

Le principe de Eckmann-Hilton

Maxence Novel Najib Idrissi Kaïtouni
Sous la direction de Grégory Ginot

21 Juin 2012

Résumé

Le but de ce mémoire est tout d'abord d'énoncer et de démontrer le principe de Eckmann-Hilton, un résultat concernant des lois binaires compatibles entre elles qui deviennent associatives et commutatives. Nous étudierons ensuite quelques exemples d'applications.

Nous nous intéresserons ensuite au principe de reconnaissance, une vaste "généralisation" du principe de Eckmann-Hilton, et qui permet de reconnaître, parmi les espaces topologiques, les espaces de lacets pointés (*ie.* ceux qui sont de la forme $\text{Map}(\mathbb{S}^1, X)$).

Table des matières

Table des matières	1
1 Le principe de Eckmann-Hilton	2
2 Exemples d'applications	3
2.1 Homotopie, groupe fondamental	3
2.2 Groupes d'homotopies d'ordre supérieur	6
2.3 Le centre d'une catégorie	7
3 Les espaces E_k et le principe de reconnaissance	9
3.1 Espaces de lacets	9
3.2 Les opérades	10
3.3 Principe de reconnaissance, $k = 1$	12
3.4 Principe de reconnaissance, k quelconque	14
Bibliographie	18

1 Le principe de Eckmann-Hilton

Formulé en 1962, le principe de Eckmann-Hilton détermine sous quelles conditions il est possible de munir un ensemble de deux multiplications unitaires compatibles. Son résultat est simple mais a permis des avancées importantes en algèbre, topologie et théorie des catégories.

Théorème 1.1. (*Principe de Eckmann-Hilton*) Soit X un ensemble muni de 2 lois binaires, notées \cdot et $*$, qui possèdent un élément neutre, et qui vérifient : $\forall a, b, c, d \in X, (a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d)$

Alors les deux lois \cdot et $*$ coïncident et sont commutatives et associatives.

La condition vérifiée par \cdot et $*$ signifie que \cdot est un morphisme de monoïde par rapport à la multiplication $*$. C'est une forme d'utilisation du résultat classique qui peut se résumer de la manière suivante : un monoïde dans la catégorie des monoïdes est un monoïde commutatif.

Démonstration. On note e . et e_* les éléments neutres respectifs des lois \cdot et $*$. On a :

$$(e_* * e.) \cdot (e. * e_*) = e. \cdot e. = e.$$

et

$$(e_* \cdot e.) * (e. * e_*) = e_* * e_* = e_*$$

Or les deux membres de gauche sont égaux par hypothèse sur les lois, donc $e_* = e.$. On note désormais 1 cet élément neutre commun. Soit $a, b \in X$. Alors :

$$a \cdot b = (1 * a) \cdot (b * 1) = (1 \cdot b) * (a \cdot 1) = b * a = (b \cdot 1) * (1 \cdot a) = (b * 1) \cdot (1 * a) = b \cdot a$$

Ce qui montre que \cdot et $*$ sont la même loi, qui est associative et commutative. \square

Le principe de Eckmann-Hilton est assez utile, en particulier parce qu'il n'utilise pas d'hypothèse d'associativité.

2 Exemples d'applications

2.1 Homotopie, groupe fondamental

L'homotopie consiste à formaliser la notion de déformation.

Par la suite, on note I l'espace topologique $[0, 1]$.

Définition 2.1. Soit X, Y deux ensembles topologiques. Une **homotopie** est une famille de fonctions $f_t : X \rightarrow Y, t \in I$, telle que la fonction $F : X \times I \rightarrow Y$ donnée par $F(x, t) = f_t(x)$ est continue.

Deux fonctions f_0, f_1 sont dites **homotopes** s'il existe une homotopie $(f_t)_{t \in I}$ les reliant. On note alors $f_0 \simeq f_1$.

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est une **équivalence d'homotopie (forte)** s'il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $fg \simeq Id_Y$ et $gf \simeq Id_X$. Les espaces X et Y sont alors dits **homotopiquement équivalents**, ou de même type d'homotopie (forte).

Exemple. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et \mathbb{S}^{n-1} sont de même type d'homotopie forte. Pour voir cela, on prend $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ et $g = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Alors $fg = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $gf = f \simeq Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ via l'homotopie $f_t(x) = (1-t)f(x) + tx \neq 0$.

Définition 2.2. Un **chemin** dans X est une fonction continue $f : I \rightarrow X$. Une homotopie de chemins est une famille $f_t : I \rightarrow X, t \in I$, telle que $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont indépendants de t , et la fonction $F : I \times I \rightarrow Y$ donnée par $F(s, t) = f_t(s)$ soit continue.

Deux chemins f_0, f_1 reliés de cette manière sont dits **homotopes**. On note alors $f_0 \simeq f_1$.

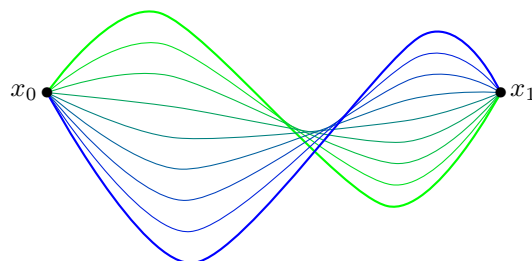


FIGURE 2.1 : Un exemple d'homotopie

La relation “être homotope” est une relation d'équivalence sur les chemins. Pour un chemin f , on note $[f]$ sa classe d'équivalence pour cette relation, appelée classe d'homotopie de f .

Étant donné un chemin $f : I \rightarrow X$, une reparamétrisation de f est une composition $f\phi$ où $\phi : I \rightarrow I$ est une application continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. La reparamétrisation de f conserve sa classe d'homotopie, puisque $f\phi \simeq f$ par l'homotopie $(f\phi_t)$, où $\phi_t(s) = (1-t)\phi(s) + ts$, de telle sorte que $\phi_0 = \phi$ et $\phi_1 = Id_I$.

Étant donné deux chemins $f, g : I \rightarrow X$ tels que $f(1) = g(0)$, on peut définir un chemin produit $f \cdot g$ qui traverse f puis g , par :

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ce produit respecte les classes d'homotopie car si $f_0 \simeq f_1$ et $g_0 \simeq g_1$ via les homotopies f_t et g_t , alors $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ via l'homotopie $f_t \cdot g_t$.

Définition 2.3. On appelle **lacet** sur X un chemin dans X avec le même point de départ et d'arrivée $f(0) = f(1) = x_0$. Le point x_0 est appelé point base du lacet f .

L'ensemble des classes d'homotopies $[f]$ des lacets $f : I \rightarrow X$ de point base x_0 est noté $\pi_1(X, x_0)$.

Exemple. Pour un ensemble convexe $X \subset \mathbb{R}^n$ avec point base $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ est un singleton, puisque tous lacets f_0, f_1 de point base x_0 sont homotopes via l'homotopie linéaire $f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$.

Proposition 2.4. $\pi_1(X, x_0)$ muni du produit $[f][g] = [f \cdot g]$ (bien défini) est un groupe. On appelle $\pi_1(X, x_0)$ le groupe fondamental de X au point base x_0 .

Démonstration. Le produit de deux lacets f, g est bien défini puisqu'on les a pris avec même point base. Le produit $[f][g] = [f \cdot g]$ est bien défini d'après la remarque faite précédemment. Soit f, g, h trois lacets de X avec point base x_0 . Alors $f \cdot (g \cdot h)$ est un reparamétrisation de $(f \cdot g) \cdot h$ par la fonction affine par morceaux ϕ définie par

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ s - \frac{1}{4} & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2s - 1 & \text{si } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Donc $f \cdot (g \cdot h) \simeq (f \cdot g) \cdot h$, ce qui montre que le produit dans l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ est associatif.

Soit c le lacet constant égal à x_0 . $f \cdot c$ est un reparamétrisation de f par

$$\phi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donc $f \cdot c \simeq f$. De même, $c \cdot f \simeq f$. Donc c est l'élément neutre pour \cdot dans l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$.

Étant donné un chemin f de X de x_0 à x_1 , on définit son chemin inverse \bar{f} par $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Montrons que $f \cdot \bar{f}$ est homotope au chemin c constant égal à x_0 . On considère f_t le chemin qui vaut f sur $[0, 1-t]$ et qui est stationnaire égal à $f(1-t)$ sur $[1-t, 1]$. Alors $h_t = f_t \cdot \bar{f}_t$ est une homotopie de $h_0 = f \cdot \bar{f}$ à $h_1 = c \cdot \bar{c} = c$. Donc $f \cdot \bar{f} \simeq c$. En appliquant ce résultat à \bar{f} , on a $\bar{f} \cdot f \simeq c'$ où c' est le lacet constant égal à x_1 . Donc si f est un lacet de X de point base x_0 , $[f]$ est l'inverse de $[f]$ dans l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$.

Ceci termine de démontrer que $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe. \square

On peut alors s'intéresser à la dépendance de $\pi_1(X, x_0)$ vis-à-vis du choix du point base x_0 . Comme $\pi_1(X, x_0)$ ne dépend que de la composante connexe par arcs de X contenant x_0 , on ne peut pas espérer trouver de lien entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ si x_0 et x_1 ne sont pas dans la même composante connexe par arcs de X .

On considère donc $x_0, x_1 \in X$, et $h : I \rightarrow X$ un chemin de x_0 à x_1 . Alors si f est un lacet de point base x_1 , $(h \cdot f) \cdot \bar{h}$ est un lacet de point base x_0 . On peut alors définir une application de changement de point base $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ par $\beta_h([f]) = [h \cdot f \cdot \bar{h}]$. L'application β_h est bien définie (après passage aux classes d'homotopie) car $(h \cdot f) \cdot \bar{h} \simeq h \cdot (f \cdot \bar{h})$ et si (f_t) est une homotopie de lacets de point base x_1 , alors $((h \cdot f_t) \cdot \bar{h})$ est une homotopie de lacets de point base x_0 .

De plus, $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est un isomorphisme. En effet, c'est un morphisme car $\beta_h[f \cdot g] = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h[f] \cdot \beta_h[g]$. De plus, $\beta_h \beta_{\bar{h}}[f] = \beta_h[h \cdot f \cdot \bar{h}] = [h \cdot \bar{h} \cdot f \cdot h \cdot \bar{h}] = [f]$. De même, $\beta_{\bar{h}} \beta_h[f] = [f]$.

Ainsi, si X est connexe par arcs, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est, à isomorphisme près¹, indépendant du choix de x_0 . On le note alors $\pi_1(X)$.

Le principe de Eckmann-Hilton permet de montrer que pour certains espaces topologiques, les H-espaces, $\pi_1(X)$ est abélien.

Définition 2.5. *Un H-espace X est un espace topologique muni d'une application continue $\mu : X \times X \rightarrow X$ et d'un élément neutre e tel que $\forall x \in X, \mu(e, x) = \mu(x, e) = x$. En particulier, les groupes topologiques sont des H-espaces.*

Théorème 2.6. *Étant donné un H-espace X , son groupe fondamental $\pi_1(X, e)$ est abélien.*

Démonstration. On va appliquer le principe de Eckmann-Hilton aux lois \cdot et $*$, où $*$ est donnée par

$$(f * g)(s) = \mu(f(s), g(s))$$

qui est bien défini sur les classes d'homotopies, et d'élément neutre le chemin constant égal à e . Soit f, g, h, k des lacets de X de point base e .

$$\begin{aligned} ((f * g) \cdot (h * k))(s) &= \begin{cases} \mu(f(2s), g(2s)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu(h(2s-1), k(2s-1)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \mu((f \cdot h)(s), (g \cdot k)(s)) \\ &= ((f \cdot h) * (g \cdot k))(s) \end{aligned}$$

Donc $*$ et \cdot coïncident et sont commutatives. □

Exemple. Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à \mathbb{Z} (qui est bien commutatif) : la classe d'homotopie d'un lacet de \mathbb{S}^1 est donnée par le nombre de tours (dans le sens positif) que fait le lacet.

Exemple. Pour $n \geq 3$, le groupe $\pi_1(SO(n))$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (qui est bien commutatif).

Exemple. Pour un bouquet de deux cercles X , ie. deux cercles recollés en un point, le groupe $\pi_1(X)$ est le groupe libre à deux générateurs (correspondant aux tours faits sur chacun des cercles), qui est non-commutatif. Un bouquet de cercles ne peut donc pas être muni d'une structure de H-espace.

1. En général, cet isomorphisme n'est pas unique.

2.2 Groupes d'homotopies d'ordre supérieur

Définition 2.7. Soit I^n le cube de dimension n , où $I = [0, 1]$. La frontière ∂I^n de I^n est l'ensemble des points avec au moins une coordonnée égale à 0 ou 1. Pour un espace X , et un point base x_0 , on définit le n -ième **groupe d'homotopie** (basé en x_0), noté $\pi_n(X, x_0)$, comme l'ensemble des classes d'homotopies des applications $f : I^n \rightarrow X$, où les homotopies doivent de plus vérifier : $\forall t \in [0, 1], f_t(\partial I^n) = x_0$.

On peut étendre la définition à $n = 0$ en considérant que I^0 est un point et ∂I^0 est vide : $\pi_0(X, x_0)$ est alors l'ensemble des composantes connexes par arcs de X . En général, $\pi_0(X, x_0)$ ne possède pas de structure de groupe.

Pour $n \geq 2$, on définit une opération de somme sur $\pi_n(X, x_0)$, qui généralise le produit de $\pi_1(X, x_0)$, par :

$$(f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Cette somme est bien définie sur les classes d'homotopies.

En appliquant le principe de Eckmann-Hilton on va démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.8. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X, x_0)$, muni de la loi $+$, est un groupe abélien.

Démonstration. La même preuve que pour $\pi_1(X, x_0)$ montre que $\pi_n(X, x_0)$ muni de la loi $+$ est un groupe.

On va considérer la loi $*$ sur $\pi_n(X, x_0)$ donnée par

$$(f * g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(s_1, 2s_2, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(s_1, 2s_2 - 1, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Elle est bien définie sur les classes d'homotopies, et munit $\pi_n(X, x_0)$ d'une nouvelle structure de groupe. On va maintenant appliquer le principe de Eckmann-Hilton. Soit $f, g, h, k : I^n \rightarrow X$ qui valent x_0 sur ∂I^n . Par définition de $+$ et $*$, on a :

$$\begin{aligned} ((f * g) + (h * k))(s_1, \dots, s_n) &= \begin{cases} f(2s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{si } (s_1, s_2) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n) & \text{si } (s_1, s_2) \in [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \\ h(2s_1 - 1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{si } (s_1, s_2) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ k(2s_1 - 1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n) & \text{si } (s_1, s_2) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= ((f + h) * (g + k))(s_1, \dots, s_n) \end{aligned}$$

Donc par le principe de Eckmann-Hilton, $*$ et $+$ sont la même loi, et cette loi est commutative. \square

L'homotopie entre $f + g$ et $g + f$ peut se voir sur la figure 2.2.

Une première homotopie consiste à réduire les domaines de f et g , puis une deuxième consiste à les déplacer en gardant des domaines disjoints, et enfin une dernière homotopie agrandit leur domaine à leur taille initiale.

Exemple. Pour les sphères, on a $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ si $k < n$ et $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.

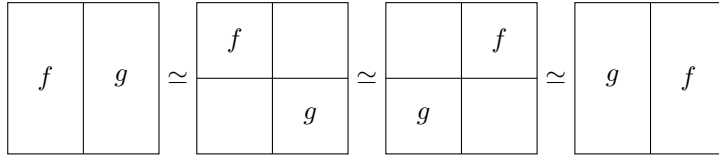


FIGURE 2.2 : Homotopie entre $f + g$ et $g + f$

2.3 Le centre d'une catégorie

Un autre exemple d'application du principe de Eckmann-Hilton vient de la théorie des catégories, et plus précisément de la composition des transformations naturelles. Rappelons qu'une **transformation naturelle** α entre deux foncteurs (covariants) $F, G : C \rightarrow D$ est une famille de morphismes $(\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X))_{X \in C}$ tels que pour toute flèche $f : X \rightarrow Y$ dans C , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\
 G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y)
 \end{array}$$

Alors il existe deux manières différentes de composer des transformations naturelles, suivant qu'elles sont entre des foncteurs $F, G : C \rightarrow D$ ou des foncteurs $C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$. C'est à ces deux lois que nous allons appliquer le principe de Eckmann-Hilton.

Définition 2.9. La **composition verticale** de deux transformations naturelles correspond au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 & \curvearrowright & \\
 C & \xrightarrow{G} & D \\
 & \curvearrowleft & \\
 & H & \\
 & \Downarrow \beta & \\
 & &
 \end{array}$$

Si C, D sont deux catégories, $F, G, H : C \rightarrow D$ trois foncteurs (covariants) et $\alpha : F \rightarrow G, \beta : G \rightarrow H$ sont deux transformations naturelles, on peut définir une transformation naturelle $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ où la composante en $X \in C$ est $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X$.

Définition 2.10. La **composition horizontale** (aussi appelée produit de Godement) de deux transformations naturelles correspond au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_1 & & F_2 & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 C & \xrightarrow{\quad} & D & \xrightarrow{\quad} & E \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & G_1 & & G_2 & \\
 & \Downarrow \alpha & & \Downarrow \beta & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Si C, D, E sont des catégories, $F_1, G_1 : C \rightarrow D, F_2, G_2 : D \rightarrow E$ des foncteurs et $\alpha : F_1 \rightarrow G_1, \beta : F_2 \rightarrow G_2$ des transformations naturelles, on peut définir une transformation naturelle $\beta * \alpha : (F_2 \circ F_1) \rightarrow (G_2 \circ G_1)$, où la composante en $X \in C$ est

$$(\beta * \alpha)_X = \beta_{F_1(X)} \circ G_2(\alpha_X) = F_2(\alpha_X) \circ \beta_{G_1(X)}$$

La dernière égalité vient de la *loi d'échange* dans les catégories, qui peut être résumée en disant que dans le diagramme suivant, les deux manières de composer les transformations naturelles sont identiques :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_1 & & F_2 \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 C & \xrightarrow{G_1} & D & \xrightarrow{G_2} & E \\
 & \downarrow \beta & & \downarrow \delta & \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & H_1 & & H_2
 \end{array}$$

pour tous foncteurs et transformations naturelles compatibles entre eux.

On reconnaît presque là les hypothèses du principe de Eckmann-Hilton. Considérons donc, pour une catégorie C , le **centre** $Z(C)$ de cette catégorie, défini par $Z(C) = \text{End}(id_C)$: c'est l'ensemble des endo-transformations naturelles du foncteur identique de C . Ce sont donc des familles de morphismes $(\alpha_X : X \rightarrow X)_{X \in C}$ qui font commuter, pour tout $f : X \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

En particulier, dans un monoïde vu comme une catégorie à un objet, le centre correspond effectivement aux éléments (les morphismes de la catégorie dans ce cas) qui commutent avec tous les autres.

On vérifie alors sans problèmes que les deux compositions définies plus haut, \circ et $*$, définissent sur $Z(C)$ deux lois binaires associatives et de même élément neutre (la transformation naturelle id). La loi d'échange est alors exactement l'hypothèse du principe de Eckmann-Hilton, que l'on peut donc appliquer ici :

Proposition 2.11. *La composition horizontale et la composition verticale définissent la même loi sur $Z(C)$, qui est de plus commutative.*

3 Les espaces E_k et le principe de reconnaissance

Par le principe de Eckmann-Hilton, de la commutativité apparaît là où on ne supposait au départ qu'une certaine condition de compatibilité entre deux opérations associatives unitaires (parfois à homotopie près seulement, comme dans le cas des groupes d'homotopie). Ce comportement peut se "généraliser" à certaines classes d'espaces topologiques qui ont une certaine structure, celle d'algèbre sur l'opéade E_k des "petits cubes".

3.1 Espaces de lacets

Dans toute la suite, nous allons considérer [5] la catégorie \mathcal{T} des espaces topologiques séparés, à topologie compactement engendrée¹, munis d'un point base (souvent noté $*$). Les morphismes de la catégorie seront les applications continues qui préservent le point base. Un "espace" dans la suite sera implicitement dans \mathcal{T} . Si X, Y sont des espaces, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ est l'ensemble des applications continues de X dans Y qui préservent les points bases (ie. si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, alors $f(*_X) = *_Y$).

Définition 3.1. Soit $(X, *) \in \mathcal{T}$, on définit alors son **espace des lacets** par $\Omega X = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{S}^1, X)$. C'est l'ensemble des courbes fermées de X qui commencent et finissent en $*$. ΩX est muni, comme espace topologique, de la topologie compacte-ouverte². On prend pour point base de ΩX (et on note encore $*$) la fonction constante égale à $*$.

Si $X \in \mathcal{T}$, alors ΩX , est encore dans \mathcal{T} . On peut donc itérer le procédé de construction de ΩX pour obtenir $\Omega^1 X = \Omega X$ et $\Omega^{n+1} X = \Omega \Omega^n X$: les $\Omega^n X$ pour $n \geq 2$ sont appelés les espaces de lacets itérés de X .

Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence de ΩX (pour la relation d'homotopie). De plus, on a presque immédiatement $\pi_n(\Omega X) \simeq \pi_{n+1}(X)$ (comme nos espaces sont tous pointés, il n'y pas besoin de préciser en quel point on prend les groupes d'homotopie, même quand les espaces ne sont pas connexes par arcs : on prend toujours comme point de base le point $*$).

Définition 3.2. Soit X et Y deux espaces (de \mathcal{T}), on dit que X et Y ont le même **type d'homotopie faible**, noté $X \sim Y$, s'il existe une application $f : X \rightarrow Y$ qui induit un isomorphisme $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ et pour tout $x \in X$, un isomorphisme $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ pour tout $n \geq 1$.

(On pourrait être tenté de dire que f induit un isomorphisme $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ pour tous $x \in X, n \geq 0$, mais dans le cas $X = \emptyset$ la définition serait incorrecte)

1. Un espace topologique X est à topologie compactement engendrée si, pour tout $F \subset X$, F est fermé dans X si et seulement si $F \cap K$ est fermé dans K pour tout compact de X . Les raisons pour considérer ce genre d'espaces sont d'ordre purement techniques, c'est à dire servent à garantir que la topologie naturelle sur les espaces de fonction est compatible avec la topologie naturelle sur les produits. Le lecteur peut oublier sans grand danger cette condition en première approximation.

2. Dans le cas où X est métrisable, la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme des fonctions.

Définition 3.3. *Un espace X est un **espace de lacets d'ordre k** s'il existe un espace Y tel que $X \sim \Omega^k Y$. De même, X est un **espace de lacets d'ordre ∞** s'il existe une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ d'espaces tels que $X_0 = X$ et $\forall n, X_n \sim \Omega X_{n+1}$.*

Les espaces de lacets jouissent de propriétés particulières. Si $X \sim \Omega Y$, alors l'ensemble de ses composantes connexes $(\pi_0(X))$ est en bijection avec $\pi_1(Y)$, qui est un groupe ; en particulier $\pi_0(X)$ hérite de cette structure de groupe. De même, le groupe fondamental de X ($\pi_1(X)$) est isomorphe à $\pi_2(Y)$, un groupe abélien (cf. 2.2).

Exemple. Des exemples d'espaces de lacets d'ordre ∞ sont donnés par les *espaces d'Eilenberg-MacLane*. Si $n \geq 1$ et G est un groupe, on dit qu'un espace connexe X est un **espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(G, n)$** si son n -ième groupe d'homotopie $\pi_n(X)$ est isomorphe à G et si tous ses autres groupes d'homotopie sont triviaux.

Alors pour tout entier $n \geq 1$ et tout groupe G (commutatif si $n \geq 2$), il existe [2] un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(G, n)$, construit comme un CW-complexe³, unique à type d'homotopie forte près, souvent appelé directement $K(G, n)$.

La propriété d'unicité permet de montrer le résultat suivante. Nous avons en effet remarqué que $\pi_n(\Omega X) \simeq \pi_{n+1}(X)$, donc si X est un $K(G, n+1)$, alors ΩX est un $K(G, n)$. Par unicité, on conclut que $K(G, n) \sim \Omega K(G, n+1)$. Par récurrence, tous les espaces d'Eilenberg-MacLane pour des groupes commutatifs sont des espaces de lacets d'ordre ∞ , via $K(G, 1) \sim \Omega K(G, 2) \sim \Omega^2 K(G, 3) \sim \dots$

$K(\mathbb{Z}, 1)$	$K(\mathbb{Z}, 2)$	$K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$	$K(G \times H, n)$
\mathbb{S}^1	$\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$	$\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}$	$K(G, n) \times K(H, n)$

TABLE 3.1 : Exemples d'espaces d'Eilenberg-MacLane

Le but de la section suivante va être de trouver un moyen de *reconnaître* (à type d'homotopie faible près) les espaces de lacets.

3.2 Les opérades

Dans les définitions de May [5] et Boardman et Vogt [1] les opérades sont définies uniquement dans la catégorie \mathcal{T} , mais il est possible d'étendre la définition à toutes les catégories monoïdales symétriques ([4] par exemple).

Un exemple fondamental et instructif d'opérade est l'**opérade des endomorphismes** d'un espace X ; la théorie des opérades tourne autour de cette opérade particulière, et les axiomes des opérades sont faits pour faire d'elle une opérade. Celle-ci, notée $\mathcal{E}nd_X$ est constituée de la famille, pour $n \in \mathbb{N}$, des

3. Un CW-complexe est un espace topologique construit à partir de cellules de base (des disques de dimension k), recollés entre eux par leur bord. On peut trouver une définition dans [3]. Ceux-ci ont des propriétés très utiles, mais en général pour un CW-complexe X , ΩX n'est pas un CW-complexe, ce qui explique que nous ne travaillons pas dès le début avec eux.

$P(n) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X^n, X)$ (avec la convention que $X^0 = \{*\}$), chaque $P(n)$ étant muni d'une opération à droite du groupe symétrique \mathfrak{S}_n définie comme suit :

$$(f\sigma)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

La structure d'opérade demande en plus des opérations de composition $\circ_i : P(n) \times P(m) \rightarrow P(m+n-1)$, qui sont ici données par :

$$(f \circ_i g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots, x_{m+n-1})$$

Il est possible, en composant les \circ_i , d'obtenir une application $\gamma : P(n) \times P(k_1) \times \dots \times P(k_n) \rightarrow P(k_1 + \dots + k_n)$, qui consiste à prendre une fonction à n arguments, et de mettre dans chaque argument une fonction à k_i arguments pour obtenir au total une fonction à $k_1 + \dots + k_n$ arguments. On ré-écrit parfois $\gamma(f; g_1, \dots, g_n)$ sous la forme $f \circ (g_1, \dots, g_n)$.

Il est pratique de visualiser les \circ_i à l'aide de diagrammes du genre de la figure 3.1 (trouvés dans [4], les numéros sont les numéros des entrées et les sorties sont les fonctions).

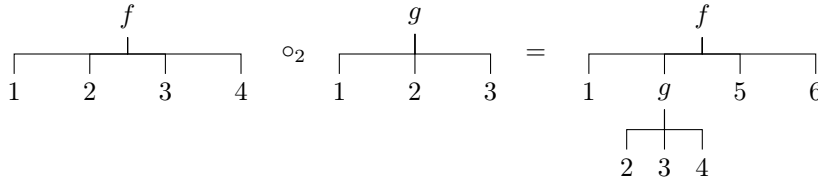


FIGURE 3.1 : La composition \circ_2 de $f \in P(4)$ avec $g \in P(3)$

Définition 3.4. Une **opérade** est une famille d'espaces topologiques $(P(n))_{n \geq 0}$, les éléments de ces espaces pouvant être vus comme des "opérations" abstraites ayant chacune n entrées et une sortie (en particulier $P(0) = \{*\}$), avec en plus les données suivantes :

- Une opération de composition $\gamma : P(n) \times (P(k_1) \times \dots \times P(k_n)) \rightarrow P(k_1 + \dots + k_n)$ (\circ en infixé), qui vérifie la propriété d'associativité suivante (similaire à celle qui existe dans End_X) :

$$\begin{aligned} \theta \circ (\theta_1 \circ (\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,k_1}), \dots, \theta_n \circ (\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,k_n})) = \\ (\theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)) \circ (\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,k_1}, \dots, \theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,k_n}) \end{aligned}$$

(De manière informelle, cette propriété signifie que dans les diagrammes comme celui de la figure 3.1, on peut composer les opérations dans un ordre quelconque et obtenir la même opération ; il n'y a pas besoin de "parenthèses verticales").

- Une opération "identité" $1 \in P(1)$, qui vérifie

$$\theta \circ (1, \dots, 1) = \theta = 1 \circ \theta$$

- Une action à droite du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur chaque $P(n)$ (correspondant au réarrangement des entrées), compatible avec la composition.

Il est alors clair que pour un espace X , End_X est une opérade.

Définition 3.5. *Un morphisme d'opéades $f : P \rightarrow Q$ est une famille d'applications continues $f_n : P(n) \rightarrow Q(n)$ qui préservent l'identité, la composition et l'action à droite des groupes symétriques.*

Définition 3.6. *Une algèbre sur une opérade P est un espace X muni d'un morphisme d'opéades $f : P \rightarrow \mathcal{E}nd_X$.*

Une autre manière de voir cette structure d'algèbre sur une opérade est de voir qu'il y a alors des applications (continues) de "multiplication" $\mu_n : P(n) \times X^n \rightarrow X$ compatibles entre elles et équivariantes par l'action à droite de \mathfrak{S}_n , définies par $\mu_n(p; x_1, \dots, x_n) = f_n(p)(x_1, \dots, x_n)$.

3.3 Principe de reconnaissance, $k = 1$

Le but de cette sous-section est de trouver un moyen de reconnaître, parmi les espaces de \mathcal{T} , les espaces de lacets d'ordre 1.

Le cas $k = 1$ admet une simplification par rapport au cas général. On peut dans ce cas passer par la structure d'espace A_∞ , que nous allons définir ici. Nous allons avoir besoin de la notion d'**opérade non symétrique**, définie exactement comme une opérade mais sans l'action à droite du groupe symétrique. Un morphisme d'opéades non symétrique doit alors simplement être compatible avec l'identité et la composition.

L'associahèdre de Stasheff [6] \mathcal{K}_n est un polytope convexe, avec un sommet pour chaque manière de parenthéser une expression à n variables de manière non-ambiguë (par exemple $a(b(cd))$ convient, mais pas $a(bcd)$). Deux sommets sont alors reliés s'il est possible de passer d'un parenthésage à l'autre en utilisant une fois la règle d'associativité, par une face pour deux utilisations, etc. (D'après un résultat de Kapranov, un tel polytope existe). Il peut être pratique de visualiser les parenthésages par des arbres, par exemple dans la figure 3.2.



FIGURE 3.2 : Les arbres correspondant à $(ab)(cd)$ et $a(b(cd))$

L'associahèdre \mathcal{K}_4 peut alors se visualiser dans la figure 3.3 (on peut également trouver \mathcal{K}_5 dans [4] ; les arbres rouges sont ceux qui correspondent aux sommets, les verts aux arêtes).

On peut alors faire de \mathcal{K} une opérade non symétrique en considérant les "entrées" de chaque arbre comme ses feuilles, sa sortie comme sa racine, et en agrafant la racine de t_2 à la feuille i de t_1 dans $t_1 \circ t_2$. Un espace (dans \mathcal{T}) qui est de plus une algèbre sur \mathcal{K} (ie. il existe un morphisme d'opéades non symétriques $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}nd_X$) est aussi appelé un espace A_∞ . On a alors le théorème suivant (qui est un cas particulier du théorème 3.10 énoncé dans la sous-section suivante) :

Théorème 3.7. *Un espace topologique connexe Y (qui a le type d'homotopie faible d'un CW-complexe avec un point base non dégénéré) a le type d'homotopie*

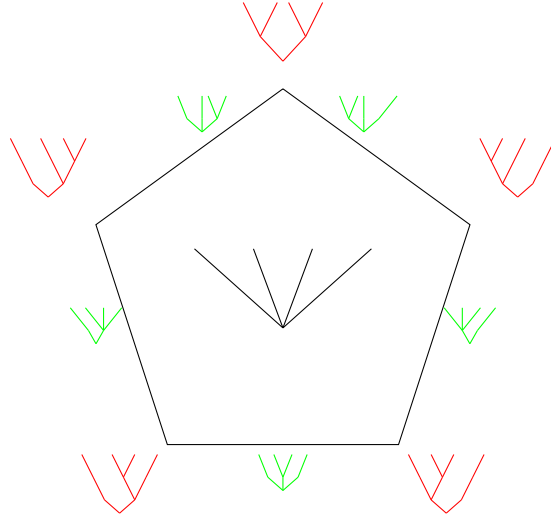


FIGURE 3.3 : \mathcal{K}_4

faible de ΩX pour un certain espace X si et seulement si il existe une structure d'espace A_∞ sur Y .

L'un des sens du théorème est facile (et c'est bien sûr l'autre sens qui est intéressant) : si $Y \sim \Omega X$, alors on peut donner une structure d'espace A_∞ sur Y . Le produit $\mu_n(T; \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ (où $T \in \mathcal{K}_n$) est défini en découpant l'intervalle I en 2 à chaque "branchement" dans T et en parcourant γ_i à la bonne vitesse sur la i -ème partie du découpage. Par exemple, pour l'arbre T correspondant à $(ab)c$, le produit serait défini comme (les lacets envoyant ∂I sur $*$, les produits sont encore continus et sont bien dans ΩX) :

$$\mu_3(T; \alpha, \beta, \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'autre sens de la preuve est plus complexe et repose sur la construction explicite d'un *espace classifiant* BY , défini comme un quotient

$$\coprod_{n \geq 0} K_{n+2} \times Y / \sim$$

(où \sim dépend des applications μ_n) et on montre que $Y \sim \Omega BY$ (nous ne rentrerons pas dans les détails).

Un théorème de Stasheff donnait un résultat similaire pour les H-espaces (l'espace X dont il est question dans le théorème est supposé être un CW-complexe). Remarquons que pour un H-espace X , $\pi_0(X)$ (l'ensemble de ses composantes connexes) peut être muni d'une structure de monoïde, le produit étant continu et envoyant donc les composantes connexes dans les composantes connexes. Si $X \sim \Omega Y$, alors le monoïde $\pi_0(X) \simeq \pi_1(Y)$ est un groupe.

Théorème 3.8. (Stasheff [6]) *Un H -espace X est un espace de lacets d'ordre 1 si et seulement si :*

- *Le monoïde $\pi_0(X)$ induit par la structure de H -espace est un groupe (on dit que X est grouplike) ;*
- *Il existe une structure d'espace A_∞ sur X .*

En particulier, si X est connexe, $\pi_0(X)$ est le *groupe* trivial, et on retrouve bien l'équivalence entre espace A_∞ et espace de lacets.

3.4 Principe de reconnaissance, k quelconque

Dans le cas k quelconque, la structure A_∞ n'est plus suffisante pour reconnaître les espaces de lacets d'ordre k ; il faut passer à la structure d'espace E_k . Ceux-ci sont basés sur la notion de *petit cube* :

Définition 3.9. *Soit I^k le cube unité standard de \mathbb{R}^k . Un **petit k -cube**⁴ est une inclusion $c : I^k \hookrightarrow I^k$ linéaire et à axes parallèles, ie. les composantes $c = (c^1, \dots, c^k)$ de c sont de la forme $c^i(t) = (y_i - x_i)t + x_i$, où $0 \leq x_i < y_i \leq 1$.*

Dans la définition, les deux points $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, \dots, y_k)$ correspondent à deux sommets diamétralement opposés du cube. Les petits k -"cubes" ne sont en fait pas forcément des cubes mais plutôt des pavés, nous continuerons néanmoins à les appeler cubes.

Nous allons considérer les espaces $E_k(n)$ des ensembles de n -uplets de petits k -cubes (c_1, \dots, c_n) tels que les images des intérieurs $c_i(I^k)$ sont deux à deux disjointes. Un élément de $E_k(n)$, aussi appelé une configuration, peut se représenter à l'aide de la figure 3.4.

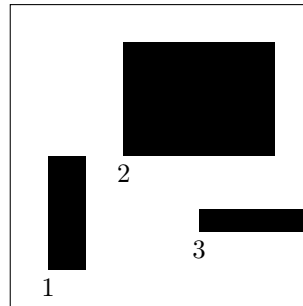


FIGURE 3.4 : Un élément de $E_2(3)$

La composition \circ_i de deux configurations $c \circ_i d$ est définie comme l'inclusion redimensionnée de d dans la i ème composante de c . Pour un exemple dans E_2 voir figure 3.5.

L'action à droite du groupe symétrique sur $E_k(n)$ consiste en la permutation des composantes de la configuration. Muni de ces données, on a alors que E_k est une opérade, appelée l'opérade des petits k -cubes. Un espace E_k est alors simplement un espace (de \mathcal{T}) qui est de plus une algèbre sur l'opérade E_k .

4. Aussi appelé petit cube de dimension k

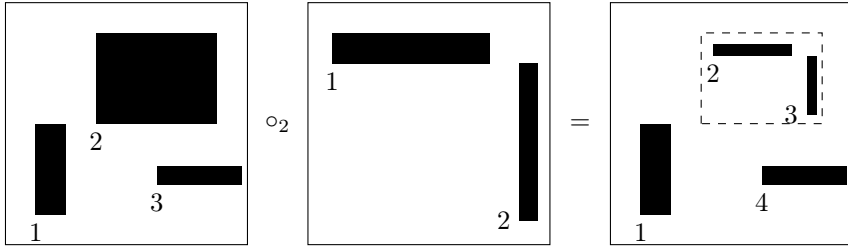


FIGURE 3.5 : Composition \circ_2 d'un élément de $E_2(3)$ par un élément de $E_2(2)$

On peut également construire l'opérade E_∞ (et on définit de même un espace E_∞) comme la limite inductive $E_\infty := \varinjlim E_k$, limite prise par rapport aux morphismes d'opérades $\iota_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$ définis par (en notant $c \times 1$ un petit $(k+1)$ -cube de base c et de hauteur 1) :

$$\iota_k(n)(c_1, \dots, c_n) = (c_1 \times 1, \dots, c_n \times 1)$$

Passons au principe de reconnaissance lui-même. Notons d'abord qu'il existe un morphisme d'opérades (non symétriques) $\mathcal{K} \rightarrow E_k$ (pour tout $k \geq 1$), et donc que tout espace E_k est un espace A_∞ (en composant simplement les morphismes $\mathcal{K} \rightarrow E_k \rightarrow \mathcal{E}nd_X$).

Si X est un espace de lacets d'ordre $k < \infty$, $X \sim \Omega^k Y$, alors il est possible de donner à X la structure d'un espace E_k . L'idée ici est, étant donné une configuration de n petits k -cubes $\mathbf{c} = (c_i)$ et de n morphismes $\gamma_i : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ (\mathbb{S}^k , la sphère de dimension k , étant vue comme le quotient $I^k / \partial I^k$, le point base étant l'image du bord), de construire un nouveau chemin $\gamma = \mu_n(\mathbf{c}; \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de la façon suivante :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_i(c_i^{-1}(t)) & \text{si } t \in c_i(\mathring{I}^k) \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

Les intérieurs des cubes d'une configuration étant disjoints, γ est bien définie. De plus, comme les γ_i préservent le point base, *ie.* envoient le bord de chaque I^k sur $*$, γ est continue. On peut visualiser ce "produit" dans la figure 3.6.

Une remarque à faire est que $E_k(2) \sim \mathbb{S}^{k-1}$. On peut en effet se ramener (par des homothéties / translations) à une configuration où le premier cube est au centre et de diamètre petit, et le deuxième cube peut alors se déplacer librement comme un point dans un espace homotope à I^k privé d'un point, c'est-à-dire \mathbb{S}^{k-1} . On peut le voir dans la figure 3.7.

On a alors le résultat suivant. On sait que $\pi_n(\Omega^k Y) \simeq \pi_{k+n}(Y)$, et donc s'il existait un autre espace X qui vérifierait $\pi_n(X) \simeq \pi_{n+k}(Y)$, on ne pourrait pas le distinguer de $\Omega^k Y$ simplement par les groupes d'homotopie ; mais l'espace $\Omega^k Y$ possède une structure supplémentaire d'espace E_k qui permet de le différencier de X (potentiellement quelconque), en regardant par exemple les images de $E_k(2) \sim \mathbb{S}^{k-1}$ par les morphismes d'opérades.

Un espace de lacets d'ordre ∞ : $X = X_0 \sim \Omega X_1 \sim \Omega^2 X_2 \sim \dots$ peut de même être muni d'une structure d'espace E_∞ en prenant, pour une configuration dans E_k et des éléments de X , le produit qui serait obtenu en regardant X

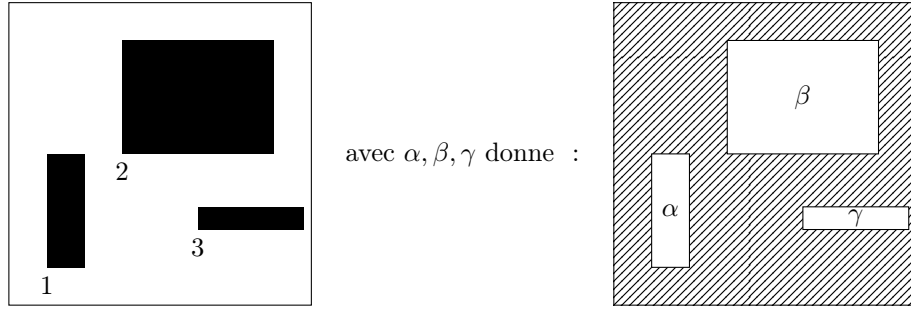


FIGURE 3.6 : Produit entre une configuration $E_2(3)$ et trois éléments de $\Omega^2 Y$. La partie hachurée est constante égale à $*$, les boîtes correspondent aux fonctions parcourues à la bonne vitesse

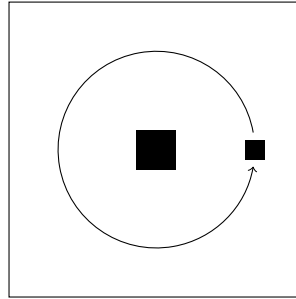


FIGURE 3.7 : $E_2(2) \sim \mathbb{S}^1$

comme $\Omega^k X_k$ (ce qui donne bien un morphisme d'opérade $E_\infty \rightarrow \mathcal{E}nd_X$). Pour être plus précis, comme l'ordre dans la limite inductive $\varinjlim E_k$ est total (c'est \mathbb{N}), on peut voir les éléments de E_∞ comme des éléments de E_k pour un certain k (dépendant de l'élément), identifiés avec leurs images par ι_k définis plus tôt, puis l'image de ι_{k+1} etc. Les lacets qui sont obtenus en identifiant un élément de E_k avec son image par ι_{k+1} sont les mêmes via l'identification $X_k \sim \Omega X_{k+1}$, donc tout ceci a bien un sens.

Le résultat principal de ce chapitre, similaire au théorème 3.7, est appelé *principe de reconnaissance* :

Théorème 3.10. (Boardman-Vogt [1], May [5]) *Pour tout $1 \leq n \leq \infty$, tout espace de lacets d'ordre k est un espace E_k et réciproquement, tout espace E_k qui est connexe a le type d'homotopie faible d'un espace de lacets d'ordre k .*

Comme pour les espaces A_∞ , l'un des sens du théorème est facile et c'est l'autre qui est intéressant. On remarque de plus que la structure E_1 n'apporte rien de plus par rapport à la structure A_∞ . En effet, découper $[0, 1]$ par dichotomie (espace A_∞ : chaque découpage en deux correspond à un branchement de l'arbre) et le découper arbitrairement en sous-intervalles (espace E_1) donne le même résultat. On pourrait développer la théorie des opérades (non symétriques) A_∞ (dont l'opérade \mathcal{K} est qu'un exemple), et le théorème 3.7 pourrait alors s'énoncer par le fait qu'un espace connexe a le type d'homotopie faible

d'un espace de lacets si et seulement c'est une algèbre sur une opérade A_∞ . Les opérades \mathcal{K} et E_1 sont des opérades A_∞ .

Comme pour les H-espaces, on a la variante suivante, qui ne suppose plus l'espace connexe mais rajoute une condition sur son π_0 . On dit qu'un espace E_k est *grouplike* si l'ensemble de ses composantes connexes, muni des produits induits par la structure d'opérade est un groupe (pour chaque produit). En effet, comme tout est continu, les $\mu_2(c, \cdot)$ (où $c \in E_n(2)$) envoient les composantes connexes dans les composantes connexes, et on a bien des applications $\pi_0(X) \times \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X)$.

Théorème 3.11. (May [5]) *Soit Y un espace E_k grouplike, $1 \leq k \leq \infty$. Alors Y a le type d'homotopie faible d'un espace de lacets d'ordre k .*

Comme pour le théorème 3.7, la preuve repose sur la construction explicite d'un espace X tel que $Y \sim \Omega^k X$ par la *construction double bar*, très similaire à celle qui est trouvée dans la preuve du premier théorème. Donnons un aperçu de la construction :

On note $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ le n -simplexe standard (Δ^0 est un point, Δ^1 un segment, Δ^2 un triangle, etc.). On note, pour un espace X , $\Sigma X = (X \times I)/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$ la suspension réduite de X : c'est la suspension usuelle de X où l'on a en plus écrasé en un point tout un segment "vertical".

Pour un espace X , on peut construire la E_k -algèbre libre sur X , notée $E_k(X)$, par :

$$E_k(X) = \coprod_{i \geq 0} (E_k(i) \times X^i / \sigma_i)$$

Où la relation σ_i donne la manière de recoller les faces des différentes parties (encore une fois nous n'entrons pas dans les détails). C'est, en un sens, la E_k -algèbre⁵ la plus "générale"⁶ contenant X .

On définit alors l'espace $B_k X$ par :

$$B_k(X) := \coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times (\Sigma^n \underbrace{E_k \circ \dots \circ E_k}_{n \text{ fois}}(X)) / \sim_k$$

Où la relation d'équivalence \sim_k dépend de la structure d'espace E_k qui existe sur X . Cet espace vérifie alors que $X \sim \Omega^k B_k X$ (ce qui n'est pas évident de prime abord).

5. Terme que nous n'avons pas défini, mais c'est, de manière simplifiée, une algèbre associative et commutative qui admet une action de E_k compatible avec la multiplication dans l'algèbre.

6. *ie.* elle vérifie une certaine propriété universelle.

Bibliographie

- [1] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [2] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Relations between homology and homotopy groups of spaces. *Ann. of Math. (2)*, 46 :480–509, 1945.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [4] Martin Markl, Steve Shnider, and Jim Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [6] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H -spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292; *ibid.*, 108 :293–312, 1963.