lambda(M, \partial M) \leq \sum_{1 \leq i \leq k} R_\lambda(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) = \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^k C_{\lambda-k}$  □

### Corollaire

- (i) Si  $M$  est compacte à bord,  $H(M)$  est de dimension finie.
- (ii) Si  $M$  est compacte à bord, et  $N$  une sous-variété fermée de  $M$ , alors  $H(M, N)$  est de dimension finie.
- (iii) Si  $M$  est une variété compacte sans bord de dimension impaire,  $\chi(M) = 0$ .

**Démonstration** (i) Par récurrence sur la dimension en utilisant la suite de cohomologie avec  $H(M)$ ,  $H(M, \partial M)$  et  $H(\partial M)$ .

(ii) On utilise (i) et la suite de cohomologie relative.

(iii) On utilise la formule de  $\chi(M)$  appliquée à  $-f$  qui est une fonction de Morse sur  $M$  possédant  $C_{n-\lambda}$  points critiques d'indice  $\lambda$ , d'où



$$\chi(M) = \sum_{0 \leq \lambda \leq n} (-1)^\lambda C_{n-\lambda} = - \sum_{0 \leq \lambda \leq n} (-1)^\lambda C_\lambda = -\chi(M)$$

□

**Proposition 3.1** Soient  $M, N$  deux variétés compactes,  $N$  étant supposée sans bord. Alors

$$\chi(N \times M, N \times \partial M) = \chi(N) \chi(M, \partial M)$$

**Démonstration** Soit  $f$  (resp.  $g$ ) une fonction de Morse strictement positive sur  $M$  (resp.  $N$ ),  $x_1, \dots, x_p$  (resp.  $y_1, \dots, y_q$ ) les points critiques de  $f$  (resp.  $g$ ), et posons  $c_i = f(x_i)$  (resp.  $d_j = g(y_j)$ ). On peut supposer les  $c_i d_j$  deux à deux distincts.

Soit  $h : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x)g(y)$ .

L'application  $h$  est de Morse sur  $M \times N$  avec comme points critiques les  $(x_i, y_j)$ . De plus, si  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) est d'indice  $\lambda_i$  (resp.  $\mu_j$ ),  $(x_i, y_j)$  est d'indice  $\lambda_i + \mu_j$ .

Notons  $C_r$  (resp.  $D_r$ , resp.  $E_r$ ) le nombre de points critiques d'indice  $r$  de  $f$  (resp.  $g$ , resp.  $h$ ). On a donc

$$E_r = \sum_{\lambda + \mu = r} C_\lambda D_\mu$$

d'où

$$\chi(N \times M, N \times \partial M) = \sum_{0 \leq r \leq n+m} (-1)^r E_r = \chi(N) \chi(M, \partial M).$$

□

**Corollaire** (i)  $\chi(\mathbb{T}_n) = 0$

(ii)  $\chi(\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}_q) = 1 + (-1)^p + (-1)^q + (-1)^{p+q}$ . En particulier,  $\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}_q$  et  $\mathbb{S}_{p+q}$  ne sont pas homotopes si  $p + q$  est pair.

**Proposition 3.2** Soient  $N$  variété compacte à bord, et  $p : M \longrightarrow N$  un revêtement  $\mathcal{C}^\infty$  à  $n$  feuillets. On a

$$\chi(M, \partial M) = n \chi(N, \partial N).$$

**Démonstration** Soit  $g$  une fonction de Morse ordonnée sur  $N$ . Puisque  $p$  est un difféomorphisme local, l'application  $g \circ p$  définit une fonction de Morse sur  $M$ , et à chaque valeur critique correspond  $n$  points critiques de  $g \circ p$  de même indice, ce qui conclut. □

**Corollaire** L'ordre d'un groupe fini opérant librement de manière  $\mathcal{C}^\infty$  sur une variété compacte  $M$  divise  $\chi(M, \partial M)$ .

**Application** Calcul des espaces de cohomologies des espaces projectifs réels et des espaces lenticulaires.

(i) La projection canonique  $\mathbb{S}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est un revêtement  $\mathcal{C}^\infty$  à 2 feuillets. La fonction hauteur sur  $\mathbb{S}_n$  descend en une fonction de Morse sur  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  possédant 2 points critiques d'indice 0 (resp. d'indice  $n$ ). Comme  $\dim H^0(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 1$ , les inégalités de Morse faibles impliquent que

$$P_{\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})} = 1 \quad P_{\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R})} = 1 + T^{2n+1}$$

(ii) La projection canonique  $\mathbb{S}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{L}_{n,p}$  est un revêtement  $\mathcal{C}^\infty$  à  $p$  feuillets. La fonction hauteur sur  $\mathbb{S}_n$  descend en une fonction de Morse sur  $\mathbb{L}_{n,p}$  possédant  $p$  points critiques d'indice 0 (resp. d'indice  $n$ ). Comme  $\dim H^0(\mathbb{L}_{n,p}) = 1$ , les inégalités de Morse faibles impliquent que

$$P_{\mathbb{L}_{n,p}} = 1 + T^{2n+1}$$

## 4 Théorème de Künneth

L'objectif de cette section est d'exprimer l'algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété produit à partir des algèbres de cohomologie des variétés. Dans toute cette partie,  $M$  sera une variété différentiable,  $N$  une variété sans bord, et  $P$  une sous-variété fermée de  $M$ .

Notons  $p_1 : M \times N \longrightarrow M$  (resp.  $p_2 : M \times N \longrightarrow N$ ) les projections canoniques, et définissons

$$K : H(M, P) \otimes H(N) \longrightarrow H(M \times N, P \times N) \text{ par } K(\alpha \otimes \beta) = (p_1^* \alpha)(p_2^* \beta)$$

On a la proposition immédiate suivante.

### Proposition 4.1

(i) Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $K(H^p(M, P) \otimes H^q(N)) \subset H^{p+q}(M \times N, P \times N)$

(ii) Si  $M = \mathbb{D}_n$  (boule unité),

$$\pi : \begin{cases} H(N) \longrightarrow H(\mathbb{D}_n) \otimes H(N) \\ \alpha \longmapsto 1 \otimes \alpha \end{cases}$$

et  $K = p_2^* \circ \pi^{-1}$ , donc  $K$  est un isomorphisme et  $H(\mathbb{D}_n) \otimes H(N) \approx H(N)$ .

Notre but est de démontrer les théorèmes suivants.

**Théorème de Künneth fort**

$K : H(M, P) \otimes H(N) \longrightarrow H(M \times N, P \times N)$  est un isomorphisme.

**Théorème de Künneth faible**

Si  $M$  est compacte,  $K : H(M) \otimes H(N) \longrightarrow H(M \times N)$  est un isomorphisme.

Pour cela, nous procédons par récurrence sur la dimension  $n$  de  $M$ , la proposition étant immédiate pour  $n = 0$ .

Soit  $f$  une fonction de Morse sur  $M$ . Il suffit de montrer la proposition suivante.

**Proposition 4.2:** Soit  $a < b$  tel qu'il existe une unique valeur critique  $c$  de  $f$  telle que  $a < c < b$ . Si  $K : H(M_a) \otimes H(N) \longrightarrow H(M_a \times N)$  est un isomorphisme, alors  $K : H(M_b) \otimes H(N) \longrightarrow H(M_b \times N)$  est un isomorphisme.

La proposition 4.2 résulte des deux lemmes suivants.

**Lemme 4.1** Soit  $p, q \in \mathbb{N}, p > 0$ . Alors la suite

$$0 \longrightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N) \longrightarrow H^q(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N) \longrightarrow 0$$

est exacte.

**Démonstration** On a une suite exacte longue de cohomologie relative

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N) &\longrightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N) \longrightarrow H^q(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{D}_p \times N) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N). \end{aligned}$$

Comme  $p_2 : \mathbb{S}_{p-1} \times N \longrightarrow N$  admet une section,  $p_2^* : H(N) \longrightarrow H(\mathbb{S}_{p-1} \times N)$  est injective.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(\mathbb{D}_p \times N) & \longrightarrow & H(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \\ \approx \uparrow & \nearrow p_2^* & \\ H(N) & & \end{array}$$

donc  $H(\mathbb{D}_p \times N) \longrightarrow H(\mathbb{S}_{p-1} \times N)$  est injective, ce qui conclut.  $\square$

**Lemme 4.2** Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n$ , l'application

$K : H^p(\mathbb{D}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \longrightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N)$  est un isomorphisme.

**Démonstration** On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{p-1}(\mathbb{D}_p) \otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^{q-1}(\mathbb{D}_p \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^{q-1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^p(\mathbb{D}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

De plus, par hypothèse de récurrence,  $K$  est un isomorphisme de

$$H^0(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-1}(N) \oplus H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \text{ sur } H^{q-1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \text{ si } p > 1,$$

$$H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \text{ sur } H^{q-1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \text{ si } p = 1.$$

Par suite, les deux premières flèches sont des isomorphismes, donc la troisième aussi pour  $p = 1$ , et pour  $p > 1$ ,

$$H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \xrightarrow{\cong} H^p(\mathbb{D}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \quad (\text{car } H^{p-1}(\mathbb{D}_p) = 0)$$

La composée des flèches  $H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \rightarrow H^{q-1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \rightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N)$  est un isomorphisme, puisqu'on a

$$H^0(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-1}(N) \oplus H^{p-1}(\mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \approx H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N)$$

$$\text{avec } H^{q-1}(\mathbb{D}_p \times N) \approx \text{Ker}( H^{q-1}(\mathbb{S}_{p-1} \times N) \longrightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N) )$$

donc  $K : H^p(\mathbb{D}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \longrightarrow H^q(\mathbb{D}_p \times N, \mathbb{S}_{p-1} \times N)$  est un isomorphisme.  $\square$

Soit  $\lambda$  l'indice du point critique correspondant à la valeur critique  $c$ .

Si  $\lambda = 0$ , on a le diagramme commutatif (en vertu de l'équivalence d'homotopie  $M_b \approx M_a \sqcup \mathbb{D}_n$ )

$$\begin{array}{ccc}
H(M_b) \otimes H(N) & \xrightarrow{\cong} & H(M_a) \otimes H(N) \quad \oplus \quad H(\mathbb{D}_n) \otimes H(N) \\
\downarrow K & & \downarrow \approx K \\
H(M_b \times N) & \xrightarrow{\cong} & H(M_a \times N) \quad \oplus \quad H(\mathbb{D}_n \times N)
\end{array}$$

Par conséquent,  $K : H(M_b) \otimes H(N) \longrightarrow H(M_b \times N)$  est un isomorphisme.

Si  $\lambda > 0$ , il faut vérifier que, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $K$  est un isomorphisme de  $\sum_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N)$  sur  $H^q(M_b \times N)$ .

On déduit de l'exactitude de la suite

$$H^{q-1}(M_a) \longrightarrow H^q(M_b, M_a) \longrightarrow H^q(M_b) \longrightarrow H^q(M_a) \longrightarrow H^{q+1}(M_b, M_a)$$

que les deux colonnes du diagramme commutatif suivant sont exactes :

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{r+s=q-1} H^r(M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^{q-1}(M_a \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b \times, M_a \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^q(M_a \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q+1} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^{q+1}(M_b \times N, M_a \times N)
\end{array}$$

Pour conclure, il suffit (par le lemme des cinq) de vérifier que

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad K : \underbrace{\sum_{r+s=q} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N)}_{=H^\lambda(M_b, M_a) \otimes H^{q-\lambda}(N)} \longrightarrow H^q(M_b \times N, M_a \times N)$$

est un isomorphisme.

Or on a le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
H^\lambda(M_b, M_a) \otimes H^{q-\lambda}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b \times N, M_a \times N) \\
\downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
H^\lambda(\tilde{M}_b, M_a) \otimes H^{q-\lambda}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(\tilde{M}_b \times N, M_a \times N) \\
\uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
H^\lambda(\tilde{M}_b, V_b) \otimes H^{q-\lambda}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(\tilde{M}_b \times N, V_b \times N) \\
\downarrow \text{excision} \approx & & \downarrow \text{excision} \approx \\
H^\lambda(W_{1,b}, W_{2,b}) \otimes H^{q-\lambda}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(W_{1,b} \times N, W_{2,b} \times N) \\
\downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
H^\lambda(\mathbb{D}_\lambda, \mathbb{S}_{\lambda-1}) \otimes H^{q-\lambda}(N) & \xrightarrow[\text{lemme 4.2}]{\approx} & H^q(\mathbb{D}_\lambda \times N, \mathbb{S}_{\lambda-1} \times N)
\end{array}$$

□

**Théorème 4.1** *Si  $M$  est une variété compacte,  $P$  une sous-variété fermée de  $M$ , et  $N$  une variété, alors  $K : H(M, P) \otimes H(N) \longrightarrow H(M \times N, P \times N)$  est un isomorphisme.*

**Démonstration** Les colonnes du diagramme sont exactes et on peut appliquer le lemme des cinq :

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{r+s=q-1} H^r(M) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^{q-1}(M \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q-1} H^r(P) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^{q-1}(P \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(M, P) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M \times N, P \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(M) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^q(M \times N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{r+s=q} H^r(P) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{\approx K} & H^q(P \times N).
\end{array}$$

□

## 5 Homologie des variétés réelles

Dans cette section, nous traitons le cas des variétés algébriques réelles, en donnant une borne explicite sur la dimension de leur espace de cohomologie.

Soit  $W$  une hypersurface compacte lisse de  $\mathbb{R}^m$  définie par l'équation  $f = 0$ , où  $f$  est un polynôme de degré  $k$ .

**Théorème**  $\dim H(W) \leq k(k-1)^{m-1}$

La démonstration s'appuiera sur le lemme admis suivant (on renvoie à  $[VDW]$  pour la démonstration).

**Lemme 5.1** *Soit  $V \subset \mathbb{R}^m$  une variété de dimension 0 définie par  $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$ . On suppose  $(df_i)_{1 \leq i \leq m}$  libre en tout point de  $V$ . Alors*

$$\text{card } V \leq \prod_{1 \leq i \leq m} \deg f_i$$

Définissons

$$n : \begin{cases} W \longrightarrow \mathbb{S}_{m-1} \\ x \longmapsto \frac{(\text{grad } f)(x)}{\|(\text{grad } f)(x)\|^2} \end{cases}$$

$n$  associe à chaque point de  $W$  son vecteur unité normal. Par le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques a une mesure nulle dans  $\mathbb{S}_{m-1}$ .

Donc, quitte à faire une rotation du système de coordonnées, on peut supposer que

$(0, \dots, 0, \pm 1) \in \mathbb{S}_{m-1}$  ne sont pas des valeurs critiques de  $n$ .

En termes de coordonnées locales  $(u_1, \dots, u_{m-1}) \in \varphi(U)$  ( $(\varphi, U)$  carte locale de  $W$ ), cela signifie

que  $\left( \frac{\partial n_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m-1}$  est non singulière si  $n \circ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_{m-1}) = (0, \dots, 0, \pm 1)$

On considère la fonction hauteur  $h : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_m$  sur  $W$ .

Montrons que c'est une fonction de Morse. En effet, au voisinage de chaque point critique  $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ , on choisit une carte locale  $(U, \varphi)$  munie d'un système de coordonnées  $(u_i)_{1 \leq i \leq m-1}$  avec

$$x_1 = u_1, \dots, x_{m-1} = u_{m-1}, x_m = \tilde{h}(u_1, \dots, u_{m-1}) \quad \text{avec } \tilde{h} = h \circ \varphi^{-1}$$

Donc

$$df_{(u_1, \dots, u_{m-1}, \tilde{h}(u_1, \dots, u_{m-1}))} = 0 \quad \implies \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_i} = 0$$

et

$$\tilde{n}(u_1, \dots, u_{m-1}) = \pm \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_{m-1}}, -1 \right) / \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq m-1} \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_i} \right)^2 + 1}$$

d'où, en évaluant en un point critique :

$$\frac{\partial n_i}{\partial u_j} = \pm \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial u_i \partial u_j}$$

ce qui conclut. □

Les inégalités de Morse faibles permettent donc de majorer  $\dim H(W)$  par le nombre de points critiques de  $h$ .

**Lemme 5.2** (i) *Les points critiques de  $h$  sont caractérisés par les solutions de*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}} = 0, \quad f = 0$$

(ii) *A chaque point critique de  $h$ ,  $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \dots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_{m-1}}\right)$ , et  $df$  sont linéairement indépendants.*

**Démonstration** (i) Par différenciation de  $f(u_1, \dots, u_{m-1}, \tilde{h}(u_1, \dots, u_{m-1})) = 0$ , il vient

$$\sum_{1 \leq i \leq m-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_i} \right) dx_i = 0$$

et

$$\left( \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right) \iff \left( \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_i} = 0 \right)$$

car  $W$  est lisse.

(ii) On différencie à nouveau et on évalue en un point critique, d'où:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial u_i \partial u_j} = 0$$

et  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$  est non singulière, ce qui prouve l'indépendance linéaire des différentielles. □

Par application du lemme 5.1, il vient donc

$$\dim H(W) \leq (\deg \frac{\partial f}{\partial x_1}) \dots (\deg \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}}) (\deg f) \leq k(k-1)^{m-1}, \text{ ce qui prouve le théorème. } \quad \square$$



## 6 Vers les sphères exotiques...

Dans cette section, nous construisons un exemple de sphère exotique. Ces variétés possèdent la propriété d'être homéomorphes mais non difféomorphes à une sphère. Nous ne démontrerons pas que ces espaces ne sont pas difféomorphes à une sphère, la preuve nécessitant des outils avancés de topologie algébrique (on renvoie à [Mi2] pour la démonstration). Nous nous contenterons ici de montrer l'homéomorphie comme une application de la théorie de Morse.

On définit  $\Sigma_7$  comme suit. Identifions  $\mathbb{R}^4$  et le corps des quaternions, via

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (a, b, c, d) &\longmapsto a + b_i + c_j + dk \end{aligned}$$

Fixons  $m \in \mathbb{Z}$ , et considérons le difféomorphisme suivant:

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^4 - \{0\} \times \mathbb{S}_3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\} \times \mathbb{S}_3 \\ (u, v) &\longrightarrow \left( \frac{u}{\|u\|^2}, \frac{u^m v u^{1-m}}{\|u\|} \right) \end{cases}$$

On pose alors

$$\Sigma_7 = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_1 \cup_{\varphi} (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_2$$

(les indices ne servant qu'à distinguer les deux espaces de base)

Munissons  $\Sigma_7$  d'une structure de variété compacte.

Remarquons que les projections canoniques  $\pi_i$  sont des homéomorphismes sur leurs images. Par suite,  $\Sigma_7$  est à base dénombrable de voisinages.

Le caractère séparé est une vérification au cas par cas sans difficulté.

Soit  $(U, \psi)$  une carte locale de  $(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_i$ . On la descend en une carte locale  $(\pi_i(U), \psi \circ \pi_i^{-1})$  de  $\Sigma_7$  (les cartes étant bien compatibles puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme). Cela permet de munir  $\Sigma_7$  d'une structure de variété. Enfin, on remarque que  $\Sigma_7 = \pi_1(\mathbb{D}_4 \times \mathbb{S}_3) \cup \pi_2(\mathbb{D}_4 \times \mathbb{S}_3)$ , ce qui conclut.

Montrons à présent que  $\Sigma_7$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}_7$ . Pour cela, nous allons construire sur  $\Sigma_7$  une fonction de Morse particulière.

Remplaçons les coordonnées  $(u', v')$  sur  $(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_2$  par  $(u'', v'') = (u'(v')^{-1}, v')$  et considérons la fonction  $f$  obtenue par passage au quotient de la fonction

$$g : \begin{cases} (u, v) \longmapsto \frac{\operatorname{Re}(v)}{(1 + \|u\|^2)^{1/2}} & \text{si } (u, v) \in (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_1 \\ (u'', v') \longmapsto \frac{\operatorname{Re}(u'')}{(1 + \|u''\|^2)^{1/2}} & \text{si } (u'', v') \in (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_2 \end{cases}$$

Montrons que  $f$  est de Morse. Le fait que  $g$  passe au quotient est un calcul sans difficulté. Par suite  $g$  étant  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $f$  l'est aussi.

$f$  ne possède aucun point critique sur  $\pi_2(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)$  puisque

$$g((a, b, c, d), v) = \frac{a}{(1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}} \text{ donc } \frac{\partial g}{\partial a} \neq 0$$

Il est alors immédiat que les seuls points critiques de  $f$  sont  $(0, \pm 1) \in (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3)_1$ .

On vérifie alors que, lue dans la carte

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \times \text{Int}(\mathbb{D}_3) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}_3 \\ (a, b, c, d, e, f, g) & \longmapsto & (a, b, c, d, e, f, g, \pm\sqrt{1 - e^2 - f^2 - g^2}) \end{cases}$$

$$g \circ \psi^{-1}(a, b, c, d, e, f, g) = \pm\sqrt{\frac{1 - e^2 - f^2 - g^2}{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

et lue dans cette carte, la matrice hessienne devient

$$d^2 f_{(\pm 1, 0)} = \mp \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui conclut. L'homéomorphisme recherché résulte alors de la proposition suivante:

**Lemme de Reeb** *Soit  $M$  une variété compacte, et  $f$  une fonction de Morse sur  $M$  possédant exactement deux points critiques. Alors  $M$  est homéomorphe à une sphère.*

**Démonstration** D'après le théorème de décomposition des variétés, on sait que

$$M = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

les deux termes étant homéomorphes à  $\mathbb{D}_n$  et recollés suivant leur bord, ce qui induit un homéomorphisme de  $\mathbb{S}_{n-1}$  sur lui-même. En prolongeant radialement cet homéomorphisme en un homéomorphisme de  $\mathbb{D}_n$ , on en déduit un homéomorphisme de  $M$  sur  $\mathbb{S}_n$ .  $\square$

## Conclusion

Nous avons donc vu que l'étude des 0-formes différentielles et de leur points critiques permet d'obtenir une décomposition cellulaire de la variété sous-jacente.

L'utilité d'une telle décomposition est double. D'une part, sur les CW-complexes, on dispose d'une théorie de l'homologie qui coïncide avec l'homologie singulière et qui est plus aisée à calculer. Cela permet entre autre d'obtenir des résultats de finitude non triviaux. D'autre part, la catégorie des CW-complexes est une bonne catégorie pour construire une théorie de l'homotopie assez générale. Elle est fermée pour l'action de certains foncteurs, et les invariants algébriques classiques sont effectifs pour distinguer les différents espaces de cette catégorie (voir par exemple [McC]).

De plus, l'article fondateur de Milnor a permis une meilleure compréhension des structures différentielles sur les variétés, qui a pu être largement généralisée aux autres dimensions, grâce à la théorie du cobordisme de Thom, dont le point culminant est le théorème du  $h$ -cobordisme de Smale (voir [Mi4]).

Enfin, la démonstration analytique des inégalités de Morse par Witten a fait l'objet de nombreuses généralisations concernant entre autre l'homologie de Floer et les inégalités de Morse holomorphes (voir par exemple [F] et [MW]).

## Bibliographie:

- [F] A. Floer, *An instanton-invariant for three-manifolds*, Comm. Math. Phys. 118(1988)
- [G] C. Godbillon, *Elements de topologie algébrique*, Hermann, 1998
- [H] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1994
- [K] A.A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Academic Press, 1992
- [Ma] Y. Matsumoto, *An introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society, 2002
- [McC] J. Mc Cleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2000
- [Mi1] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963
- [Mi2] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics, 1956
- [Mi3] J. Milnor, *On the Betti Numbers of Real varieties*, Proceedings of the AMS, 1964
- [Mi4] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, 1965
- [Mu] J. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton University Press, 1966
- [MW] V. Mathai, S. Wu, *Equivariant holomorphic Morse inequalities I: a heat kernel proof*, J. diff. Geom. 46(1997)
- [VdW] B. Van der Waerden, *Einführung die Algebraische Geometrie*, Springer, 1939