

PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÈBRIQUES

Mémoire de L3

Raphaël ALEXANDRE, Zhouhang MAO, Thomas MORDANT

25 juin 2016
École Normale Supérieure

Encadré par :
Ilya ITENBERG

Sommaire

Introduction du problème	ii
1 Géométrie des courbes algébriques	1
1 Lemme de MORSE	1
2 Théorème des petites perturbations	2
3 Théorème de HARNACK	3
4 Bref historique des travaux généraux après HARNACK	6
5 L'espace des courbes algébriques réelles	6
2 Point de vue complexe sur les courbes algébriques réelles	9
1 Caractéristiques topologiques complexes d'une courbe algébrique réelle . . .	9
2 Théorème complexe des petites perturbations	9
3 Description du schéma complexe d'une courbe algébrique	11
4 Premières restrictions sur les schémas complexes	12
5 Formule de l'orientation complexe de ROKHLINE	14
6 Schémas complexes du degré 3 au degré 5	16
3 Conditions topologiques sur les courbes	18
1 Courbes flexibles	18
2 Premières contraintes sur la topologie réelle d'une courbe flexible	19
3 Musée des contraintes topologiques sur les schémas réels	20
4 Musée des contraintes topologiques sur les schémas complexes	22
5 Courbes flexibles de degrés au plus 5	24
4 Déquantification et patchwork	25
1 Introduction	25
2 La déquantification d'un polynôme : polynômes tropicaux	25
3 La déquantification d'une courbe algébrique	27
4 La dualité	27
5 Le patchwork comme un exemple	28
6 Triangulations convexes	29
7 Exemple : une construction des M-courbes	31
1 Appendice	32

Introduction du problème

LE SEIZIÈME PROBLÈME DE HILBERT

Le seizième problème de HILBERT peut s'énoncer de la manière suivante. Étant donné un polynôme homogène $F(x_0, x_1, x_2)$ à coefficients réels et de degré m , quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel, \mathbf{RP}^2 ?

Par la suite, nous supposons toujours que les zéros de F sont non-singuliers.

Nous désignerons par $\mathbf{R}F$ l'ensemble des zéros de F , qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles, ainsi, $\mathbf{R}F$ sera une collection de cercles.

POUR $m = 1$. Nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$, et il s'en suit que $\mathbf{R}F$ est une droite de \mathbf{R}^2 . Son plongement dans \mathbf{RP}^2 est un grand cercle.

Plongements dans \mathbf{RP}^2

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans \mathbf{RP}^2 donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de \mathbf{R}^2 (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point), on parlera aussi de *pseudo-droite* ;
- le plongement d'une ellipse de \mathbf{R}^2 (que nous appellerons *ovale*).

Le plongement d'un ovale divise \mathbf{RP}^2 en deux régions non connectées : une boule et un ruban de MÖBIUS. Au contraire, le complémentaire du plongement d'un grand cercle est une région connexe homéomorphe à une boule.

Classification en petits degrés

POUR $m = 2$. Si nous revenons au problème initial, pour $m = 2$ nous avons F qui décrit une conique de \mathbf{RP}^2 , c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque F est définie).

Afin d'étudier les degrés supérieurs, on se sert du fait suivant (que l'on peut montrer avec le théorème de BÉZOUT^{§1})

- lorsque m est pair, $\mathbf{R}F$ est une réunion d'ovales ;
- lorsque m est impair, $\mathbf{R}F$ est la réunion d'une pseudo-droite et d'ovales.

§1. Il s'agit en fait de compter les points d'intersection entre une pseudo-droite et une courbe de degré m . D'une part le nombre de points d'intersections (comptés avec multiplicités) est de même parité que m , et d'autre part l'intersection d'une pseudo-droite avec un ovale donne toujours deux points d'intersection (comptés avec multiplicités).

POUR $m = 4$. La classification pour $m = 4$ nous donne la distinction de cas suivante sur la composition de $\mathbf{R}F$:

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovales avec chacun des ovales à l'extérieur des autres ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

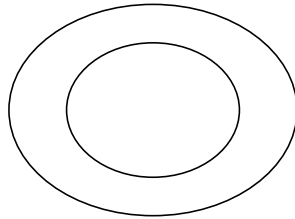


FIGURE 1 – Lorsque $m = 4$, un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

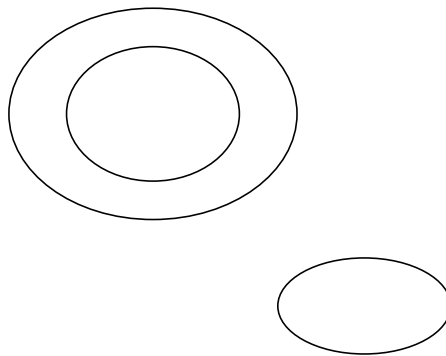


FIGURE 2 – Ceci est impossible

En effet, si nous traçons une droite qui coupe chacun des ovales en deux points, nous obtenons 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4 et ceci est absurde par le théorème de BÉZOUT (démontré en appendice).

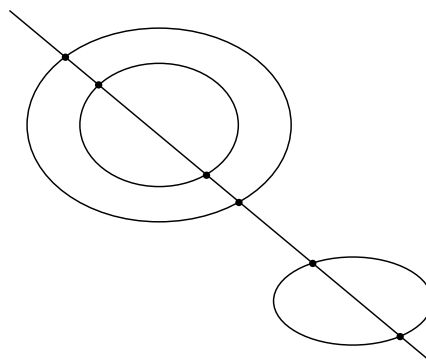


FIGURE 3 – Les six points d'intersections contredisent $m = 4$

Nous procédons de même avec le cas où nous aurions 5 ovals. Par 5 de leurs points intérieurs passe une conique et l'intersection de cette conique avec la courbe algébrique est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus $4 \times 2 = 8$.

Il est utile de mentionner le résultat suivant qui donne la classification topologique (mais ne donne pas de classification sur le plongement).

LEMME 0.1 (HARNACK - 1876)

Soit l le nombre de composantes connexes, alors

$$\frac{1 - (-1)^m}{2} \leq l \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1 \text{ §2}$$

et les deux bornes sont atteintes pour tout degré m .

POUR $m = 6$. C'est ici qu'apparaissent les premières difficultés. Le lemme précédent nous donne $l \leq 11$, lorsque cette borne est atteinte nous dirons que la courbe est *maximale*. Supposons $l = 11$, on a les trois possibilités suivantes, regroupées dans la figure suivante §3.

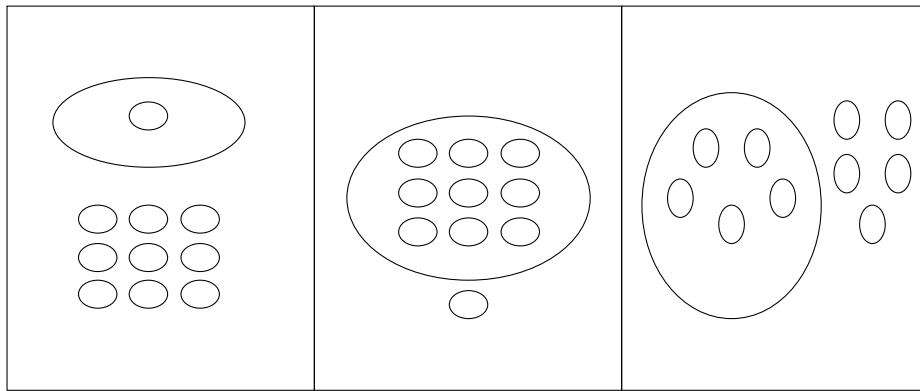


FIGURE 4 – Classification lorsque $m = 6$ avec 11 composantes connexes

EN PLUS HAUT DEGRÉ. Lorsque $m = 7$ la classification est connue. Lorsque $m = 8$ le problème reste très ouvert, le patchwork de courbes algébriques permet notamment de générer de très nombreux cas de la classification recherchée.

Patchwork

La technique du patchwork combinatoire permet d'établir des configurations par un procédé combinatoire et ne dépendant pas trop du degré. On s'intéresse à la construction d'une courbe non-singulière de degré m dans \mathbf{RP}^2 .

On procède par étapes :

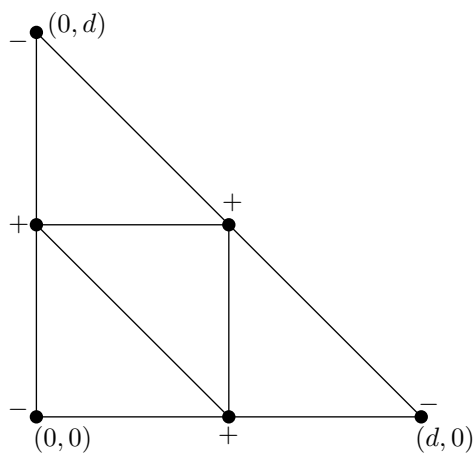
1. On considère T le triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(0, m)$ et $(m, 0)$.
2. On choisit une triangulation de T à sommets entiers.
3. On distribue des signes aux sommets de la triangulation.
4. On fait trois copies de ce même triangle afin d'obtenir un carré.
5. Étant donné le signe en (i, j) , le signe en $(-i, j)$ (respectivement en $(i, -j)$) est le même qu'en (i, j) si i (respectivement j) est pair et est l'opposé sinon.

§2. Le quotient est le genre (en tant que surface) des zéros de F dans \mathbf{C} .

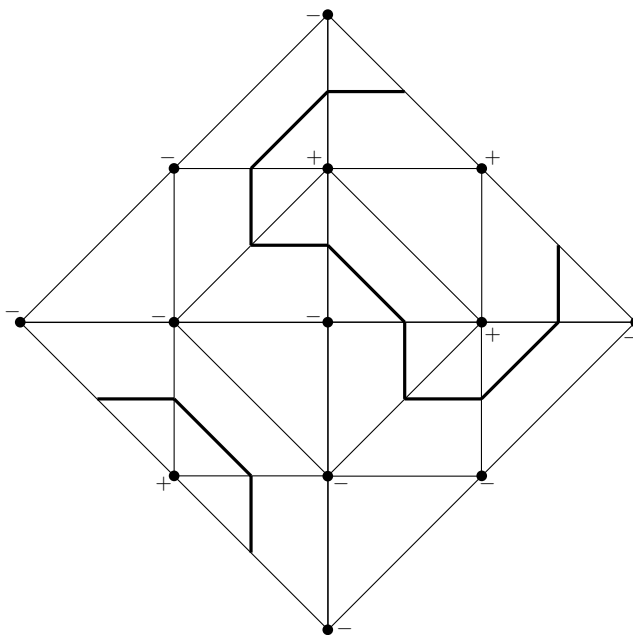
§3. La première configuration est la courbe de HARNACK.

6. Au sein de chaque triangle (de la triangulation) on relie les deux côtés dont les extrémités sont de signes opposés. On obtient la courbe L .

Par exemple, avec $m = 2$ on a le triangle suivant.



Que l'on prolonge en le carré suivant.



Le théorème de VIRO s'énonce dans deux contextes. Le premier est affine et le second projectif.

THÉORÈME 0.2 (VIRO)

VERSION AFFINE. Si la triangulation de T est convexe, §4 alors il existe une courbe A non singulière de degré m dans \mathbf{R}^2 telle que

$$(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}A) \simeq (T_0^* \text{ §5}, L \cap T_0^*).$$

VERSION PROJECTIVE. Si la triangulation de T est convexe, alors il existe une courbe A non singulière de degré m dans \mathbf{RP}^2 telle que

$$(\mathbf{RP}^2, \mathbf{R}A) \simeq (\overline{T}^* \text{ §6}, \overline{L}).$$

POLYNÔME DE VIRO. Si f désigne une fonction caractérisant la convexité et si V désigne l'ensemble des sommets de la triangulation,

$$P_t(x, y) := \sum_{(i,j) \in V} \text{signe}(i, j) x^i y^j t^{f(i,j)},$$

pour $t > 0$ assez petit, réalise la courbe.

§4. C'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : T \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et affine par morceaux telle que les domaines de linéarité coïncident strictement avec les triangles de la triangulation.

§5. C'est l'intérieur du grand carré.

§6. Homéomorphe à \mathbf{RP}^2 , il est obtenu en identifiant les côtés opposés du grand carré et en renversant l'orientation.

Chapitre 1

Géométrie des courbes algébriques

1 LEMME DE MORSE

D'après MILNOR, *Morse Theory*.

Par la suite, on considère f à valeurs dans \mathbf{R} définie dans un voisinage de $p \in \mathbf{R}^n$ telle que f est lisse et admet un point critique en p . Un point critique de f est non dégénéré si la forme quadratique définie par $\Delta f(p)$ est non dégénérée. L'index de p pour f est le nombre de $-$ qui apparaissent dans la réduction de GAUSS de la forme quadratique précédemment évoquée.

LEMME 1.1 (MORSE)

Soit p un point critique non dégénéré de f . Alors il existe un système de coordonnées locales (y^1, \dots, y^n) dans un voisinage U de p tel que $y^i(p) = 0$ pour tout i et aussi :

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

avec λ l'index de f en p .

Nous commençons par nous donner un lemme préliminaire :

LEMME 1.2

Si f est lisse dans un voisinage V de $0 \in \mathbf{R}^n$ avec $f(0) = 0$ alors

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \dots, x^n)$$

avec des fonctions g_i lisses sur V et telles que

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

PREUVE

Nous avons l'égalité

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt$$

et nous définissons alors

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt.$$

PREUVE (Lemme de MORSE)

Nous commençons par montrer que si f a une telle expression alors λ est l'index de f en

p . Supposons ainsi pour un système de coordonnées (z^1, \dots, z^n) que

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2.$$

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que la matrice de Δf selon la base $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$ est diagonale avec λ fois -2 , $(n - \lambda)$ fois 2 sur la diagonale et dans cet ordre.

Ainsi, il existe un sous-espace de TM_p de dimension λ où Δf est définie négative et un sous-espace de dimension $n - \lambda$ où Δf est définie positive. Cela montre que λ est l'index de f en p .

Il nous reste à montrer qu'un tel système de coordonnées existe. Pour cela, nous commençons par supposer que $p = 0$ et $f(0) = 0$, par le lemme précédent nous obtenons des g_i telles que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x).$$

Comme 0 est un point critique, $g_i(0) = 0$ pour tout i et donc il existe des $h_{i,j}$ telles que

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x^i x^j h_{i,j}(x).$$

Nous pouvons supposer (quitte à moyenner) que $h_{i,j} = h_{j,i}$.

Pour obtenir le système de coordonnées, nous allons imiter la preuve de diagonalisation des formes quadratiques. Procédons par récurrence, supposons qu'il existe u^1, \dots, u^n définies dans un voisinage U_1 de 0 telles que

$$f = \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u^i u^j H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$$

sur U_1 et où la matrice décrite par $H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$ (de taille $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$) est symétrique. Après un changement linéaire sur la dernière coordonnée, on peut faire en sorte que $H_{r,r}(0) \neq 0$. Désignons par $g(u^1, \dots, u^n)$ la racine carrée de $|H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)|$. Comme g est non nulle en 0 et est lisse, il existe un voisinage $U_2 \subset U_1$ de 0 où g est non nulle. On pose $v^i = u^i$ pour $i \neq r$ et

$$v^r(u^1, \dots, u^n) = g(u^1, \dots, u^n) \left(u^r + \sum_{i > r} u^i \frac{H_{i,r}(u^1, \dots, u^n)}{H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)} \right).$$

Par le théorème d'inversion locale, (v^1, \dots, v^n) sera un système de coordonnées dans un voisinage $U_3 \subset U_2$ de 0 . Cela complète la récurrence puisque sur U_3 :

$$f = \pm(v^1)^2 \pm \dots \pm (v^r)^2 + \sum_{i,j > r} v^i v^j H_{i,j}(v^1, \dots, v^n).$$

2 THÉORÈME DES PETITES PERTURBATIONS

DÉFINITION 2.1

Nous dirons que $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est un *croisement* du polynôme P si $\Delta P(\xi)$ a une valeur propre strictement positive et une strictement négative.

De manière équivalente, ξ est un croisement si ξ est un point critique non dégénéré et

d'index 1 pour les applications :

$$\varphi_i : \left\{ \begin{array}{l} \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{RP}^2 \mid x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{P(x)}{x_i^{\deg P}} \end{array} \right.$$

$$\tilde{P}(x_1, x_2) = P(1, x_1, x_2)$$

pour i tel que $\xi_i \neq 0$.

Le lemme de MORSE implique qu'au voisinage de ξ , $\mathbf{R}P$ est la réunion de deux droites réelles.

Réciproquement, si $\mathbf{R}A_1, \dots, \mathbf{R}A_k$ sont non singulières, mutuellement transverses et si 3 d'entre-elles ne se croisent jamais, alors les points critiques de $\mathbf{R}A_1 \cup \dots \cup \mathbf{R}A_k$ sont des croisements.

Le théorème des petites perturbations s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 2.2 (Petites perturbations)

Soit P un polynôme de degré m dont les points critiques sont des croisements. Soit Q un polynôme de degré m dont la courbe algébrique ne passe pas par les points critiques de P . Soit U un voisinage régulier de $\mathbf{R}P$ dans \mathbf{RP}^2 tel que U se décompose selon :

$$U = U_0 \cup U_1$$

où U_0 est voisinage des points critiques et U_1 est un voisinage tubulaire de la sous-variété $\mathbf{R}P - U_0$ dans $\mathbf{RP}^2 - U_0$.

Alors il existe X polynôme non-singulier de degré m tel que :

1. la courbe $\mathbf{R}X$ est partie de U ;
2. pour chaque composante V de U_0 , il existe un homéomorphisme $h : V \rightarrow D^1 \times D^1$ (avec D^1 le disque unité de dimension 1) tel que :

$$h(\mathbf{R}P \cap V) = D^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times D^1,$$

$$h(\mathbf{R}X \cap V) = \{(x, y) \in D^1 \times D^1 \mid xy = 1/2\} ;$$

3. $\mathbf{R}X - U_0$ est une section du fibré tubulaire $U_1 \rightarrow \mathbf{R}P - U_0$;
4. $\mathbf{R}X \subset \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{RP}^2 \mid P(x_0, x_1, x_2)Q(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$;
5. $\mathbf{R}X \cap \mathbf{R}P = \mathbf{R}X \cap \mathbf{R}Q = \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$;
6. si $p \in \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$ est non singulier de Q et si $\mathbf{R}Q$ est transverse à $\mathbf{R}P$ en p alors $\mathbf{R}X$ est aussi transverse à $\mathbf{R}P$ en p .

Il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, $X = P + tQ$ convienne.

3 THÉORÈME DE HARNACK

THÉORÈME 3.1 (HARNACK 1876)

Pour tout entier naturel m et pour tout entier c vérifiant

$$\frac{1 - (-1)^m}{2} \leq c \leq \frac{m^2 - 3m + 4}{2} \quad (1.1)$$

il existe une courbe plane non-singulière de degré m dans le plan projectif réel et constituée de c composantes.

L'inégalité à droite de (1.1) est un résultat appelé l'inégalité de HARNACK, celle de gauche découle de considérations élémentaires : une courbe de degré impair a forcément une droite projective comme composante. L'encadrement (1.1) est donc une condition

nécessaire de l'existence d'une courbe avec c composantes, et le théorème affirme que cette condition est suffisante, et résout ainsi le problème de classification des courbes de degré m à homéomorphisme près.

Commençons par démontrer que l'inégalité de droite de (1.1) est optimale.

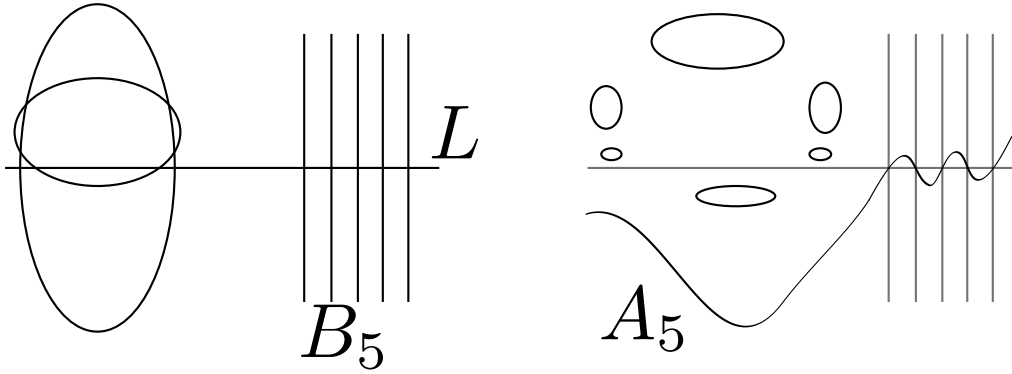
LEMME 3.2

Pour tout entier naturel m , il existe une courbe de degré m contenant $\frac{m^2-3m+4}{2}$ composantes. Une telle courbe est appelée une M-courbe de degré m .

PREUVE

Nous allons construire une suite de telles courbes. Le cas $m \leq 5$ peut facilement être traité, on peut donc partir d'une M-courbe de degré 5, A_5 , construite à partir de l'union de deux coniques et d'une droite L , perturbée en direction de l'union B_5 de cinq droites.

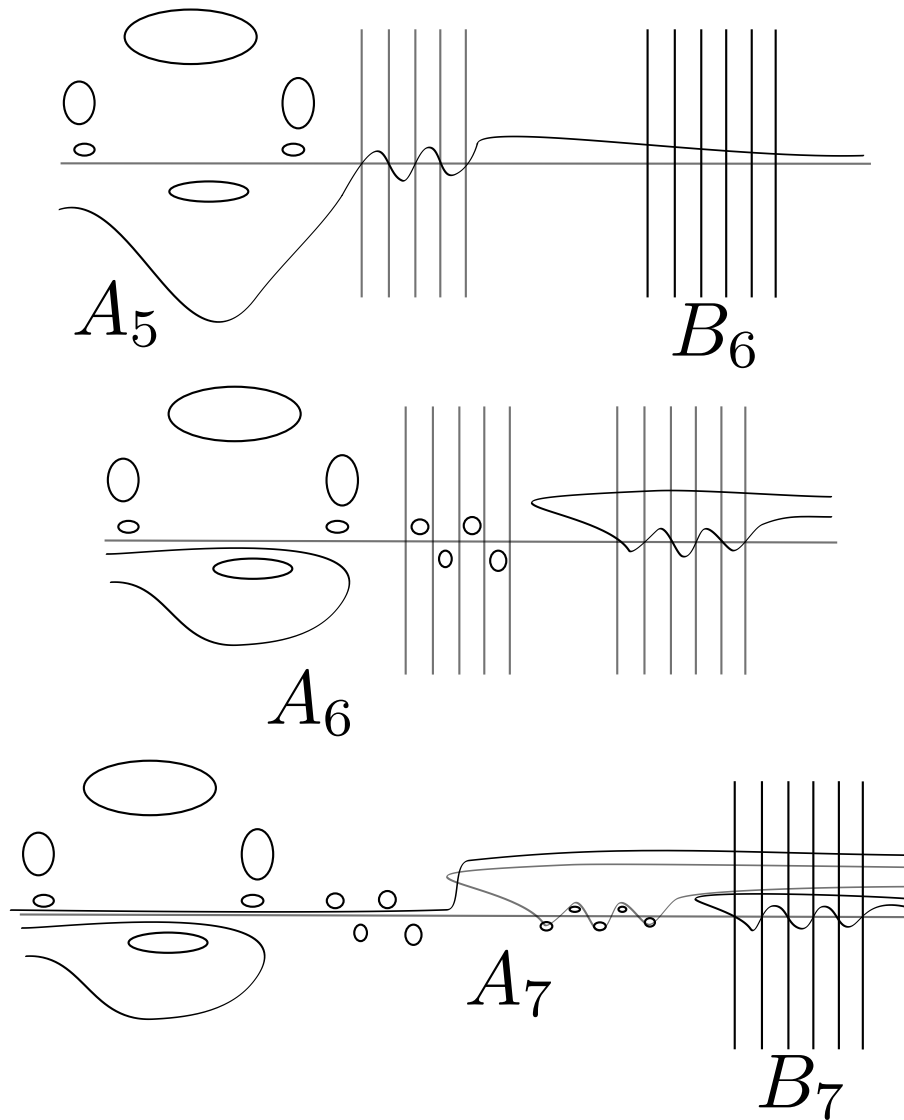
On définit par récurrence B_m pour $m > 5$ comme l'union de m droites qui intersectent \mathbf{RL} en m points distincts tels que, si m est pair, les points sont dans une composante arbitraire de $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$, et si m est impair, les points sont dans la composante de $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$ qui contient $\mathbf{RL} \cap \mathbf{RB}_{m-2}$ (nous nous plaçons dans un espace projectif, il ne faut donc pas perdre de vue que le complémentaire d'un point dans une droite ne contient qu'une composante). On construit aussi A_m comme une petite perturbation de $A_{m-1} \cup L$ dirigée vers B_m .



Pour $m > 5$, supposons que A_{m-1} est une M-courbe de degré $m - 1$, telle que \mathbf{RA}_{m-1} intersecte \mathbf{RL} transversalement en $m - 1$ points, placés sur une seule composante de \mathbf{RA}_{m-1} , dans le même ordre que sur \mathbf{RL} . Alors pour une certaine direction de la perturbation de A_{m-1} , cette composante donne $m - 1$ composantes, et les $\frac{(m-1)^2-3(m-1)+4}{2} - 1 = \frac{m^2-5m+6}{2}$ autres composantes ne sont que légèrement modifiées. Le nombre de composantes de \mathbf{RA}_m est donc :

$$\frac{m^2 - 5m + 6}{2} + m - 1 = \frac{m^2 - 3m + 4}{2}.$$

A_m est donc bien une M-courbe de degré m .



Par le théorème des petites perturbations, $\mathbf{R}A_m$ est transversal à $\mathbf{R}L$ et leur intersection est $\mathbf{R}L \cap \mathbf{R}B_m$. Comme $\mathbf{R}L \cap \mathbf{R}B_m$ est contenu dans une composante de $\mathbf{R}L \setminus \mathbf{R}B_{m-1}$, il est aussi contenu dans une seule composante de $\mathbf{R}A_m$, et ses points apparaissent dans le même ordre sur $\mathbf{R}L$ que sur cette composante, ce qui termine la récurrence.

On voit aussi que l'inégalité de gauche de (1.1) est optimale : il suffit de considérer la courbe $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^m + x_2^m + x_3^m$, dont l'ensemble des zéros projectifs est vide si m est pair, et est une droite projective sinon.

Le reste de la démonstration peut se faire en construisant des courbes avec un nombre quelconque de composantes de la même manière que dans la démonstration du lemme avec des B_m construits différemment. Cette démonstration est fastidieuse et n'inclut pas de nouvelles idées, nous ne la présenterons donc pas. Il existe aussi une preuve plus conceptuelle utilisant $\mathbf{R}C_m$, l'espace projectif des polynômes homogènes de degré m .

On appelle M-courbes de HARNACK les M-courbes pouvant être obtenues par cette méthode (le seul degré de liberté laissé par la démonstration est, pour m pair, la composante de $\mathbf{R}L \setminus \mathbf{R}B_{m-1}$ dans laquelle se trouve $\mathbf{R}B_m$).

4 BREF HISTORIQUE DES TRAVAUX GÉNÉRAUX APRÈS HARNACK

En 1891, HILBERT s'intéressa au problème de la classification des classes d'isotopie des courbes réelles projectives, et en particulier des M-courbes. Il remarqua que la construction de HARNACK ne permettait pas d'obtenir tous les types d'isotopie des M-courbes, et proposa une autre construction, similaire à celle de HARNACK, mais où les droites sont remplacées par des coniques. Pour $m = 6$, la construction de HARNACK ne donnait qu'un type d'isotopie, et celle de HILBERT en donnait un nouveau. HILBERT conjectura que ces deux types étaient les seuls possibles, mais cette conjecture fut invalidée par GUDKOV en 1969, qui en trouva un troisième, et montra qu'il n'y avait pas plus de trois types possibles.

En 1900, HILBERT présenta sa célèbre liste de problèmes devant guider les mathématiciens du XXème siècle, et en seizième position y figurait, notamment, la classification des types d'isotopie des courbes réelles projectives de degré 6.

Au cours du XXème siècle, les mathématiciens cherchèrent des conditions nécessaires plus fortes que celles entraînées par le théorème de BÉZOUT et l'inégalité de HARNACK. RAGSDALE ouvrit la voie en s'intéressant aux M-courbes de degré pair et en séparant les ovales d'une courbe en deux groupes : les ovales pairs, qui sont contenus dans un nombre pair d'autres ovales (on note p leur nombre) et les ovales impairs (on note n leur nombre). En étudiant les résultats des constructions de HARNACK et de HILBERT pour de petits degrés, elle conjectura en 1906 des encadrements sur p et n pour les courbes de HARNACK et de HILBERT, sur lesquels travaillèrent notamment PETROVSKY, VIRO, et ITENBERG. La première nouvelle condition nécessaire portant sur toutes les courbes non singulières de degré pair fut le théorème de PETROVSKY :

THÉORÈME 4.1 (PETROVSKY 1933-1938)

Pour toute courbe plane projective réelle algébrique non-singulière de degré $m = 2k$:

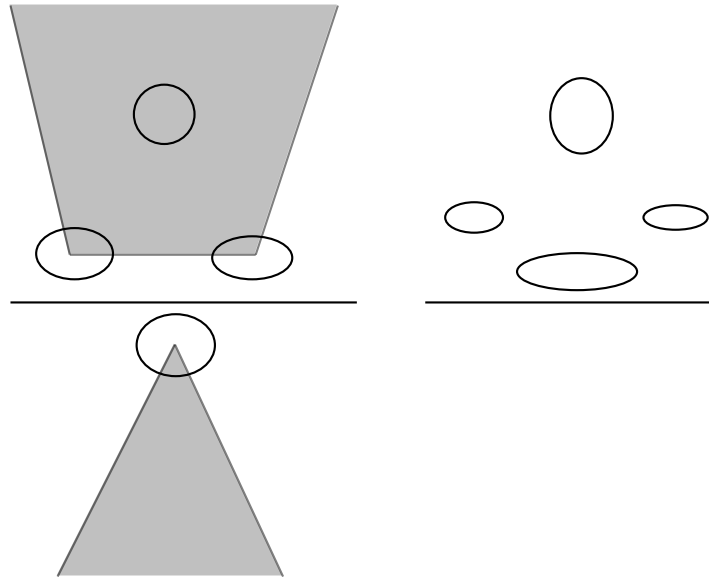
$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq p - n \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

5 L'ESPACE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES

L'ensemble des courbes algébriques de degré m , i.e. des polynômes homogènes de degré m considérés à multiplication par un scalaire près, est un espace projectif de dimension $\frac{m(m+3)}{2}$. Notons cet espace $\mathbf{R}C_m$. Il se distingue de $\mathbf{R}\mathbf{P}^{\frac{m(m+3)}{2}}$ par la double indexation de ses coordonnées homogènes, qui se fait naturellement par la formule :

$$a(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\substack{i,j \geq 0, \\ i+j \leq m}} (a_{ij} x_0^{m-i-j} x_1^i x_2^j)$$

Soit $\mathbf{R}NC_m$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}C_m$ constitué des courbes non singulières. Il est ouvert d'après le théorème des fonctions implicites : des petites modifications apportées à une courbe non singulière donnent des sections d'une fibration tubulaire de la courbe de départ. En fait, des courbes non singulières proches de la courbe de départ lui sont isotopes, et donc deux courbes appartenant à une même composante de $\mathbf{R}NC_m$ ont entre elles une isotopie constituée uniquement de courbes algébriques de degré m non singulières. Une telle isotopie est appelée *isotopie rigide*, c'est une notion strictement plus forte que l'isotopie classique (pour laquelle on ne demande aux fonctions reliant continûment les deux fonctions comparées que d'être continues) comme en témoigne l'exemple suivant.

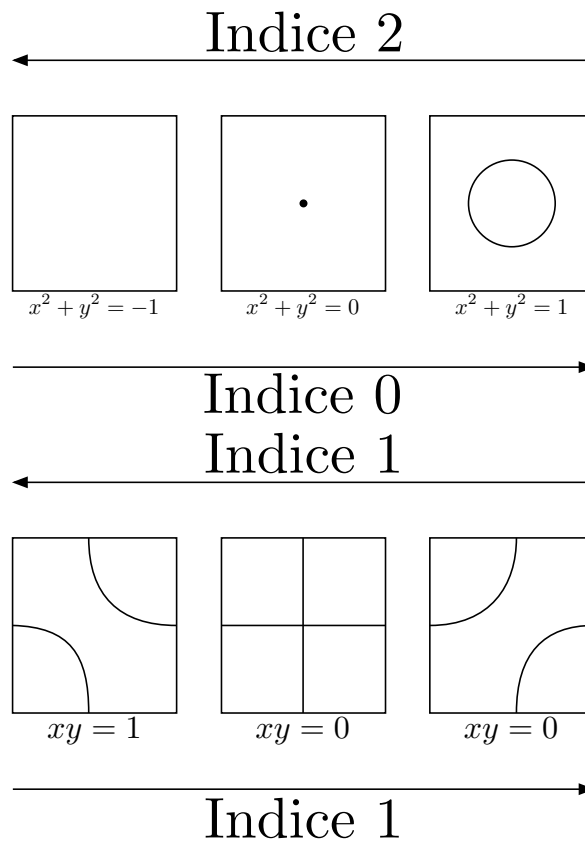


Sur la figure ci-contre, les deux courbes sont des courbes algébriques de degré 5. Elles sont isotopes, mais il existe un triangle n'intersectant pas la pseudo-droite de la première courbe, dont les sommets sont dans trois de ses ovales, et contenant le quatrième. Cela n'est pas possible pour la deuxième courbe. Pour passer de l'une à l'autre continûment, il faut que le quatrième ovale de la première courbe sorte du triangle, et donc intersecte l'un de ses côtés. La courbe géométrique obtenue à cet instant n'est pas une courbe algébrique de degré 5 d'après le théorème de BÉZOUT. Les deux courbes ne sont donc pas rigidement isotopes. On pourra donc considérer le problème de classification des courbes algébriques à isotopie rigide près, qui est distinct des deux problèmes de classification déjà étudiés.

Intéressons-nous à $\mathbf{R}SC_m$, l'ensemble des courbes de degré m ayant des points singuliers.

Soit $S = \{(p, C) \in \mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RC}_m \mid p \text{ est un point singulier de } C\}$. Pour $p \in \mathbf{RP}^2$ fixé, l'ensemble des courbes singulières en p est une sous-variété de \mathbf{RC}_m de dimension $\frac{m(m+3)}{2} - 3$ (en prenant une base de \mathbf{R}^3 (e_1, e_2, e_3) avec e_1 représentant non nul de p , la sous-variété est définie par les équations $a(e_1) = 0, da_{e_1}(e_2) = 0, da_{e_1}(e_3) = 0$). L'ensemble S est donc une sous-variété de $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RC}_m$ de dimension $\frac{m(m+3)}{2} - 1$. En considérant la projection sur la deuxième variable $S \rightarrow \mathbf{RC}_m$ dont l'image est $\mathbf{R}SC_m$, on a que ce dernier est une sous-variété de \mathbf{RC}_m de dimension au plus $\frac{m(m+3)}{2} - 1$. Sa dimension doit, en fait, être exactement $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ car sinon $\mathbf{R}NC_m$ serait connexe et toutes les courbes non singulières de degré m seraient rigidement isotopes, ce qui est faux comme nous l'avons vu.

Avec un raisonnement similaire on montre que l'ensemble des courbes ayant au moins deux points singuliers, ainsi que celui des courbes ayant exactement un point singulier, où la hessienne du polynôme est non inversible, sont des sous-variétés de $\mathbf{R}SC_m$ de codimension 1. Le complémentaire de leur union, l'ensemble des courbes ayant un point singulier, où la hessienne est inversible (on parle de point double non dégénéré), est d'intérieur dense dans $\mathbf{R}SC_m$. On appelle cet intérieur la *partie principale* de $\mathbf{R}SC_m$. Il y a deux types de points doubles non dégénérés : les *points doubles solitaires*, où la hessienne du polynôme est définie positive ou définie négative, et les croisements, que nous avons déjà rencontrés.



Si une courbe de degré m se déplace dans $\mathbf{R}C_m$ en coupant la partie principale de $\mathbf{R}SC_m$ transversalement en des courbes du premier type, elle subit des modifications de MORSE d'indice 0 ou 2 (ou bien un point double solitaire apparaît puis s'agrandit en un ovale, ou bien la transformation inverse se produit). Si les intersections de la trajectoire de la courbe avec la partie principale de $\mathbf{R}SC_m$ sont du deuxième type, la courbe subit des modifications de MORSE d'indice 1 (il s'agit du phénomène qui se produit pour la courbe plane définie par $xy = t$ lorsque t varie : deux branches d'hyperbole se rapprochent jusqu'à s'intersecter et former un croisement, puis deux nouvelles branches se créent et s'éloignent dans une direction différente). Dans tous les cas, le nombre de composantes de la courbe ne change que d'au plus 1 à chaque intersection.

On appelle *pinceau de courbes de degré m* une droite de $\mathbf{R}C_m$. D'après le théorème de transversalité, l'ensemble des pincesaux qui n'intersectent $\mathbf{R}SC_m$ qu'à sa partie principale et toujours transversalement forme un ouvert dense de l'ensemble de tous les pincesaux de courbes de degré m .

Nous avons vu que pour m quelconque, il existe des courbes non singulières avec $\frac{1-(-1)^m}{2}$ (resp. avec $\frac{m^2-3m+4}{2}$) composantes. Les classes d'isotopie rigide dans $\mathbf{R}NC_m$ sont des ouverts, on peut donc trouver des ouverts de $\mathbf{R}C_m$ de courbes non singulières avec un nombre minimal (resp. maximal) de composantes. D'après la remarque précédente, on peut trouver un pinceau de courbes de degré m , contenant des courbes non singulières avec un nombre minimal (resp. maximal) de composantes, et n'intersectant $\mathbf{R}SC_m$ qu'à sa partie principale et toujours transversalement. Nous avons encore vu qu'une courbe se déplaçant sur un tel pinceau ne verrait son nombre de composantes se modifier que de 1 à chaque intersection avec $\mathbf{R}SC_m$. On peut donc trouver sur ce pinceau des courbes non singulières avec n'importe quel nombre intermédiaire de composantes, ce qui termine la preuve du théorème de HARNACK.

Chapitre 2

Point de vue complexe sur les courbes algébriques réelles

1 CARACTÉRISTIQUES TOPOLOGIQUES COMPLEXES D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE RÉELLE

En 1876 F. KLEIN a posé la question de type isotopique de manière plus générale. Il s'est intéressé au lien entre les points de $\mathbf{R}P$ et ceux de $\mathbf{C}P$, son analogue complexe, où P est un polynôme réel.

Pour définir une relation de positionnement entre ces deux objets, considérons le plan projectif complexe $\mathbf{C}P^2$, alors les zéros complexes de P forment une sous-variété de dimension 2 dans $\mathbf{C}P^2$ que l'on appelle $\mathbf{C}P$.

Il s'avère que le cas complexe trivialisent deux questions. La première est celle de la topologie de $\mathbf{C}P$, si P est de degré m alors $\mathbf{C}P$ est homéomorphe à la sphère à $(m - 1)(m - 2)/2$ anses. La seconde est celle du type d'isotopie du couple $(\mathbf{C}P^2, \mathbf{C}P)$, elle ne dépend que du degré de P .

Les points de $\mathbf{R}P$ se définissent comme étant les invariants par conjugaison des points de $\mathbf{C}P$, la conjugaison dans $\mathbf{C}P^2$ étant définie par :

$$\text{conj} : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}].$$

La courbe $\mathbf{R}P$ peut, ou non, diviser en deux composantes connexes $\mathbf{C}P$. Dans le premier cas on dira que $\mathbf{R}P$ est de type I et dans le second, de type II. Si P est une courbe de type I, les deux moitiés de $\mathbf{C}P \setminus \mathbf{R}P$, avec l'orientation naturelle, induisent chacune une orientation de $\mathbf{R}P$. Ces orientations opposées sont appelées les *orientations complexes* de $\mathbf{R}P$.

L'ensemble des points complexes d'une conique est homéomorphe à \mathbf{S}^2 . En effet, la projection stéréographique depuis un point de la conique sur une droite projective est un homéomorphisme.

La conique vide, ainsi que n'importe quelle courbe algébrique avec un ensemble vide de points réels, est de type II. Une courbe réelle non-singulière de degré 2 dont l'ensemble des points réels est non vide est de type I. Ainsi, les courbes de degré 2 constituées d'un ovale sont de type I.

2 THÉORÈME COMPLEXE DES PETITES PERTURBATIONS

Considérons un premier cas élémentaire : la perturbation de droites réelles : L_1 et L_2 ces droites et C le résultat. On a vu que $\mathbf{C}L_i$ et $\mathbf{C}C$ sont homéomorphes à \mathbf{S}^2 . Les sphères $\mathbf{C}L_1$ et $\mathbf{C}L_2$ s'intersectent à un unique point.

La version complexe du théorème des fonctions implicites montre que \mathbf{CC} est une approximation de $\mathbf{CL}_1 \cup \mathbf{CL}_2$ en dehors d'un voisinage U_0 de ce point d'intersection dans le sens où $\mathbf{CC} - U_0$ est une section du voisinage tubulaire U_1 de $(\mathbf{CL}_1 \cup \mathbf{CL}_2) - U_0$.

Ainsi, \mathbf{CC} est la réunion de deux disques et d'une partie contenant un petit voisinage de $\mathbf{CL}_1 \cap \mathbf{CL}_2$.

Comme \mathbf{CC} est homéomorphe à \mathbf{S}^2 et que le complémentaire de deux disques disjoints plongés dans \mathbf{S}^2 est homéomorphe à un anneau, la troisième partie de \mathbf{CC} en est un. Les disques sont les complémentaires d'un voisinage de $\mathbf{CL}_1 \cap \mathbf{CL}_2$ respectivement dans \mathbf{CL}_1 et \mathbf{CL}_2 , légèrement perturbés dans \mathbf{CP}^2 et l'anneau connecte ces deux disques à travers le voisinage U_0 de $\mathbf{CL}_1 \cap \mathbf{CL}_2$.

Jusqu'ici, il n'y a pas d'importance quant à la nature réelle des courbes en jeu. Pour se ramener au cas réel, il faut décrire la position des parties réelles des courbes dans leurs complexifiées et l'action de conjugaison.

Le montage complexe précédent est invariant par conjugaison, donc l'intersection de \mathbf{CL}_1 et \mathbf{CL}_2 est réelle et son voisinage U_0 peut être choisi comme invariant par l'action de conjugaison. Donc \mathbf{CC} se représente comme la réunion de deux demi-disques et d'un demi-anneau : les demi-disques approchent les moitiés de \mathbf{CL}_1 et \mathbf{CL}_2 et une moitié de l'anneau est contenue dans U_0 .

Il reste à spécifier quels sont les demi-disques connectés par un demi-anneau.

Dans le cas général, commençons par considérer l'objet complexe tel quel. Considérons une surface algébrique qui n'a que des points doubles non dégénérés. Près d'un tel point, on reconnaît la réunion de deux droites s'intersectant en ce point. Cela signifie qu'il existe un voisinage U de ce point dans \mathbf{CP}^2 et un difféomorphisme qui envoie U dans \mathbf{C}^2 en associant l'intersection de U et la courbe à l'union de deux droites complexes qui s'intersectent en 0. Cela vient de la version complexe du lemme de MORSE. Encore par ce lemme, près d'un point double, le théorème des petites perturbations classique applique une petite perturbation à la réunion des deux droites : la réunion de deux disques transverses est remplacée par un anneau.

Par exemple, prenons la réunion de m droites projectives dont 3 n'ont pas de point en commun. Ses points complexes sont la réunion de m copies de \mathbf{S}^2 telles que deux ont exactement un point en commun. Une perturbation peut être pensée comme le découpage dans chacune des sphères de $m - 1$ disques et au recollage de $m(m - 1)/2$ tubes connectant les frontières des disques découpés. Le résultat est orientable (en tant que variété complexe). On obtient alors une sphère avec $(m - 2)(m - 1)/2$ anses.

Plaçons-nous maintenant dans un cadre un peu plus général.

THÉORÈME 2.1 (Complexe des petites perturbations, FIEDLER et MARIN)

Soit A_1, \dots, A_s des courbes algébriques de degrés respectifs m_1, \dots, m_s , telles que trois d'entre elles ne soient jamais concourantes, et pour tous i et j , \mathbf{CA}_i intersecte \mathbf{CA}_j en $m_i m_j$ points réels (et donc, d'après le théorème de BÉZOUT, toutes les intersections sont réelles). Soit A une petite perturbation de $\cup_i A_i$. Alors A est de type I si, et seulement si, tous les A_i sont de type I et il existe un choix d'orientations complexes des A_i dont l'union est amenée par la perturbation sur une orientation de \mathbf{RA} . Dans ce cas, cette dernière orientation est une orientation complexe de A .

PREUVE

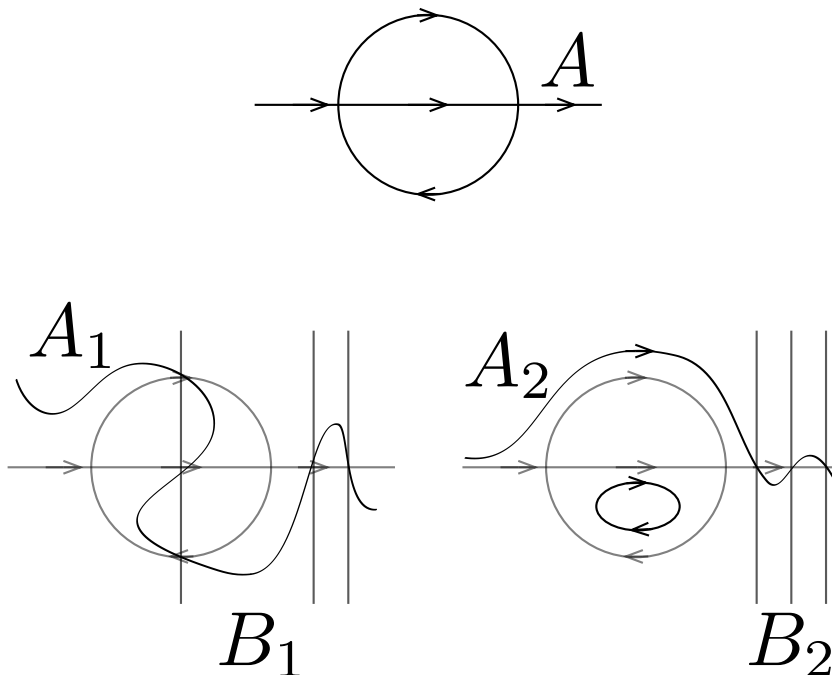
S'il existe i tel que A_i soit de type II, alors il existe des points conjugués de $\mathbf{CA}_i \setminus \mathbf{RA}_i$ reliés par un chemin. Nous avons vu qu'une petite perturbation de $\cup_i A_i$ n'amène des changements que dans un voisinage de la courbe réelle, elle ne déforme donc que légèrement un voisinage de ce chemin. Le polynôme définissant A est réel, on peut donc choisir deux points conjugués connectés par un chemin dans le nouveau voisinage. A est donc de type II.

Si A et tous les A_i sont de type I, alors la perturbation amène les deux moitiés de $\mathbf{C}(\cup_i A_i)$ sur celles de \mathbf{CA} . Elle transforme donc un choix d'orientations complexes des différents A_i sur une orientation complexe de A .

Si tous les A_i sont de type I et s'il existe une orientation complexe des A_i perturbée en une orientation de $\mathbf{R}A$, alors d'après le lemme de MORSE, la déformation se comporte au voisinage de chaque point d'intersection entre deux $\mathbf{R}A_i$ comme dans le cas particulier considéré ci-dessus. Les moitiés des $\mathbf{C}A_i$ correspondant aux orientations complexes choisies sont donc connectées entre elles dans la nouvelle courbe. Une moitié d'un $\mathbf{C}A_i$ ne peut pas être reliée à sa moitié conjuguée par une suite de moitiés adjacentes dans la nouvelle courbe, car il faudrait, à une certaine étape, relier une moitié d'un $\mathbf{C}A_j$ à sa moitié conjuguée en restant dans $\mathbf{C}A_j$, ce qui est interdit par l'hypothèse. A est donc nécessairement de type I.

On appelle *schéma complexe* d'une courbe algébrique la donnée de sa classe d'isotopie, de son type, et de ses orientations dans le cas où elle est de type I.

Ce théorème, bien qu'il ne s'applique pas à autant de cas que son homologue réel (il nécessite que toutes les intersections des $\mathbf{C}A_i$ soit réelles), est utile en pratique pour déterminer des schémas complexes de petites perturbations. La figure ci-contre offre un exemple de son utilisation.

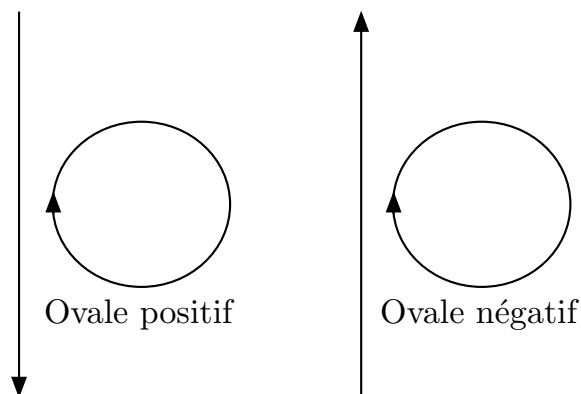


La courbe A est une union d'une droite projective de degré 1 et de type I, et d'un ovale de degré 2 et de type I. Elle vérifie les hypothèses du théorème. La courbe A_1 , obtenue par une petite perturbation de A dirigée selon B_1 , n'admet pas d'orientation compatible avec une orientation de A , elle est donc de type II. En revanche, la courbe A_2 , perturbation de A selon B_2 , admet une orientation compatible avec l'orientation de A présentée sur la figure, elle est donc de type I et son orientation compatible est une de ses orientations complexes.

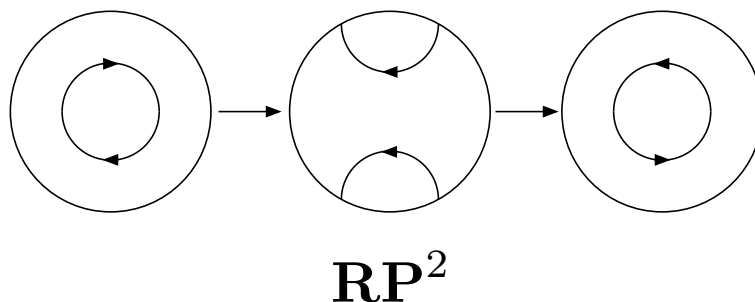
3 DESCRIPTION DU SCHÉMA COMPLEXE D'UNE COURBE ALGÈBRE

Considérons une courbe topologique projective (une sous-variété topologique de dimension 1 de \mathbf{RP}^2) munie d'une orientation. On dit qu'une paire d'ovales est *injective* lorsque l'un d'entre eux est situé à l'intérieur de l'autre. Dans ce cas, on dit qu'elle est *positive* lorsque son orientation correspond à une orientation de l'anneau entre les deux ovales (intuitivement, si les orientations des ovales sont opposées) et *négative* sinon. Cette

définition est invariante par inversion de l'orientation de la courbe, on peut donc l'étendre aux courbes munies de deux orientations opposées, dont les courbes algébriques de type I. On dit qu'un ovale contenu dans un autre est *positif* (respectivement *négatif*) s'il forme une paire injective positive (resp. négative) avec le plus petit ovale le contenant. Dans le cas d'un ovale n'étant pas contenu dans un autre, et d'une courbe contenant une droite projective, il faut comparer l'orientation de l'ovale et celle de la droite. On dit alors que l'ovale est positif (resp. négatif) si, à isotopie près, les orientations de l'ovale et de la droite sont celles de la partie gauche (resp. de droite) de la figure ci-contre. On peut formaliser cette définition en utilisant des notions d'homologie.



Ces notions permettent de décrire le schéma complexe d'une courbe algébrique fixée : il suffit de donner le schéma réel de la courbe (la présence ou non d'une droite projective, le nombre d'ovales et leur position réciproque), son type, et dans le cas où elle est de type I, la positivité de tous les ovales pour lesquels cette notion est définie. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'un ovale sortant d'une carte affine et y rentrant dans la direction opposée, le long d'une droite projective, voit changer son orientation dans la carte. L'orientation d'un ovale d'une courbe algébrique pouvant accomplir cette transformation (c'est-à-dire n'étant pas à l'intérieur d'un autre ovale, en l'absence d'une droite projective dans la courbe) n'est donc pas un invariant isotopique et ne rentre pas en compte dans le schéma complexe de la courbe.



Maintenant que nous disposons d'une description des schémas complexes, nous allons nous intéresser, comme dans la première partie, aux restrictions sur la possibilité de ces schémas.

4 PREMIÈRES RESTRICTIONS SUR LES SCHÉMAS COMPLEXES

Nous avons déjà observé qu'une courbe vide dans \mathbf{RP}^2 est nécessairement de type II. On a aussi le fait que :

PROPOSITION 4.1

Une M-courbe est nécessairement de type I

PREUVE

Si A est une M-courbe de degré m , $\mathbf{R}A$ est constitué de $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ cercles, et $\mathbf{C}A$ est une sphère avec $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ anses. La caractéristique d'Euler de $\mathbf{C}A$ est donc $2 - 2\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right) = 2 - (m-1)(m-2)$. Supposons que A soit de type II. $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$ est donc une sous-variété connexe de dimension 2 de $\mathbf{C}P^2$ dont la caractéristique d'Euler est la même que celle de $\mathbf{C}A$. Soit un cercle C de $\mathbf{R}A$. Il existe un voisinage ouvert U de C tel que $U \cap (\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A)$ ait deux composantes connexes. On peut déformer $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$, sans modifier cette variété hors de U , de façon à ce que ces deux composantes connexes soient à une distance strictement positive l'une de l'autre. On peut donc déformer $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$, sans modifier sa caractéristique d'Euler, en une variété à trous, avec deux trous pour chaque composante de $\mathbf{R}A$ (on a « découpé » $\mathbf{C}A$ selon $\mathbf{R}A$). La caractéristique d'Euler de cette nouvelle variété est toujours $2 - (m-1)(m-2)$. On peut recoller un disque sur chacun des $2\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1\right) = (m-1)(m-2) + 2$ trous ; on obtient une sous-variété fermée connexe orientable de dimension 2 de $\mathbf{C}P^2$, de caractéristique d'Euler $2 - (m-1)(m-2) + (m-1)(m-2) + 2 = 4$, ce qui est absurde. A est donc de type I.

La caractéristique d'Euler peut aussi servir à montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2 (Congruence de Klein)

Si A est une courbe de type I de degré m avec l ovals, alors :

$$l \equiv \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \pmod{2}$$

PREUVE

Nous avons vu dans la preuve précédente que la caractéristique d'Euler de $\mathbf{C}A$ est $2 - (m-1)(m-2)$. Celle d'une composante connexe de $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$ en est donc la moitié, c'est-à-dire $1 - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Cette composante est une variété à l trous, en recollant un disque sur chacun de ces trous, on obtient donc une variété fermée connexe orientable de dimension 2 et de caractéristique d'Euler $1 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} + l$. On obtient donc $l \equiv 1 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \pmod{2}$. Il ne reste plus qu'à vérifier $1 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \equiv \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \pmod{2}$, ce qui se fait en séparant les cas selon la parité de m .

Le résultat suivant est plus délicat à montrer.

DÉFINITION 4.3

On appelle *nid* une suite d'ovales, chacun contenu dans le précédent. La *profondeur* du nid est le nombre d'ovales qu'il contient.

PROPOSITION 4.4

Une courbe contenant un nid de profondeur $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ est de type I.

Avant de démontrer cette proposition, remarquons une construction utile. On sait que l'ensemble des points complexes d'une droite projective réelle est divisé en deux moitiés par l'ensemble des points réels. De plus, l'ensemble des droites projectives de $\mathbf{C}P^2$ forme un espace projectif appelé *espace projectif dual* de $\mathbf{C}P^2$.

L'ensemble des droites réelles de $\mathbf{C}P^2$ est alors l'ensemble des points réels de l'espace dual. Cet ensemble est homéomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 où les points opposés sont identifiés. On peut donc identifier les moitiés de droites projectives réelles avec les points de \mathbf{S}^2 .

Cette identification peut être visualisée en imaginant les droites projectives réelles comme des plans vectoriels dans \mathbf{R}^3 . Une moitié de droite correspond alors à un plan orienté. L'identification peut se penser comme l'application qui à un plan orienté associe

son vecteur normal unitaire. L'involution conj envoie une moitié de droite sur l'autre moitié de la même droite, elle correspond à

$$\text{conj} : \begin{cases} \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \\ x \mapsto -x. \end{cases}$$

Il existe une et une seule droite projective réelle passant par un point fixé dans $\mathbf{CP}^2 \setminus \mathbf{RP}^2$: celle qui passe par ce point et son conjugué (les droites projectives réelles sont exactement les droites projectives complexes invariantes par conjugaison). Il existe donc une et une seule moitié de droite projective réelle passant par ce point. On peut donc définir une fibration $p : \mathbf{CP}^2 \setminus \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ dont les fibres sont exactement les moitiés de droites projectives réelles.

PREUVE

Soit A une courbe de degré m comprenant un nid de profondeur $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Montrons que A est de type I.

Prenons un point $P \in \mathbf{RP}^2$ dans l'intérieur de l'ovale le plus intérieur du nid. Considérons $C \subset \mathbf{S}^2$, l'ensemble des moitiés de droites projectives réelles passant par P .

Rappelons cette propriété de la dualité projective : en passant d'un espace projectif à son dual, les points sont envoyés sur des droites et les droites sur des points. Des propositions de la forme « Le point A appartient à la droite b » ont comme forme duale « La droite a passe par le point B ». L'ensemble des droites projectives réelles passant par P , n'est donc autre que la droite projective duale à P , dans le dual de \mathbf{RP}^2 . C , l'image réciproque de cet ensemble par la projection canonique, est donc un grand cercle de \mathbf{S}^2 .

Par hypothèse, une droite de C intersecte \mathbf{RA} en m points distincts. D'après le théorème de BÉZOUT, elle n'intersecte donc pas $\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA}$. L'image de $\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA}$ par la fibration p n'intersecte donc pas C . Or, $\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA}$ est stable par conjugaison, donc $p(\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA})$ est stable par passage à l'opposé. Donc $p(\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA})$ n'est pas connexe, et, comme p est continue, $\mathbf{CA} \setminus \mathbf{RA}$ ne l'est pas non plus.

5 FORMULE DE L'ORIENTATION COMPLEXE DE ROKHLINE

Par la suite, on note A une courbe algébrique, m son degré, l le nombre de composantes de \mathbf{RA} , Π^+ (respectivement Π^-) le nombre de paires injectives positives (resp. négatives) de la courbe, et Λ^+ (resp. Λ^-) le nombre d'ovales positifs (resp. négatifs) de la courbe.

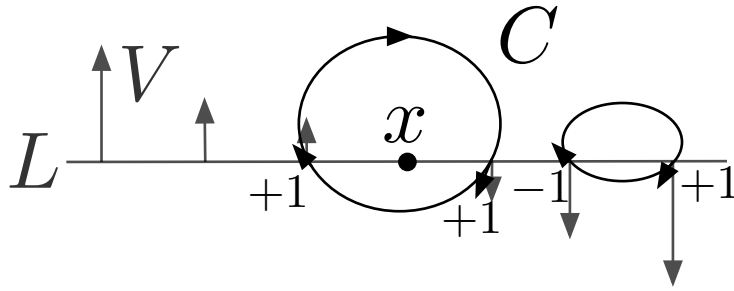
La formule de ROKHLINE affirme que :

PROPOSITION 5.1 (Formule de ROKHLINE)

Si A est de type I, alors

- si m est pair, alors $2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - \frac{m^2}{4}$
- si m est impair, alors $\Lambda^+ - \Lambda^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - \frac{m^2-1}{4}$

Nous allons voir comment ces deux formules peuvent être rassemblées en une seule. Pour cela, il faut poser quelques définitions. D'abord, on cherche une notion d'*indice* d'une courbe par rapport à un point, proche de celle de géométrie affine (utilisée notamment en analyse complexe), avec la différence que, puisque le plan projectif n'est pas orientable, l'indice projectif ne peut pas être signé. On peut définir cette notion de la manière suivante.

FIGURE 2.1 – Avec $i_C(x) = |1 + 1 + 1 - 1|/2 = 1$

Soit C une courbe topologique orientée et x un point hors de C . Soit L une droite projective transversale à C passant par x , et V un champ de vecteurs sur L qui s'annule en x et nulle part ailleurs. Les points d'intersections de L avec C sont de deux types : ceux où V et un vecteur correspondant à l'orientation de C sont dirigés du même côté de L , et ceux où ils sont dirigés dans des côtés différents. Soit i^+ (resp. i^-) le nombre de points du premier type (resp. du deuxième type). On définit alors l'indice de C par rapport à x comme $i_C(x) = \frac{|i^+ - i^-|}{2}$. On vérifie que l'indice est indépendant de L et de V . L'indice est invariant par inversion de l'orientation de la courbe, il peut donc être défini pour des courbes algébriques de type I. La figure ci-contre illustre cette définition.

Il faut aussi définir une intégration assez spéciale dans laquelle la caractéristique d'EULER joue le rôle d'une mesure. Le problème est que, si cette caractéristique est bien additive (si A et B sont des ensembles tels que $\chi(A)$, $\chi(B)$ et $\chi(A \cup B)$ sont bien définis et $A \cap B = \emptyset$ alors $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$), elle n'est pas du tout σ -additive, ni positive. Il faut donc se limiter à une classe très restreinte de fonctions : les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'éléments d'une algèbre d'ensembles sur lesquels la caractéristique d'EULER est bien définie.

On peut maintenant donner une reformulation de la formule de ROKHLINE :

PROPOSITION 5.2 (Formule de ROKHLINE : version définitive)

Si A est une courbe algébrique de degré m , alors :

$$\int_{\mathbf{RP}^2} (i_{\mathbf{R}A}(x))^2 d\chi(x) = \frac{m^2}{4}$$

PREUVE

Cette proposition est admise : elle utilise des notions avancées d'homologie.

On rappelle (voir le chapitre 1, section *Bref historique des travaux généraux après HARNACK*) qu'on peut diviser une courbe algébrique de degré pair en ovals *pairs*, contenus dans un nombre pair d'autres ovals, et en ovals *impairs*. Plus précisément, une telle courbe divise \mathbf{RP}^2 en deux ouverts qui ont la courbe comme frontière commune. On appelle \mathbf{RP}^2_- celui de ces ouverts qui contient une composante non orientable (« l'extérieur » des ovals, intuitivement) et \mathbf{RP}^2_+ l'autre ouvert. Les ovals pairs (resp. impairs) sont alors ceux qui bornent \mathbf{RP}^2_+ par l'extérieur (resp. l'intérieur). Notons p le nombre d'ovals pairs, et n celui d'ovals impairs.

COROLLAIRE 5.3 (Congruence d'ARNOLD)

Soit A une courbe algébrique de degré pair $m = 2k$ et de type I. On a :

$$p - n \equiv k^2 [4]$$

PREUVE

On remarque que, pour $x \in \mathbf{RP}^2 \setminus \mathbf{RA}$, $i_{\mathbf{RA}}(x)$ est pair si et seulement si $x \in \mathbf{RP}_-^2$. Donc, si $x \in \mathbf{RP}_-^2$, $(i_{\mathbf{RA}}(x))^2 \equiv 0[4]$; et sinon, $(i_{\mathbf{RA}}(x))^2 \equiv 1[4]$. Par conséquent, $\int_{\mathbf{RP}^2} (i_{\mathbf{RA}}(x))^2 d\chi(x) \equiv \chi(\mathbf{RP}_+^2)$. Le premier membre de cette congruence est k^2 , d'après la formule de ROKHLINE, et on peut calculer que le deuxième est $p - n$.

Notons Π le nombre de paires injectives de la courbe : $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$.

COROLLAIRE 5.4

Soit une courbe de degré pair $m = 2k$, de type I et comprenant l ovals. On a :

$$\Pi \geq \frac{|l - k^2|}{2}$$

PREUVE

On a, d'après la première forme de la formule de ROKHLINE : $\Pi^+ - \Pi^- = \frac{l - k^2}{2}$. Le corollaire en découle facilement.

COROLLAIRE 5.5

Soit une courbe de degré impair $m = 2k + 1$, de type I et comprenant l ovals. On a :

$$\Pi + l \geq \frac{k(k + 1)}{2}$$

PREUVE

Ce corollaire se montre de manière très semblable au précédent, en utilisant cette fois l'autre partie de la première forme de la formule de ROKHLINE.

6 SCHÉMAS COMPLEXES DU DEGRÉ 3 AU DEGRÉ 5

Pour noter simplement les schémas réels et complexes, nous adopterons la convention suivante.

$\langle 0 \rangle$ désigne la courbe vide, $\langle 1 \rangle$ désigne une courbe constituée d'un ovale, et $\langle J \rangle$ désigne une courbe constituée d'une pseudo-droite projective.

Si $\langle X \rangle$ est la notation d'une courbe A sans droite projective, $\langle 1 \langle X \rangle \rangle$ désigne la courbe constituée d'un ovale contenant A dans son intérieur.

Si $\langle X \rangle$ et $\langle Y \rangle$ sont les notations de deux courbes A et B dont une seule au plus contient une droite projective, $\langle X \sqcup Y \rangle$ désigne l'union de A et de B , vérifiant la condition qu'aucun ovale d'une courbe n'en contient un de l'autre.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et A la notation d'une courbe, on simplifie $A \sqcup A \sqcup \dots \sqcup A$, avec n occurrences de A , en nA . On simplifie aussi $n1$ en n .

Enfin, pour décrire un schéma complexe, on rajoute un exposant I ou II indiquant le type du schéma, et, si ce schéma est de type I, on rajoute des exposants $+$ à chaque ovale positif, et des exposants $-$ à chaque ovale négatif.

Maintenant, nous pouvons nous intéresser aux schémas réalisables.

- **Degré 3** : L'inégalité de HARNACK assure qu'une courbe de degré 3 a une ou deux composantes, dont une exactement est une droite projective. Les seuls schémas réels possibles sont donc $\langle J \rangle$ et $\langle J \sqcup 1 \rangle$, et ils sont réalisables d'après le théorème de HARNACK.

Les courbes du premier schéma sont de type II, d'après la congruence de KLEIN. Les courbes du deuxième schéma sont des M-courbes, donc elles sont de type I. Elles se répartissent donc a priori en deux schémas complexes : $\langle J \sqcup 1^+ \rangle^I$ et $\langle J \sqcup 1^- \rangle^I$. Le calcul de l'intégrale de la formule de ROKHLINE donne 1/4 pour ce premier schéma

complexe et $9/4$ pour le deuxième. Donc, seul le deuxième schéma complexe est réalisable.

Finalement, les schémas complexes de degré 3 sont exactement $\langle J \rangle^{II}$ et $\langle J \sqcup 1^- \rangle^I$.

- **Degré 4 :** Les seuls schémas réels compatibles avec l'inégalité de HARNACK et le théorème de BÉZOUT sont : $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 3 \rangle$ et $\langle 4 \rangle$. $\langle 2 \rangle$ et $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ peuvent être construits « à la main » comme produit de deux polynômes correspondant à des ovales ; la réalisabilité des autres est assurée par le théorème de HARNACK.

D'après la congruence de KLEIN, les schémas $\langle 1 \rangle$ et $\langle 3 \rangle$ sont de type II. Le schéma $\langle 0 \rangle$ l'est évidemment aussi. Le schéma $\langle 4 \rangle$ est maximal, donc de type I. Le schéma $\langle 2 \rangle$ ne peut pas être orienté de manière à vérifier la formule de ROKHLINE (en fait, il suffit de le voir pour une seule orientation, puisqu'elles sont toutes isotopes), il est donc de type II. Le schéma $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ contient un nid de profondeur maximale, il est donc de type I. La formule de ROKHLINE impose que, pour ce schéma réel, seul le schéma complexe $\langle 1 \langle 1^- \rangle \rangle^I$ est réalisable.

Finalement, les schémas complexes de degré 4 sont exactement : $\langle 0 \rangle^{II}$, $\langle 1 \rangle^{II}$, $\langle 2 \rangle^{II}$, $\langle 1 \langle 1^- \rangle \rangle^I$, $\langle 3 \rangle^{II}$ et $\langle 4 \rangle^I$.

- **Degré 5 :** Les seuls schémas réels compatibles avec l'inégalité de HARNACK et le théorème de BÉZOUT sont : $\langle J \rangle$, $\langle J \sqcup 1 \rangle$, $\langle J \sqcup 2 \rangle$, $\langle J \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle J \sqcup 3 \rangle$, $\langle J \sqcup 4 \rangle$, $\langle J \sqcup 5 \rangle$ et $\langle J \sqcup 6 \rangle$. Comme ci-dessus, la réalisabilité des schémas peut être prouvée soit en utilisant le théorème de HARNACK, soit en exhibant des courbes obtenues comme produit de courbes plus simples.

D'après la congruence de KLEIN, les schémas $\langle J \sqcup 1 \rangle$, $\langle J \sqcup 3 \rangle$ et $\langle J \sqcup 5 \rangle$ sont de type II. D'après le troisième corollaire à la formule de ROKHLINE, les schémas $\langle J \rangle$ et $\langle J \sqcup 2 \rangle$ sont de type II. Le schéma $\langle J \sqcup 6 \rangle$ est maximal, donc de type I. Pour ce schéma réel, d'après la formule de ROKHLINE, seul le schéma complexe $\langle J \sqcup 3^- \sqcup 3^+ \rangle^I$ est réalisable. Le schéma $\langle J \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$ contient un nid de profondeur maximale, il est donc de type I. Pour ce schéma réel, d'après la formule de ROKHLINE, seul le schéma complexe $\langle J \sqcup 1^- \langle 1^- \rangle \rangle^I$ est réalisable. Il reste le schéma $\langle J \sqcup 4 \rangle$, qui contient des courbes des deux types, qui peuvent être construites à l'aide de petites perturbations complexes : pour le type I, la formule de ROKHLINE n'autorise que le schéma complexe $\langle J \sqcup 3^- \sqcup 1^+ \rangle^I$.

Finalement, les schémas complexes de degré 5 sont exactement : $\langle J \rangle^{II}$, $\langle J \sqcup 1 \rangle^{II}$, $\langle J \sqcup 2 \rangle^{II}$, $\langle J \sqcup 1^- \langle 1^- \rangle \rangle^I$, $\langle J \sqcup 3 \rangle^{II}$, $\langle J \sqcup 4 \rangle^{II}$, $\langle J \sqcup 3^- \sqcup 1^+ \rangle^I$, $\langle J \sqcup 5 \rangle^{II}$ et $\langle J \sqcup 3^- \sqcup 3^+ \rangle^I$.

Chapitre 3

Conditions topologiques sur les courbes

1 COURBES FLEXIBLES

Si on cherchait à énumérer les propriétés des courbes algébriques non singulières que nous avons utilisées jusque là, nous arriverions à (avec A qui désigne une telle courbe) :

1. le théorème de BÉZOUT ;
2. CA réalise la classe $m[\mathbf{CP}^1] \in H_2(\mathbf{CP}^2)$;
3. CA est homéomorphe à une sphère à $(m-1)(m-2)/2$ anses ;
4. la conjugaison est une involution de CA ;
5. le plan tangent à CA en $x \in \mathbf{RA}$ est la complexification de la droite tangente à \mathbf{RA} en x .

Uniquement la première de ces conditions n'est pas de nature topologique. Le théorème de BÉZOUT est, à lui seul, responsable de nombreux résultats mais demande aussi une manipulation délicate de courbes auxiliaires.

Ainsi, on va se contenter ici d'étudier des courbes dont la topologie est similaire à celle des courbes algébriques.

DÉFINITION 1.1

Une sous-variété S de \mathbf{CP}^2 , orientée, lisse, fermée, connexe et de dimension 2 est appelée *courbe flexible de degré m* si :

- S réalise $m[\mathbf{CP}^1] \in H_2(\mathbf{CP}^2)$;
- le genre de S est égal à $(m-1)(m-2)/2$;
- S est invariante par conjugaison ;
- le champ de plans tangents à S en les points de $S \cap \mathbf{RP}^2$ peut être déformée en la classe des plans invariants par conjugaison dans le champ des droites (complexes) de \mathbf{CP}^2 tangentes à $S \cap \mathbf{RP}^2$.

Une courbe flexible S intersecte \mathbf{RP}^2 en une sous-variété lisse de dimension 1, appelée *partie réelle* de S et désignée par \mathbf{RS} . Bien sûr, une courbe algébrique de degré m est une courbe flexible de degré m .

Tout ce qui a été fait autour des courbes algébriques lors du travail sur les schémas reste valable et s'étend naturellement à ce cadre.

On dira ainsi qu'une contrainte sur les schémas de courbes de degré m provient de la *topologie* si cette contrainte peut être prouvée dans ce cadre.

Par exemple, toutes les contraintes sur les courbes de degré $m \leq 6$ proviennent de la topologie.

2 PREMIÈRES CONTRAINTES SUR LA TOPOLOGIE RÉELLE D'UNE COURBE FLEXIBLE

On se base sur la situation purement topologique suivante : on considère une surface S avec g (qui sera égal à $(m-1)(m-2)/2$) anses et une involution c (qui sera la conjugaison) de S qui renverse l'orientation et dont les points fixes sont F (qui sera $\mathbf{R}S$).

L'inégalité de HARNACK est la première contrainte importante. Elle dit que si L est le nombre de composantes connexe de la partie réelle d'une courbe de degré m alors

$$L \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1 = g + 1$$

dans les notations précédentes.

Il s'agit alors de démontrer le théorème général suivant.

THÉORÈME 2.1

Pour une involution qui renverse l'orientation $c : S \rightarrow S$ d'une sphère S à g anses, le nombre L de composantes connexes de l'ensemble des points fixes est au plus $g + 1$.

Une preuve purement topologique est la suivante. Soit S/c l'espace des orbites sous c . C'est une surface connexe à bord et le bord est l'image de l'ensemble des points fixes. La caractéristique d'EULER de l'espace des orbites est la moitié de celle de S , c'est-à-dire, $(2-2g)/2 = 1-g$. Maintenant, on recolle un disque sur chaque frontière circulaire. On obtient ainsi une surface connexe fermée de caractéristique d'EULER $1-g+L$. Mais d'un autre côté, la caractéristique d'une surface connexe fermée est au plus 2 et donc $L \leq 1+g$.

Au passage on a aussi démontré le fait suivant.

PROPOSITION 2.2

Le cas $L = g + 1$ arrive uniquement lorsque l'espace des orbites est une sphère à trous.

DÉFINITION 2.3

Si F sépare S ^{§1} alors l'involution c est dite de type I, sinon elle est de type II.

RAPPEL. Ici, F désigne l'ensemble des points fixes sous l'action de c sur S .

REMARQUE. On a toujours que F sépare S en au plus deux parties. En effet, la clôture de la réunion d'une composante connexe de $S - F$ avec son image sous c est ouverte et fermée dans S , par connexité de S on conclut.

PROPOSITION 2.4

L'espace des orbites, S/c , est orientable si, et seulement si F sépare S .

PREUVE

Supposons que F sépare S . Alors les deux hémisphères séparés sont homéomorphes par c . Ainsi, chaque hémisphère est homéomorphe à l'espace des orbites mais les hémisphères sont orientables puisque toute la surface l'est.

D'autre part, si F ne sépare pas S , alors un point et son image par c peuvent être reliés par un chemin. Un tel chemin recouvre un lacet dans l'espace des orbites. Mais c'est un lacet qui renverse l'orientation puisque l'involution renverse l'orientation.

On en déduit, comme une sphère à trous est orientable, le fait suivant.

§1. C'est-à-dire que $S - F$ n'est pas connexe.

PROPOSITION 2.5

Une M -courbe est de type I.

PROPOSITION 2.6

Si la courbe est de type I alors

$$L \equiv \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \pmod{2}.$$

PREUVE

On a $\chi(S/c) = 1 - g$, or pour toute surface connexe orientée de caractéristique d'EULER χ et dont la frontière a L composantes connexes, $\chi + L \equiv 0 \pmod{2}$.

Il s'en suit $1 - g + L \equiv 0 \pmod{2}$ et puisque $g = (m-1)(m-2)/2 \equiv \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \pmod{2}$ on conclut.

Considérons maintenant la contrainte sur le placement de la partie réelle d'une courbe flexible dans le plan projectif.

PROPOSITION 2.7

La partie réelle d'une courbe flexible contient une droite projective si, et seulement si, le degré est impair.

PREUVE

On considère une droite projective réelle transverse à la courbe flexible et on calcule l'indice d'intersection de la complexification de cette droite et de la courbe flexible. D'un côté, il est égal au degré de la courbe flexible, de l'autre les points de l'intersection dans $\mathbf{CP}^2 - \mathbf{RP}^2$ ont une contribution paire dans l'indice d'intersection.

3 MUSÉE DES CONTRAINTES TOPOLOGIQUES SUR LES SCHEMAS RÉELS

Par la suite, on va énumérer des contraintes venant de la topologie sur les schémas réels d'une courbe flexible de degré m .

PROPOSITION 3.1

Une courbe contient une droite projective si, et seulement si, m est impair.

PROPOSITION 3.2 (Inégalité d'HARNACK)

Le nombre de composantes de l'ensemble des points réels d'une courbe de degré m est au plus $(m-1)(m-2)/2 + 1$.

Par la suite de cette partie sur les schémas réels, on supposera que m est pair.

Cas limites de l'inégalité d'HARNACK

PROPOSITION 3.3 (Congruence de GUDKOV-ROKHLINE)

Dans le cas d'une M -courbe, c'est-à-dire si $p + n = 1 + (m-1)(m-2)/2$,

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

PROPOSITION 3.4 (Congruence de GUDKOV-KRAKHNOV-KHARLAMOV)

Dans le cas d'une $(M-1)$ -courbe, c'est-à-dire si $p + n = (m-1)(m-2)/2$,

$$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

On dira que la caractéristique d'EULER d'une composante du complémentaire d'une courbe dans \mathbf{RP}^2 est la *caractéristique* de l'ovale qui délimite cette composante depuis l'extérieur.

Un ovale avec une caractéristique positive est dit elliptique, nulle est dit parabolique et négative est dit hyperbolique.

PROPOSITION 3.5 (Congruence de FIELDER)

Si une M -courbe vérifie $m \equiv 4 \pmod{8}$ et si, de plus, tout ovale pair a une caractéristique paire, alors

$$p - n \equiv -4 \pmod{16}.$$

PROPOSITION 3.6 (Congruence de NIKULIN)

Si une M -courbe vérifie $m \equiv 0 \pmod{8}$ et si la caractéristique de tout ovale est divisible par 2^r , alors ou bien

$$p - n \equiv 0 \pmod{2^{r+3}}$$

ou bien

$$p - n = 4^q \chi,$$

avec $q \geq 2$ et $\chi \equiv 1 \pmod{2}$.

PROPOSITION 3.7 (Congruence de NIKULIN)

Si une M -courbe vérifie $m \equiv 2 \pmod{4}$ et si la caractéristique de tout ovale impair est divisible par 2^r alors

$$p - n \equiv 1 \pmod{2^{r+3}}.$$

Désignons par p^+ le nombre d'ovales pairs de caractéristique positive, par p^0 ceux pairs de caractéristique nulle et par p^- ceux pairs de caractéristique négative. De manière similaire on définit n^+, n^0 et n^- pour les ovales impairs. On désigne enfin par l^+, l^0, l^- les sommes des cas pairs et impairs.

PROPOSITION 3.8 (Raffinement des inégalités de PETROVSKY)

On a

$$p - n^- \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1$$

$$n - p^- \leq \frac{3k(k-1)}{2}.$$

PROPOSITION 3.9 (Raffinement des inégalités d'ARNOLD)

Aussi,

$$p^- + p^0 \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{1 + (-1)^k}{2}$$

$$n^- + n^0 \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

PROPOSITION 3.10 (Propriétés des cas limites des inégalités d'ARNOLD raffinées)

Si k est pair et si

$$p^- + p^0 = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{1 + (-1)^k}{2}$$

alors $p^- = p^+ = 0$.

Si k est impair et

$$n^- + n^0 = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

| alors $n^- = n^+ = 0$ et il n'y a qu'un seul ovale extérieur.

Inégalités de VIRO-ZVONILOV

En plus de l'inégalité de HARNACK, il y a une autre famille de contraintes venant de la topologie qui s'appliquent aux schémas réels de degrés pairs et impairs.

PROPOSITION 3.11 (Contrainte sur le nombre d'ovales hyperboliques)

Le nombre de composantes du complémentaire d'une courbe de degré impair m qui ont une caractéristique d'EULER négative n'excède pas $(m-3)^2/4$. En particulier, pour tout m impair,

$$l^- \leq \frac{(m-3)^2}{4}.$$

PROPOSITION 3.12 (Contrainte sur le nombre d'ovales non vides)

Si h est un diviseur de m et une puissance d'un premier impair, si $m \neq 4$ alors

$$l^- + l^0 \leq \frac{(m-3)^2}{4} + \frac{m^2 - h^2}{4h^2}.$$

Et même si m est pair, cette inégalité est encore vraie.

PROPOSITION 3.13 (Cas limite de l'inégalité de VIRO-ZVONILOV)

Si

$$l^- + l^0 = \frac{(m-3)^2}{4} + \frac{m^2 - h^2}{4h^2}$$

avec h un diviseur de m et puissance d'un premier p impair, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{Z}_p$ et des composantes B_1, \dots, B_r du complémentaire $\mathbf{RP}^2 - \mathbf{RA}$ dont les caractéristiques d'EULER sont nulles et telles que le bord de la chaîne

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i [B_i] \in C_2(\mathbf{RP}^2, \mathbf{Z}_p)$$

est

$$[\mathbf{RA}] \in C_1(\mathbf{RP}^2, \mathbf{Z}_p).$$

4 MUSÉE DES CONTRAINTES TOPOLOGIQUES SUR LES SCHÉMAS COMPLEXES

Pour rappel, l , désigne le nombre d'ovale de la courbe flexible considérée.

PROPOSITION 4.1

Une courbe avec un ensemble vide de points réels est de type II.

Le résultat suivant est une reformulation de la proposition 2.6.

PROPOSITION 4.2

Si une courbe est de type I alors

$$l \equiv \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \pmod{2}.$$

PROPOSITION 4.3 (Formule d'orientation complexe de ROKHLINE)

Soit A une courbe de type I et de degré m , alors

$$\int (i_{\mathbf{R}A}(x))^2 d\chi(x) = \frac{m^2}{4}.$$

Cas limites de l'inégalité de HARNACK

PROPOSITION 4.4

Une M -courbe est de type I.

PROPOSITION 4.5 (Congruence de KHARLAMOV-MARIN)

Toute $(M - 2)$ -courbe de degré pair, $m = 2k$, et vérifiant

$$p - n \equiv k^2 + 4 \pmod{8}$$

est de type I.

Cas limites des inégalités d'ARNOLD et de VIRO-ZVOLINOV

PROPOSITION 4.6

Si $m \equiv 0 \pmod{4}$ et si

$$p^- + p^0 = \frac{(m-2)(m-4)}{8} + 1$$

alors la courbe est de type I.

PROPOSITION 4.7

Si $m \equiv 0 \pmod{4}$ et si

$$n^- + n^0 = \frac{(m-2)(m-4)}{8}$$

alors la courbe est de type I.

PROPOSITION 4.8

Sous les hypothèses de la proposition 3.13, la courbe est de type I.

Congruences

PROPOSITION 4.9 (Congruence de NIKULIN-FIEDLER)

Si $m \equiv 0 \pmod{4}$, si la courbe est de type I et si tout ovale pair a une caractéristique paire alors

$$p - n \equiv 0 \pmod{8}.$$

PROPOSITION 4.10 (Congruence d'ARNOLD)

Si m est pair et si la courbe est de type I, alors

$$p - n \equiv \frac{m^2}{4} \pmod{4}.$$

PROPOSITION 4.11 (Congruence de SLEPIAN)

Si m est pair, si la courbe est de type I et si tout ovale impair a une caractéristique paire, alors

$$p - n \equiv \frac{m^2}{4} \pmod{8}.$$

Inégalités de ROKHLIN

Désignons par π (resp. ν) le nombre d'ovales non vides pairs (resp. impairs) et dont la frontière borde depuis l'extérieur les composantes du complémentaire de la courbe qui ont la propriété suivante : chaque ovale à leur bord depuis l'intérieur enveloppe un nombre impair d'autres ovales.

PROPOSITION 4.12

Si la courbe est de type I et $m \equiv 0 \pmod{4}$ alors

$$4\nu + p - n \leq \frac{(m-2)(m-4)}{2} + 4.$$

PROPOSITION 4.13

Si la courbe est de type II et $m \equiv 2 \pmod{4}$ alors

$$4\pi + p - n \leq \frac{(m-2)(m-4)}{2} + 3.$$

5 COURBES FLEXIBLES DE DEGRÉS AU PLUS 5

En suivant ce qui a été fait au chapitre dernier, on va montrer ici que toutes les contraintes topologiques définissent totalement les courbes possibles dès lors que le degré est inférieur à 5.

DEGRÉ AU PLUS 3. Les conditions topologiques 3.1 et 3.2 interdisent bien tous les schémas réels non réalisables. Pour obtenir toutes les conditions pour les schémas complexes de degré au plus 3, il faut ajouter les résultats 4.2 et 4.4 ainsi que la formule d'orientation 4.3.

DEGRÉ 4. Par l'inégalité d'ARNOLD, résultat 3.9, une courbe flexible de degré 4 ne peut pas avoir un ensemble d'ovales de profondeur 3. Par l'inégalité d'ARNOLD 3.9, il y a au plus un ovale positif non vide, et dans ce cas-ci, la propriété limite 3.10 de cette inégalité donne que le schéma réel est $\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$. Avec 3.1 et l'inégalité de HARNACK, 3.2, cela forme toutes les conditions sur les schémas réels de degré 4.

D'après la congruence de KLEIN 4.2, les schémas réels $\langle 1 \rangle$ et $\langle 3 \rangle$ sont de type II. Le schéma réel vide $\langle 0 \rangle$ est de type II par le résultat 4.1. D'après la propriété limite de 4.4, $\langle 4 \rangle$ est de type I. Le schéma réel $\langle 2 \rangle$ est de type II par la formule d'orientation complexe, 4.3. Par 4.6, le schéma $\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$ est de type I. Par cette même formule d'orientation complexe, il n'admet comme orientation complexe que $\langle 1\langle 1^- \rangle \rangle$.

DEGRÉ 5. Par l'inégalité de VIRO-ZVONILOV, 3.12, une courbe flexible de degré 5 ne peut avoir au maximum qu'un seul ovale non vide. Par la propriété limite, 3.13, de cette inégalité, si une courbe de degré 5 a un ovale non vide, alors son schéma réel est $\langle J \coprod 1\langle 1 \rangle \rangle$. Avec les résultats 3.1 et 3.2, cela complète le jeu de contraintes sur les schémas réels de degré 5.

D'après la congruence de KLEIN, 4.2, il s'en suit que les schémas réels $\langle J \coprod 1 \rangle$, $\langle J \coprod 3 \rangle$ et $\langle J \coprod 5 \rangle$ sont de type II. D'après la formule d'orientation complexe, on peut en déduire que les schémas réels $\langle J \rangle$ et $\langle J \coprod 2 \rangle$ sont de type II. Par la propriété limite 4.4 de l'inégalité de HARNACK, $\langle J \coprod 6 \rangle$ est du premier type. La formule d'orientation complexe permet une seule semi-orientation complexe pour ce schéma, $\langle J \coprod 3^- \coprod R^+ \rangle$. Par le résultat 4.8, le schéma réel $\langle J \coprod 1\langle 1 \rangle \rangle$ est de type I. La formule d'orientation complexe donne pour unique semi-orientation complexe possible $\langle J \coprod 1^- \langle 1^- \rangle \rangle$. Le schéma réel $\langle J \coprod 4 \rangle$ est de type indéfini (même pour les courbes algébriques), dans le cas du type I, une seule semi-orientation est possible et il s'agit de $\langle J \coprod 3^- \coprod 1^+ \rangle$.

Chapitre 4

Déquantification et patchwork

On a vu le théorème de VIRO dans les premiers chapitres. Dans ce chapitre, on verra une explication conceptuelle dans l'article *Dequantization of Real Algebraic Geometry on Logarithmic Paper* dû à VIRO.

1 INTRODUCTION

Introduisons tout d'abord l'idée sous-jacente à la déquantification de polynômes.

Puisque les courbes sont compliquées, on veut les déformer en des objets simples, par exemple linéaires par morceaux. Il n'est peut-être pas possible de procéder ainsi dans le cas général, mais peut-on le faire pour une bonne classe de courbes ?

Considérons une courbe C réelle définie par un polynôme $P \in \mathbf{R}[X, Y]$. On veut la déformer dans le premier quadrant du plan euclidien. Une fois cela fait, on pourra déformer la courbe entière grâce à des transformations de coordonnées comme $(x, y) \mapsto (-x, y)$. On peut écrire $P = P_+ - P_-$, où les coefficients de P_+ et de P_- sont positifs. Considérons les graphes de P_+, P_- et leur intersection. Évidemment, C est la projection de cette intersection sur le plan. L'idée est la suivante : on peut déformer P_+, P_- , et, a fortiori, C en une courbe linéaire par morceaux, qui est duale au polygone de NEWTON. Si C est assez bonne, la topologie ne change pas durant la déformation. Cela donne une nouvelle méthode de construire des courbes. On pourra construire des M-courbes en utilisant cette construction.

Dans les sections suivantes, on verra comment déformer, ou bien déquantifier des polynômes.

2 LA DÉQUANTIFICATION D'UN POLYNÔME : POLYNÔMES TROPICAUX

Supposons que

$$P_h = \sum_{(i,j) \in I} a_{ij}(h) X^i Y^j$$

est une famille de polynômes tels que

$$a_{ij}(h) \geq 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0^+} a_{ij}(h) = +\infty$$

pour tout $(i, j) \in I \subseteq \mathbf{N}^2$. On veut étudier le graphe de $x, y > 0 \mapsto P_h(x, y)$. Que se passe-t-il au voisinage de $h = 0$?

Fixons $x, y > 0$ et soit $(i_0, j_0) \in I$ qui dépend du choix de (x, y) et de h , tel que

$$a_{i_0 j_0}(h) x^{i_0} y^{j_0} \geq a_{ij}(h) x^i y^j$$

pour tout $(i, j) \in I$. Posons $M_h(x, y) = \log a_{i_0 j_0} + i_0 \log x + j_0 \log y$, on peut majorer P_h par $a_{i_0 j_0}(h)x^{i_0}y^{j_0}$:

$$M_h(x, y) \leq \log P_h(x, y) \leq M_h(x, y) + \log \#I.$$

De plus, si $a_{i_0 j_0}(h)x^{i_0}y^{j_0} \geq d + a_{ij}(h)x^i y^j$ pour $d > 0$, on a

$$\log P_h(x, y) \leq M_h(x, y) + e^{-d} \#I.$$

On peut imaginer que si les $a_{ij}(h)$ sont bien choisis, $\log P_h(x, y)$ ressemble à $M_h(x, y)$, c'est-à-dire à l'enveloppe convexe de plans $\log a_{ij}(h) + i \log x + j \log y$, pour $(i, j) \in I$, car d est grand pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ choisis génériquement.

Pour préciser l'idée précédente, on introduit les définitions suivantes.

DÉFINITION 2.1

Le semi-corps tropical \mathbf{R}_{trop} est l'ensemble \mathbf{R} muni des deux opérations \oplus et \odot définies par

$$a \oplus b = \max(a, b), \quad a \odot b = a + b.$$

Considérons une famille de semi-corps $(\mathbf{R}, \oplus_h, \odot_h)$ pour $h > 0$ définies par

$$a \oplus_h b = h \log(\exp(a/h) + \exp(b/h)) \text{ et } a \odot_h b = a + b.$$

Évidemment,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} a \oplus_h b = a \oplus b \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0^+} a \odot_h b = a \odot b$$

pour tous $a, b \in \mathbf{R}$.

On introduit également la notion de polynôme tropical.

DÉFINITION 2.2

Un polynôme tropical (de deux variables) est une fonction p définie par une famille finie de réels (a_{ij}) , pour $(i, j) \in I \subseteq \mathbf{N}^2$,

$$p(x, y) = \bigoplus_{(i,j) \in I} a_{ij} \odot x^{\odot i} y^{\odot j}.$$

DÉFINITION 2.3

Pour la même famille (a_{ij}) , on pose

$$p_h(x, y) = \left(\bigoplus_h \right)_{(i,j) \in I} a_{ij} \odot_h x^{\odot i} y^{\odot j}$$

que l'on appelle la déquantification de MASLOV.

Le lemme suivant est plus fort que la propriété précédente.

LEMME 2.4

On a $p_h \rightarrow p$ uniformément quand $h \rightarrow 0^+$.

Il semble alors raisonnable de poser $p_0 = p$. On note que $\exp(p_h(h \log x, h \log y)/h)$ sont des polynômes (ordinaires), parce que l'application $(\mathbf{R}_{>0}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbf{R}, \oplus_h, \odot_h), x \mapsto h \log x$ est un isomorphisme.

PREUVE

On peut encadrer $(a, b, h) \mapsto a \oplus_h b$ pour $a \geq b$ comme il suit

$$\begin{aligned} |a \oplus_h b - a \oplus b| &= h \log \left(1 + \exp \frac{b-a}{h} \right) \\ &\leq h \log 2. \end{aligned}$$

Cela implique que $a \oplus_h b \rightarrow a \oplus b$ uniformément quand $h \rightarrow 0+$ et $a, b \in \mathbf{R}$, ce qui entraîne le lemme.

3 LA DÉQUANTIFICATION D'UNE COURBE ALGÈBRE

Soit C une courbe algébrique définie par un polynôme $P = \sum_{(i,j) \in I} a_{ij} X^i Y^j \in \mathbf{R}[X, Y]$ où $a_{ij} \neq 0$. On veut étudier la topologie de la paire $(\mathbf{R}_{++}^2 = \{(x, y) : x, y > 0\}, \mathbf{RC} \cap \mathbf{R}_{++}^2)$. On peut définir les plans $H_{ij} \subseteq \mathbf{R}^3$ comme les graphes des $(x, y) \mapsto ix + jy + \log|a_{ij}|$. L'enveloppe convexe de (H_{ij}) est une surface U convexe et linéaire par morceaux. On suppose que chaque sommet de U rencontre exactement trois faces de U . C'est une condition générique.

On pose $I_+ = \{(i, j) \in I : a_{ij} > 0\}$, $I_- = \{(i, j) \in I : a_{ij} < 0\}$ et $b_{ij} = \log|a_{ij}|$. On peut définir deux polynômes p^+, p^- tropicaux, selon $(b_{ij})_{(i,j) \in I_+}$ et $(b_{ij})_{(i,j) \in I_-}$ respectivement, et deux déquantifications p_h^+, p_h^- de MASLOV. Posons $C_h = G(p_h^+) \cap G(p_h^-)$ pour $h > 0$, l'intersection des graphes de p_h^+ et p_h^- . On remarque que (\mathbf{R}^2, C_1) est évidemment homéomorphe à $(\mathbf{R}_{++}^2, \mathbf{RC} \cap \mathbf{R}_{++}^2)$ et que U est le graphe de $\max(p^+, p^-)$. On admettra la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1

Soit C une courbe algébrique vérifiant la condition générique précédente. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a que les paires (\mathbf{R}^2, C_h) et (\mathbf{R}^2, C_0) sont isotopes pour tout $h \in [0, \varepsilon]$.

Bien qu'on ne puisse pas en déduire la topologie de $(\mathbf{R}_{++}^2, \mathbf{RC} \cap \mathbf{R}_{++}^2)$, cela donne une méthode de construction d'une courbe dont la topologie est contrôlée par les polynômes tropicaux p^+ et p^- , ou bien la courbe linéaire par morceaux C_0 .

4 LA DUALITÉ

On commence par rappeler la transformation de LEGENDRE.

DÉFINITION 4.1

Soit f une fonction convexe dans \mathbf{R}^d dans \mathbf{R} . La transformation de LEGENDRE de f , que l'on note $\mathcal{L}(f)$, est définie par

$$\mathcal{L}(f): \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R} \\ p \mapsto \sup_{x \in \mathbf{R}^d} (\langle x, p \rangle - f(x)). \end{array} \right.$$

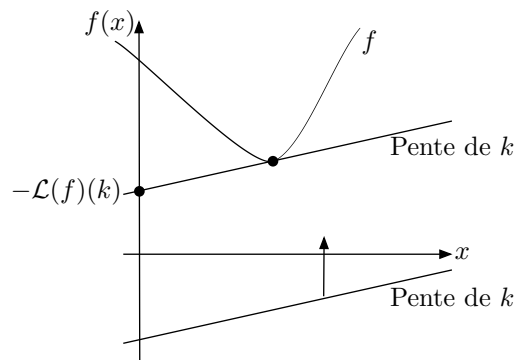


FIGURE 4.1 – Interprétation géométrique de la transformée de LEGENDRE

Il est facile de vérifier que $\mathcal{L}(f)$ est toujours convexe, et si f est linéaire par morceaux, $\mathcal{L}(f)$ est aussi linéaire par morceaux.

DÉFINITION 4.2

Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire par morceaux. L'ensemble des coins, T_f , de la fonction f est le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 est formé des points où la fonction f n'est pas localement affine.

On remarque que le graphe $G(f)$ de f est une surface polyédrale dans \mathbf{R}^3 et T_f est la projection des sommets et des arêtes de $G(f)$ sur \mathbf{R}^2 , donc T_f contient un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arêtes.

PROPOSITION 4.3

Soit f convexe et linéaire par morceaux. Alors pour tout $p \in \mathbf{R}^2$, il existe un sommet x de T_f , tel que $\mathcal{L}(f)(p) = \langle x, p \rangle - f(x)$.

On va démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4

Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe et linéaire par morceaux. Alors T_f est dual à $T_{\mathcal{L}(f)}$. En d'autres termes, il existe une bijection, B , entre les sommets, arêtes et faces de T_f avec ceux de $T_{\mathcal{L}(f)}$ telle que $x \in y$ si, et seulement si, $B(y) \in B(x)$.

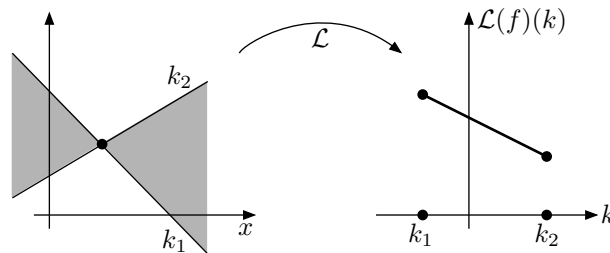
PREUVE

L'argument est combinatoire. On commence par une interprétation géométrique de la transformation de LEGENDRE.

Soit $p \in \mathbf{R}^2$, et notons $b = \mathcal{L}(f)(p)$. Par définition, le graphe de $x \rightarrow \langle x, p \rangle - b$ est en-dessous du graphe $G(f)$ de f , et touche $G(f)$ en un sommet, une arête ou un polygone de $G(f)$, parce que f est convexe et linéaire par morceaux.

Ainsi, on peut associer un polygone de $T_{\mathcal{L}(f)}$ à chaque sommet x de T_f c'est l'ensemble des « pentes » p de plans qui rencontrent $(x, f(x))$ et sont en-dessous du graphe de f . De façon similaire, on peut associer à chaque arête et à chaque polygone de T_f une arête et un sommet de $T_{\mathcal{L}(f)}$ respectivement. Cela fournit une correspondance.

En effet, il y a les dualités pour tout n , pas seulement $n = 2$. Pour expliquer la dualité, on peut dessiner le cas $n = 1$ schématiquement :



5 LE PATCHWORK COMME UN EXEMPLE

On rappelle la construction de patchwork, mais sans prolonger le triangle. On peut obtenir une courbe L_{++} qui est effectivement $L \cap \mathbf{R}_{++}^2$ où L est le L obtenu dans la construction originale du patchwork. On va montrer le théorème suivant énoncé en introduction.

THÉORÈME 5.1

VERSION DU PREMIER QUADRANT. Si la triangulation de T est convexe, §1 alors il existe une courbe A non singulière de degré d dans \mathbf{R}^2 telle que

$$(\mathbf{R}_{++}^2, \mathbf{R}A \cap \mathbf{R}_{++}^2) \simeq (T^* \S 2, L_{++} \cap T^*).$$

POLYNÔME DE VIRO. Si f désigne une fonction caractérisant la convexité et si V désigne l'ensemble des sommets de la triangulation,

$$P_t(x, y) := \sum_{(i,j) \in V} \text{signe}(i, j) x^i y^j t^{f(i,j)},$$

pour $t > 0$ assez petit, réalise la courbe.

PREUVE

Supposons que $0 < t < 1$. On pose $h = -1/\log t$ et alors $h > 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h = 0$. On note C_h la courbe définie par

$$\begin{aligned} P_t(X, Y) &= \sum_{(i,j) \in V} \varepsilon_{ij} X^i Y^j t^{f(i,j)} \\ &= \sum_{(i,j) \in V} \varepsilon_{ij} \exp(-f(i,j)/h) X^i Y^j \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Notons $V_+ = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1\}$ et $V_- = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = -1\}$, et on pose

$$p_h^+ = \left(\bigoplus_h \right)_{(i,j) \in V_+} a_{ij} \odot_h x^{\odot i} y^{\odot j} \text{ et } p_h^- = \left(\bigoplus_h \right)_{(i,j) \in V_-} a_{ij} \odot_h x^{\odot i} y^{\odot j}$$

où $a_{ij} = -f(i, j)$. On note $p^+ := p_0^+$, $p^- := p_0^-$ et $p = p^+ \oplus p^-$ est aussi un polynôme tropical.

LEMME 5.2

L'application p est égale à $\mathcal{L}(f)$, l'image par la transformation de LEGENDRE de f .

Donc par la proposition 3.1, $(\mathbf{R}_{++}^2, \mathbf{R}_{++}^2 \cap \mathbf{R}C_h)$ est homéomorphe à (\mathbf{R}^2, C) où C est la projection de $G(p^+) \cap G(p^-)$ sur \mathbf{R}^2 . On note que $G(p^+) \cap G(p^-) \simeq C$ est un sous-graphe de T_p . Par le théorème 4.4, T_p est dual à T_f , qui est en fait l'ensemble formé par les sommets et les arêtes dans la triangulation de T que l'on a obtenu dans la construction du patchwork. De plus, $G(p^+) \cap G(p^-)$ est la borne commune aux polygones des $G(p)$, qui appartiennent respectivement à $G(p^+)$ et à $G(p^-)$. En considérant la dualité, on obtient le théorème.

Les versions affine et projective sont des corollaires de ce théorème par une transformation de coordonnées.

6 TRIANGULATIONS CONVEXES

Dans cette section, on va étudier les triangulations convexes. Soit S une triangulation, et $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui est linéaire sur tout triangle. Soit l une arête de S . On dit que f est localement convexe en l si elle est convexe sur le voisinage de l , c'est-à-dire la réunion de un ou deux triangles qui contiennent l .

LEMME 6.1

f est convexe si et seulement si f est localement convexe en tout arête.

-
- §1. C'est-à-dire qu'il existe une fonction $f: T \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et affine par morceaux telle que les domaines de linéarité coïncident strictement avec les triangles de la triangulation.
 §2. C'est l'intérieur du triangle

C'est un corollaire du fait que $[0, 1] \subseteq \mathbf{R}$ est compact et du fait que si une droite rencontre un sommet, alors elle rencontre au plus deux triangles qui contiennent ce sommet. Maintenant on va voir un exemple de triangulation qui n'est pas convexe :

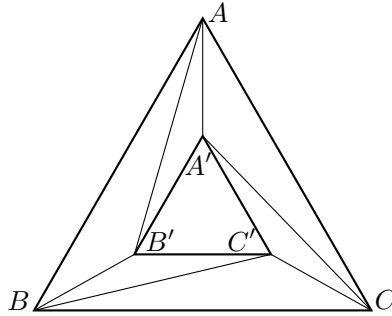


FIGURE 4.2 – Exemple de triangulation non convexe

PROPOSITION 6.2

Supposons que $BC, B'C'$ sont parallèles, $CA, C'A'$ sont parallèles, $AB, A'B'$ sont parallèles, alors la triangulation précédente n'est pas convexe.

PREUVE

Supposons que $f: \triangle ABC \rightarrow \mathbf{R}$ est convexe. On peut choisir une fonction linéaire $f_0: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_0(A') = f(A'), f_0(B') = f(B')$ et $f_0(C') = f(C')$. En considérant $f - f_0$, on peut supposer que $f|_{\triangle A'B'C'} = 0$.

Dans ce cas, puisque f est localement convexe au segment BC' , on a $f(B) \geq f(C)$. De même, $f(C) \geq f(A)$ et $f(A) \geq f(B)$, donc $f(A) = f(B) = f(C)$. Cela implique que $(B, f(B)), (C, f(C)), (B', f(B')), (C', f(C'))$ sont dans le même plan, contradiction.

Au contraire,

PROPOSITION 6.3

Les triangulations complètes sont convexes, c'est-à-dire, les triangles T_d dont les sommets sont $(0, 0), (0, d), (d, 0)$ où $d = 2k$ pour $k \in \mathbf{Z}_{>0}$, et les triangulations induites par les droites $x = 1, 2, \dots, d - 1, y = 1, 2, \dots, d - 1$ et $x + y = 1, 2, \dots, d - 1$.

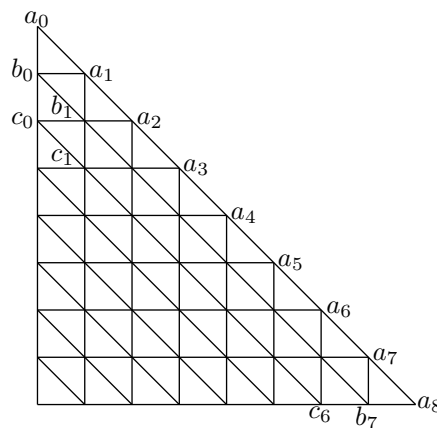


FIGURE 4.3 – Avec $d = 8$ et les notations de la preuve

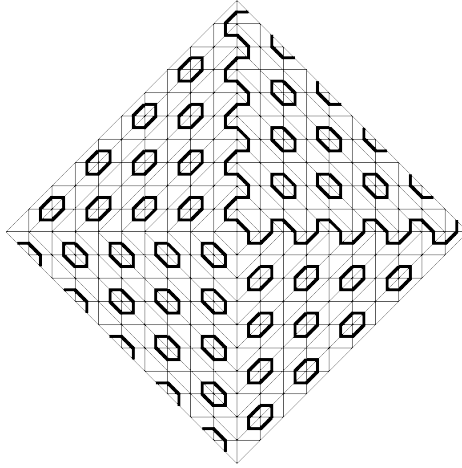
PREUVE

On procède par induction sur d . C'est trivial quand $d = 0, 1$. Supposons que $d > 2$ et que la proposition est vraie pour $d - 1$. On veut étendre une fonction convexe $f_{d-1}: T_{d-1} \rightarrow \mathbf{R}$ à $f_d: T_d \rightarrow \mathbf{R}$. On pose $b_j = f_{d-1}(j, d - 1 - j)$ et $c_j = f_{d-1}(j, d - 2 - j)$. On veut

déterminer $(a_j)_{0 \leq j \leq d}$, tel que si l'on pose $f_d(j, d-j) = a_j$, $f_d = f_{d-1}$ sur T_{d-1} et étendue linéairement, f_d est convexe et strictement convexe aux arêtes. Après calcul, les restrictions sont $a_j - a_{j+1} > b_j - b_{j+1}$ pour $0 \leq j < d$, et $a_j - a_{j+1} < b_{j-1} - b_j$ pour $0 < j \leq d$, et $c_j > b_{j-1} + b_j - a_{j-1}$. L'existence est claire, parce que on peut d'abord choisir les différences $a_j - a_{j+1}$ tel que $(a_j - a_{j+1})_j$ vérifient les inégalités précédentes (on doit montrer en même temps, par induction en d , que $b_j - b_{j+1} < b_{j-1} - b_j$), puis on peut choisir a_0 assez grand tel que tous les a_j sont grands.

7 EXEMPLE : UNE CONSTRUCTION DES M-COURBES

Considérons les triangulations complètes. On pose $\varepsilon_{ij} = -1$ si $i, j \equiv 0 \pmod{2}$, et $\varepsilon_{ij} = 1$ sinon. On vérifie que l'on obtient une M-courbe.



Annexe 1

Appendice

UNE PREUVE DU THÉORÈME DE BÉZOUT

On considère le corps \mathbf{K} (qui sera celui des nombres réels ou complexes). On désigne par \mathbf{CP}^2 le plan projectif complexe et $\mathbf{K}[x, y, z]$ désignera les polynômes homogènes à trois variables.

Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME .1 (BÉZOUT)

Soient $A, B \in \mathbf{K}[x, y, z]$ de degrés respectifs m et n , sans facteur non constant en commun. Alors les courbes $A = 0$ et $B = 0$ s'intersectent dans \mathbf{CP}^2 en exactement mn points, comptés avec multiplicité.

Par la suite, A, B seront deux polynômes homogènes à trois variables que nous conviendrons de noter x, y et z . $\deg_x A$ désignera le degré de A en tant que polynôme de variable x . Bien entendu, $\deg A$ désigne le degré de A .

Remarquons que $A = 0$ est défini à multiplication de A par un scalaire non nul près.

Enfin, nous dirons que $\text{pgcd}(A, B) = 1$ si A et B ne partagent aucun facteur non constant.

DÉFINITION .2

Soit $p \in \mathbf{CP}^2$, nous désignons par $i_p(A, B)$ la multiplicité de l'intersection de A et B en p . Ce nombre est nul si A et B ne s'intersectent pas en p et, sinon, c'est la multiplicité dans le sens commun.

L'expression $A \cdot B$ désigne la série formelle $\sum_p i_p(A, B)p$.

PROPOSITION .3

Soit C un troisième polynôme homogène de $\mathbf{K}[x, y, z]$. Supposons que $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(A, C) = 1$. Alors

1. $A \cdot B = B \cdot A$;
2. $A \cdot (BC) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. si $\deg AC = \deg B$ alors $A \cdot (B + AC) = A \cdot B$;
4. si A et B sont deux droites distinctes, disons $A(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$ et $B(x, y, z) = b_1x + b_2y + b_3z$, alors leur intersection est le point p_\times donné par

$$p_\times = \left(\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \end{array} \right).$$

Supposons que $\deg_x A \geq \deg_x B \geq 1$. La division des polynômes selon la variable x donne $q, r \in \mathbf{K}(y, z)[x]$ tels que

$$A = qB + r$$

et $0 \leq \deg_x r < \deg_x B$ et $q, r \neq 0$. Multiplions par H , le plus petit commun multiple des dénominateurs de q et r , tels que $Q = qH$ et $R = rH$ soient dans $\mathbf{K}[x, y, z]$ et vérifient

$$HA = QB + R.$$

Puisque HA est homogène, $\deg QB = \deg R$. Désignons par G le pgcd de B et R . Comme $\text{pgcd}(A, B) = 1$ on a $\text{pgcd}(B, H) = G$. Après division par G on obtient

$$H'A = QB' + R'$$

avec $B = B'G$, $H = H'G$, $R = R'G$ et $\text{pgcd}(B', R') = \text{pgcd}(B', H') = 1$.

Par la proposition .3,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A \cdot (B'G) \\ &= A \cdot B' + A \cdot G \\ &= (H'A) \cdot B' - H' \cdot B' + A \cdot G. \end{aligned}$$

PREUVE (Théorème de BÉZOUT)

Nous devons montrer que $\sharp(A \cdot B) = mn$. Procédons par récurrence sur $\deg_x B$.

Lorsque $\deg_x B = 0$, alors les facteurs de B dans \mathbf{C} sont n droites L , et par le second point de la proposition .3, $A \cdot B$ est une somme de n intersections $A \cdot L$. Mais chaque $A \cdot L$ est égal à un $A' \cdot L$ où A' est un polynôme à deux variables de degré m (voir le lemme suivant) et donc un produit de m droites. Ainsi $A \cdot L$ s'écrit comme m intersection $L' \cdot L$ donnant mn telles intersections au total. Mais par le dernier point de .3, on obtient bien $\sharp(A \cdot B) = mn$.

Supposons que $\deg_x B > 0$ et que le résultat soit vrai pour tout $B \in \mathbf{K}[x, y, z]$ tel que $\deg_x B < k$ et pour tout $A \in \mathbf{K}[x, y, z]$. Par l'égalité qui précède,

$$\begin{aligned} \sharp(A \cdot B) &= \sharp(R' \cdot B') - \sharp(H' \cdot B') + \sharp(A \cdot G) \\ &= (\deg R' - \deg H') \deg B' + \deg A \deg G, \end{aligned}$$

puisque $\deg_x R' < \deg_x B = k$ et $\deg_x H' = \deg_x G = 0$. Mais comme tous les polynômes sont homogènes, $\deg R' - \deg H' = \deg A$. Finalement, $\deg B' + \deg G = \deg B$ puisque $B = B'G$. Le résultat $\sharp(A \cdot B) = mn$ vient alors puisque $\deg_x B = k$.

LEMME .4

Si $\deg_x B = 0$ alors $A \cdot B = A' \cdot B$ où A' est un produit de m droites.

PREUVE

Commençons par décomposer B : si $B(y, 1) = 0$ alors B est un polynôme en z , c'est donc z (quitte à diviser un bon facteur). Sinon,

$$B(y, z) = \prod_{\beta} (y - \beta z)$$

avec β les racines de $B(y, 1)$.

Remarquons que

$$A(x, y, z) = A(x, y, 0) + zA_1(x, y, z)$$

et donc si $B = z$, on a bien $A \cdot B = A(x, y, 0) \cdot B$ et $A'(x, y, z) = A(x, y, 0)$ est bien un produit de m droites.

Sinon, nous avons également

$$A(x, y, z) = A(x, \beta z, z) + (y - \beta z)A_2(x, y, z)$$

et pour $A'(x, y, z) = A(x, \beta z, z)$ la conclusion est la même.