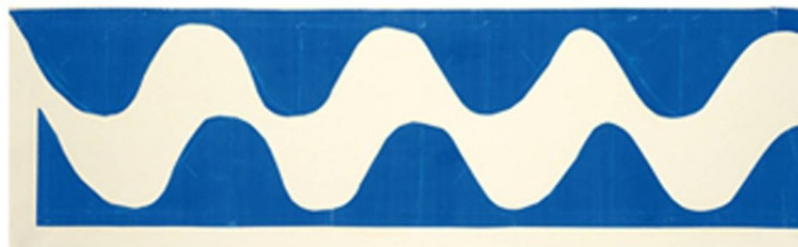


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE - PARIS
FORMATION INTERUNIVERSITAIRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES



mémoires sous les directions de: **Pierre Raphael en M2, José A. Carrillo de la Plata
en M1, Yannick Viossat en L3**

October 19, 2013

Mémoire de troisième année

Charles COLLOT



Ce mémoire vient clôturer ma troisième année à la formation interuniversitaire de mathématiques fondamentales et appliquées à l'école normale supérieure de Paris. Je remercie Pierre Raphael, José Antonio Carrillo de la Plata et Yannick Viossat pour avoir encadré mes stages de M2, M1 et L3 respectivement. Je souhaite également remercier toute l'équipe pédagogique de l'école normale supérieure, l'équipe pédagogique du M2 "Équations aux dérivées partielles et calcul scientifique" de l'université Paris-Sud, ainsi que Laurence Vincent la secrétaire de la FIMFA, pour la formation mathématique de haut-vol que j'ai reçue. Je suis enfin reconnaissant à tous ceux avec qui j'ai pu parler de mathématiques, de mes amis à ma famille en passant par les différents collègues de laboratoire que j'ai rencontrés et tous les professeurs de sciences que j'ai eus.

COLLOT Charles
Né le 13 septembre 1990 à Caen (nationalité française)

98 avenue Saint Lambert, 06100 Nice
numéro de téléphone: +33608745372
E-mail : charles.collot@ens.fr, charles.h.collot@gmail.com

Année en cours

2013 – 2014 **année de pré-thèse à Nice sous la direction de Pierre Raphael**

Etudes

- 2012 – 2013 **Deuxième année de Master de mathématiques à l'université de Paris-sud, master "équations aux dérivées partielles et calcul scientifique"**
Stage de deuxième semestre de 5 mois à l'université de Nice sous la direction de Pierre Raphael sur la formation de singularités en temps fini pour les équations aux dérivées partielles d'évolution.
- 2011 – 2012 **Première année de Master de mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure de Paris et l'université Paris-Sud**
Stage de deuxième semestre de 5 mois à l'université autonome de Barcelone sous la direction de José A. Carrillo sur les modèles mathématiques en neurosciences.
- 2010 – 2011 **Troisième année de licence de mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure de Paris**
Cours de biologie et de sciences cognitives suivis en plus du cursus de mathématiques.
- 2010 **Reçu à l'Ecole Normale Supérieure de Paris, filière "mathématiques/physique" (également admis à l'école Polytechnique)**
- 2008 – 2010 **Classes préparatoires MPSI puis MP au Lycée Malherbe de Caen**
- 2008 **Baccalauréat scientifique avec mention très bien**

Cours de deuxième année de Master suivis:

Introduction aux équations aux dérivées partielles d'évolution, M. Chemin
Equations elliptiques et calcul des variations, M. Santambrogio et M. Radu
Introduction à la théorie spectrale, M. Pankrashkine
Contrôle géométrique, M. Boscain, M. Chitour et M. Jean
Techniques d'analyse harmonique, M. Auscher
Systèmes hamiltoniens en dimension finie et infinie, M. Gerard
Méthodes mathématiques en neurosciences, M. Faugeras
Dispersion pour l'équation des ondes, M. et Mme. Ivanovici
Topics in shape optimization, M. Buttazzo

Séminaires auxquels j'ai participé:

GDR EDP Biarritz 2013

Workshop "non linear waves" Lisbonne 2013

Workshop "blow-up, dispersions and solitons" Nice 2013

Séminaire hebdomadaire du groupe Analyse et Géométrie à l'université de Nice

Séminaire hebdomadaire du groupe EDP et calcul numérique à l'université de Nice

Séminaire hebdomadaire analyse et EDP à l'université autonome de Barcelone

Séminaire hebdomadaire du groupe de recherche en neurosciences à IDIBAPS (Barcelone)

Divers

langues vivantes :

Anglais: Très bon niveau à l'écrit et à l'oral, nombreux séjours à l'étranger et en particulier dans des pays anglophones (langue vivante 1).

Espagnol: Bonne pratique des bases à l'oral et à l'écrit, due à un séjour de 5 mois en Espagne accompagné d'un cours intensif.

Portugais: Bonne pratique des bases à l'oral et à l'écrit, due à un séjour de 1 mois et demi au Brésil et de la connaissance de l'espagnol qui a permis un apprentissage plus rapide.

Allemand: Niveau de base à l'écrit et à l'oral (langue vivante 2).

Chinois: Quelques restes de trois ans de cours au lycée (langue vivante 3).

Maîtrise d'outils technologiques :

Maîtrise de \LaTeX .

Programmation en Python.

Expériences professionnelles :

En 2008 travail d'été d'un mois dans une filiale d'architecture du groupe BNP Paribas.

Centres d'intérêts:

Footing et natation de manière régulière.

Pratique du piano.

Ancien responsable du club de musique de mon école (gestion de la salle de répétition).

Ancien membre de l'association d'écologie de l'école.

Contents

I	Présentation du domaine de recherche: formation de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires	7
0.1	Introduction	8
0.2	En dimension finie	9
0.3	En dimension infinie: les EDP d'évolution	10
0.4	Les enjeux du domaine actuellement et quelques repères historiques	12
0.5	Présentation des éléments de réponses et nouvelles problématiques	12
0.6	notations et annexe	16
II	Mémoire de M2: formation de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires	18
1	Introduction et Motivations	19
2	Présentation des équations étudiées	21
2.1	L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) focalisante sur \mathbb{R}^n	21
2.2	L'équation de la chaleur non linéaire sur \mathbb{R}^n	22
2.3	Le flot de la chaleur harmonique entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{S}^2	23
2.3.1	Explication et dérivation de l'équation	23
2.3.2	Propriétés, origines physique et mathématique	24
3	Théorie de Cauchy	26
3.1	(NLS)	26
3.2	Equation de la chaleur non linéaire	26
3.3	(HHF)	27
4	2 comportements particuliers lors d'une existence globale: le scattering et les solutions périodiques (solitons)	28
4.1	Les solitons et les solutions auto-similaires	29
4.1.1	La famille de solutions stationnaires de (HHF)	29
4.1.2	(NLH)	31
4.1.3	La famille de solitons de (NLS)	31
4.2	Le scattering, avec pour exemple (NLS)	32

5	Existence d'explosions	37
5.1	Intuition de l'explosion, étude de l'équation différentielle ordinaire donnée par la non-linéarité	37
5.2	Utilisation de fonctionnelles: explosion pour (NLH) sur un ouvert borné et (NLS)	38
5.2.1	Existence d'explosions pour (NLH) sur un ouvert borné	38
5.2.2	L'argument du viriel pour (NLS)	39
5.3	Utilisation de propriétés spécifiques à l'équation: le caractère parabolique	40
5.4	Explosion des solutions positives de (NLH) sur \mathbb{R}^N	42
6	Distinction des régimes explosifs de type I et type II, analyse du type I pour (NLH)	45
6.1	Philosophie des explosions de type II	45
6.2	Explosion de type I pour (NLH)	46
7	Analyse des explosions de type II	48
7.1	Existence de profils asymptotiques pour une explosion de type II	48
7.1.1	(NLS) L^2 -critique et L^2 -sous-critique	48
7.1.2	(HHF)	53
7.1.3	(NLH)	53
7.2	Analyse de la dynamique près de la famille de solitons, existence et non-existence de solutions explosives	53
7.2.1	Intuition avec le comportement en dimension finie	54
7.2.2	Impossibilité de l'explosion pour (HHF) pour $k > 1$	55
7.2.3	Explosion pour $k = 1$	57
8	Conclusion, perspectives et la question du portrait de phase	59
III	Mémoire de M1: étude mathématiques de modèles en neurosciences	60
9	Compte-rendu du déroulement du stage	61
10	Mémoire de stage	65
10.1	introduction	65
10.1.1	Avant propos	65
10.1.2	introduction au modèle étudié dans ce mémoire	65
11	étude du problème déterministe et insertion du bruit	68
11.1	étude préliminaire	68
11.2	étude d'un cas particulier	71
11.3	étude du problème avec bruit	75
11.3.1	modélisation du bruit	75
11.3.2	étude de la dynamique bruitée	77
11.3.3	étude du cas particulier avec ajout du bruit	78
12	Etude de l'évolution de la densité de probabilité	81
12.1	étude du problème sur un ouvert borné régulier	81
12.2	Le problème stationnaire	82
12.2.1	Formulation et résultat	82

12.2.2	Deux preuves	83
12.3	Analyse du problème d'évolution	90
12.4	Propriétés des trajectoires et analyse de la convergence vers l'état stationnaire	95
12.4.1	résultats montrés "de manière intuitive" et trou spectral	96
12.4.2	utilisation de méthodes d'entropie	101
13	Annexe	107
13.1	théorèmes de point fixe utilisés	107
13.2	théorème de Krein-Rutman	107
13.3	Dérivée faible sur un espace de Banach	112
13.4	quelques notions sur les semi-groupes	114
13.4.1	théorie spectrale pour les opérateurs fermés	115
13.4.2	théorie spectrale pour les générateurs	118
13.4.3	Spectral mapping theorems pour les semi-groupes fortement continus	118
13.4.4	stabilité et hyperbolicité des semi-groupes	120
IV	Mémoire de M1: L'évolution supprime-t-elle les comportements irrationnels?	
123		
13.5	Introduction et notations	124
13.6	Elimination de stratégies strictement dominées	128
13.7	Survie de stratégies strictement dominées	135
13.8	Outils	143
13.8.1	Théorie générale	143
13.8.2	Attracteurs	145
13.8.3	Stabilité asymptotique et fonctions de Liapunov	149
13.8.4	Théorème de Poincaré-Bendixon	152
13.9	Conclusion	157

Part I

Présentation du domaine de recherche: formation de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires

0.1 Introduction

Les questions simples n'admettent pas toujours de réponses qui le soient également. La problématique fondamentale du domaine de recherche que nous présentons ici est facile à comprendre, mais nous verrons il reste encore beaucoup de problèmes ouverts.

Les équations aux dérivées partielles d'évolution (EDP d'évolution) représentent la manière dont un élément évolue avec le temps. D'un point de vue physique, cet élément (souvent une fonction) représente une certaine quantité, et le phénomène qui la fait évoluer est décrit par cette EDP. La notation suivante est adoptée:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = F(u) \\ \text{conditions aux bord} \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

La première ligne représente l'évolution temporelle de la fonction $u(t)$. La deuxième rend compte d'éventuelles conditions de compatibilité que $u(t)$ doit vérifier (par exemple on peut laisser évoluer la température dans un objet tout en la fixant à la frontière de celui-ci). La troisième signifie que l'on connaît la valeur de $u(t)$ à l'instant initial $t = 0$.

La question fondamentale est celle de la résolubilité. Si u_0 est donnée, existe-t-il une solution $u(t)$ au problème, qui soit égale à u_0 à $t = 0$ et vérifie les conditions au bord (La notion de solution étant complexe, elle n'est pas détaillée ici)? Souvent, on sait montrer l'existence locale: $u(t)$ est une solution de l'EDP mais pour des temps petits: $t \in 0 \leq t < T$. On peut également se demander si cette solution est unique, et si elle dépend continûment de la donnée initiale.

Définition 0.1.1. On dit que l'EDP d'évolution est bien posée dans l'espace de Banach X si:

existence Pour tout $u_0 \in X$, il existe $T(u_0) > 0$ et $u(t)$ une solution sur $[0, T(u_0)[$ avec $u(0) = u_0$ et pour tout $t \in [0, T(u_0)[$, $u(t) \in X$.

unicité Si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions issues de u_0 sur $[0, T_1[$ et $[0, T_2[$ respectivement, alors $u_1 = u_2$ sur $[0, \min(T_1, T_2)[$

continuité Une solution $u(t)$ sur $[0, T[$ est continue de $[0, T[$ dans X . De plus si $u_n \xrightarrow[X]{} u_0$ alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(u_n) \geq T(u_0)$ et pour tout $t \in [0, T(u_0)[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} \|u_n(s) - u(s)\|_X = 0$ où $u_n(t)$ est la solution issue de u_n .

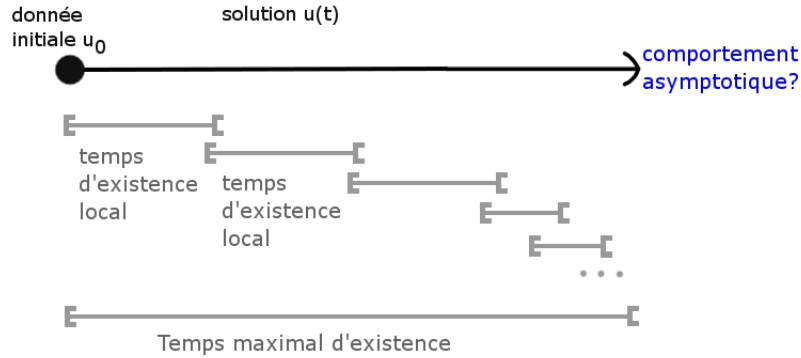
Définition 0.1.2. Le temps maximal d'existence d'une solution issue de u_0 , noté $T^*(u_0)$ est défini par:

$$T^*(u_0) = \sup\{T > 0 / \exists u(t) \text{ une solution issue de } u_0 \text{ sur } [0, T[\}$$

On dit qu'il y a explosion lorsque $T^*(u_0)$ est fini. On dit que la solution est globale lorsque $T^*(u_0) = +\infty$

Par unicité, il existe alors une unique solution maximale, toujours notée $u(t)$ définie sur $[0, T^*(u_0)[$. On peut voir cette solution maximale comme étant des solutions locales mises bout à bout.

Une question naturelle est alors: le temps maximal d'existence de la solution est-il fini ou infini? On peut également se demander quel est le comportement de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow T^*(u_0)$.



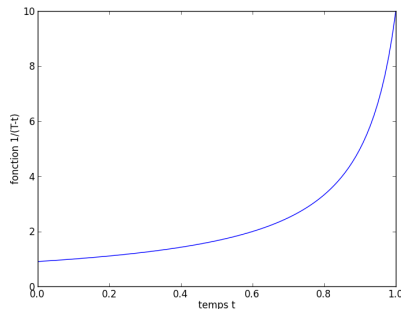
0.2 En dimension finie

Commençons par rappeler quelques résultats en dimension finie. Cela donnera une intuition du phénomène et pourra être comparé aux résultats qui suivent concernant les EDP d'évolution. On s'intéresse à l'équation différentielle ordinaire (EDO):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz. On sait alors que cette EDO est bien posée dans \mathbb{R}^n .

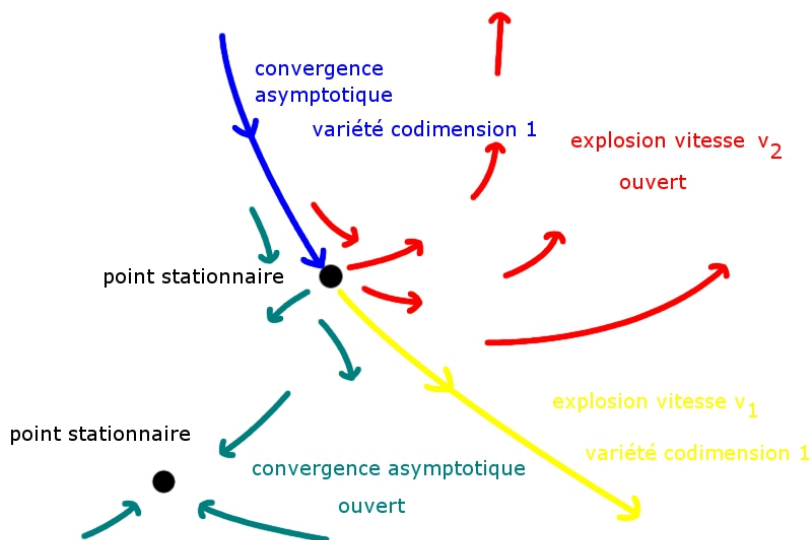
Si F est une application linéaire, alors la solution du problème s'écrit: $x(t) = e^{tF}(x_0)$. On a donc existence globale. Les explosions pour les EDO sont donc un phénomène non-linéaire. L'exemple typique est l'équation $\frac{d}{dt}x = x^p$ pour $p > 1$ et x positif. La solution s'écrit alors sous la forme $x(t) = \frac{C}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}$ où C et T dépendent de x_0 , T étant clairement le temps maximal d'existence.



Dans le cas général, x explose au temps T si $\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow T]{} +\infty$ pour n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^n (sinon par compacité il y aurait un point limite x_T avec lequel on pourrait prolonger la solution).

Les questions classiques sont alors: quel est le comportement asymptotique de $x(t)$? A quelle vitesse la norme $\|x(t)\|$ tend-elle vers $+\infty$? En couplant cette étude des explosions à l'étude des autres phénomènes possibles (solutions stationnaires, périodiques, stabilité etc...), on veut pouvoir dresser le portrait de phase de l'équation. C'est-à-dire caractériser les ensembles de données initiales amenant à chacun des comportements possibles.

Afin d'éclairer un lecteur néophyte, voici un exemple de portrait de phase pour une EDO:



0.3 En dimension infinie: les EDP d'évolution

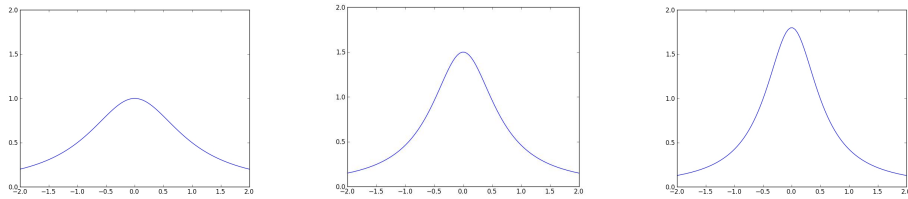
Certains aspects de la dimension finie s'adaptent, mais d'autres problématiques voient le jour. Dans la suite, les espaces de Banach dans lesquels on étudie les solutions sont des espaces de fonctions sur des ouverts de \mathbb{R}^n .

Les explosions sont là aussi un phénomène non-linéaire. Si une équation linéaire est bien posée au sens donné dans la section 0.1, il est assez aisé de voir que toutes les solutions sont globales.

Les normes ne sont plus équivalentes entre elles. L'espace fonctionnel sur lequel on se place pour étudier les solutions influence l'existence de certains phénomènes. Par exemple, certains espaces possèdent des solutions stationnaires et d'autres non. Il faut donc trouver la topologie adéquate pour étudier les explosions. Celle-ci est donnée par la notion d'énergie. Souvent les EDP en physique comme en mathématiques sont intimement reliées à certaines fonctionnelles sur des espaces de fonction. C'est le cas notamment des systèmes hamiltoniens ou bien des flots de gradients de fonctionnelles. Il existe le plus souvent un espace de

Banach où la fonctionnelle en question est naturellement définie: c'est sur cet espace et avec sa topologie que l'on souhaite étudier les explosions. Les trois équations présentées dans la partie 0.5 possèdent ainsi un espace d'énergie naturel.

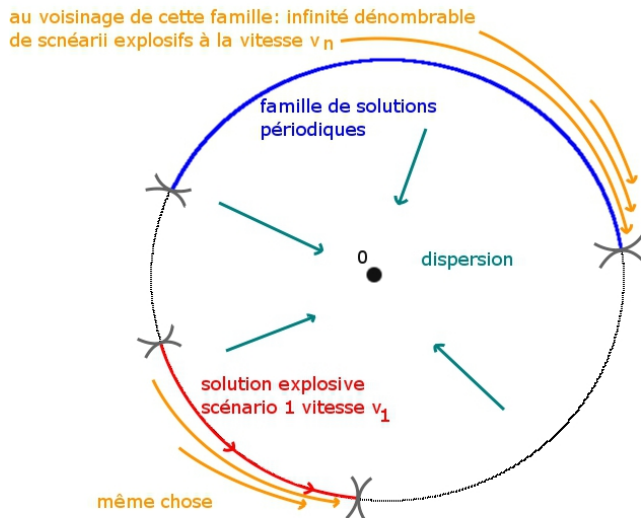
La compacité des suites bornées est également fautive en dimension infinie. La solution peut alors exploser sans que sa norme, elle, n'explose. Dans les espaces L^p , cette perte de compacité pour $u(t)$ peut s'expliquer par la concentration d'un profil en un point par exemple.



concentration d'un profil à norme L^2 constante

Nous sommes en train de voir que les scénarii explosifs peuvent être très différents les uns des autres: on veut pouvoir les classifier. Puis, on souhaite savoir comment évoluent asymptotiquement les paramètres liés à cette explosion (normes, paramètre d'échelle si concentration d'un profil, ensemble de points au voisinage desquels une énergie se concentre). Une fois que l'on a bien compris les phénomènes explosifs et décrit les ensembles de données initiales les engendrant, il reste à coupler cette étude avec les études d'autres phénomènes (dispersion, solutions stationnaires etc...) afin de dresser le portrait de phase de l'équation. En voici un exemple (la distance au centre représente la norme):

pour une masse plus grande: plusieurs combinaisons de ces comportements sont possibles



X perte de compacité

0.4 Les enjeux du domaine actuellement et quelques repères historiques

philosophie du domaine en ce moment A l'heure actuelle, les recherches portent sur:

- Des équations non-linéaires assez simples. Les explosions sont pour l'instant toujours difficiles à traiter, les équations de la mécanique des fluides sont donc peu abordées.
- La mise au jour de phénomènes généraux. Les explosions semblent en effet posséder une certaine structure, notamment dans la manière dont peuvent se concentrer les solutions. Nous verrons que la concentration de l'énergie en un point est liée à la concentration d'un profil spécifique, et que ceci se retrouve dans toutes les équations étudiées. L'article écrit par Martel et Raphael pour la gazette des mathématiciens [?] est une bonne introduction à ce sujet. Ce problème du comportement de l'énergie d'une solution est lié à l'évolution (la croissance) des normes de Sobolev pour la solution d'une EDP d'évolution non-linéaire, dont on peut citer en référence les travaux de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao [?] par exemple.
- La mise au point de techniques robustes. Les équations étudiées peuvent être paraboliques, hyperboliques... Mais il ne faut pas que les outils dépendent des propriétés particulières de celles-ci.

quelques notions d'histoire Le problème de savoir si une EDP d'évolution admet ou non des solutions explosives est un vieux problème. L'exemple le plus connu est celui des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides. Dans les années 30, Leray prouve l'existence locale de solutions à ces équations [?]. En dimension 2, soit un fluide dans le plan, les solutions sont en fait globales. En dimension 3 en revanche, il conjecture qu'il existe des profils explosifs particuliers et d'énergie bornée: des solutions auto-similaires. Nečas, Růžička et Šverák ont prouvé dans les années 90 [?] que de telles solutions explosives n'existent pas. A l'heure actuelle, l'existence de solutions explosives est toujours un problème ouvert, mis à prix par le Clay Institute. La description du problème par Fefferman [?] pour cet institut est une bonne introduction.

Les explosions attirent l'attention dans la seconde partie du XXe siècle. Dans les années 60 et 70, des mathématiciens (Ball, Fukita, Glassey...) sont capables de prouver l'existence de solutions explosives. Ils utilisent notamment des arguments d'obstruction (une quantité liée à la solution tend vers $+\infty$ en temps fini, nous en reparlerons plus loin). Puis dans les années 70 et 80 débute vraiment la compréhension des phénomènes explosifs avec les travaux d'Alinhac et de John notamment. De nos jours ce domaine est devenu très actif et il y a un grand nombre de résultats récents concernant toute une palette d'EDP d'évolution.

0.5 Présentation des éléments de réponses et nouvelles problématiques

EDP étudiées Des résultats concernant beaucoup d'équations seront cités dans la suite. Le but n'est pas de faire une zoologie mais plutôt de mettre l'accent sur l'aspect universel de la problématique et de la démarche. Les trois équations qui reviendront le plus souvent sont l'équation de la chaleur non-linéaire (NLH), l'équation des ondes non-linéaires focalisante (NLW) et l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante (NLS), toutes sur \mathbb{R}^n . Elles s'écrivent:

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u + |u|^{p-1}u & (NLH) \\ & i\Delta u + i|u|^{p-1}u & (NLS) \\ \partial_{tt} u &= \Delta u + |u|^{p-1}u & (NLW) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

où $p > 0$. Nous utiliserons dans le cas général la notation $\partial_t u = F(u)$ lorsque l'on ne voudra pas faire référence à une EDP d'évolution en particulier. Ce sont des prototypes d'équations non-linéaires obtenus en ajoutant une non-linéarité la plus simple possible: une puissance, à une équation linéaire étudiée et relativement bien comprise depuis longtemps.

Les fonctionnelles liées à ces EDP sont les suivantes. Pour (NLH), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ est une quantité décroissante le long des trajectoires. Pour (NLW), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int |\partial_t u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ est constante le long des trajectoires. Pour (NLS), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ et la norme L^2 , $(\int |u|^2)^{\frac{1}{2}}$ sont constantes le long des trajectoires.

Ces fonctionnelles sont bien définies sur \dot{H}^1 lorsque p est sous-critique ou critique vis à vis de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1 \rightarrow L^{p+1}$. Dans la suite du papier ces équations seront étudiées dans $u \in H^1 \cap L^\infty$ pour (NLH), $(u, \partial_t u) \in \dot{H}^1 \times L^2$ pour (NLW) et $u \in H^1$ pour (NLS). Pour p sous-critique ou critique, ces équations sont bien posées dans ces espaces fonctionnels. Dans la suite, nous ferons référence à eux en tant qu'"espaces d'énergie".

Ces trois équations admettent une invariance d'échelle. Pour tout $\lambda > 0$ on note $u_\lambda : x \mapsto \lambda^{\gamma(n,p)} u(\lambda x)$. Alors pour chacune des équations, il existe un exposant $\gamma(n,p)$ tel que si u est la solution issue de u_0 , alors $u(\lambda t)_\lambda$ est la solution issue de $(u_0)_\lambda$. On pose alors $\Lambda(u) = \frac{d}{d\lambda}(u_\lambda)|_{\lambda=1}$.

existence d'explosion Montrer l'existence de solutions explosives à ces EDP d'évolution (et à d'autres EDP d'évolution non-linéaires étudiées dans le domaine actuellement) n'est en général pas le plus compliqué.

Parfois on connaît des solutions explosives explicites. Par exemple, la fonction constante égale à 1 explose pour (NLW). En prenant comme condition initiale une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 sur une boule assez large, on obtient une solution explosive à cause de la vitesse finie de propagation de (NLW), et qui est dans n'importe quel espace fonctionnel usuel.

On peut également utiliser une fonctionnelle bien choisie $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ (où X est l'espace sur lequel l'équation est bien posée), telle que G tende vers $+\infty$ en temps fini pour certaines solutions, qui sont alors explosives. Pour (NLS) par exemple, la quantité $1/(\| |x|u(t) \|_{L^2})$ tend vers $+\infty$ en temps fini dans certains cas [?].

rôle des termes de l'équation Pour (NLH) et (NLW), on peut se demander si l'explosion n'est pas due simplement à la non-linéarité. C'est le cas parfois, par exemple si l'exposant p est sous-critique pour (NLH), Merle et Zaag ont montré dans [?] que toutes les solutions se comportaient asymptotiquement comme les solutions de l'EDO $\frac{d}{dt}u = u^p$.

En général l'explosion provient de la contribution des deux termes, linéaires et non linéaires. Pour (NLS)

le constat est simple: la partie non-linéaire seule $\frac{d}{dt}u = i|u|^{p-1}u$ ne mène pas à une explosion, et la partie linéaire seule évidemment non plus.

Il s'agit donc de comprendre comment ces deux termes peuvent interagir. Nous allons donc dans la suite étudier des solutions à symétrie radiales. Cette symétrie enlève des difficultés techniques, et donne une symétrie aux explosions (symétrie radiale d'un éventuel profil limite, idem pour l'ensemble des points au voisinage desquels l'énergie se concentre).

les solitons L'interaction la plus simple entre la partie linéaire et la partie non linéaire est la possibilité d'avoir d'un profil stationnaire ou périodique. Pour certaines dimensions n et exposants p on a les résultats suivants:

- (NLS) admet une famille de solutions périodiques qui sont dans l'espace d'énergie. (une démonstration est disponible dans [?]).
- (NLW), (NLH) et (NLS) admettent une famille (la même) de solutions stationnaires. Cependant, elle n'est dans l'espace d'énergie que pour (NLW).

Ce sont les premiers objets non-linéaires identifiables, souvent appelés solitons. Ce sont des profils qui ne sont pas altérés par l'EDP d'évolution. Ils sont obtenus en résolvant l'équation elliptique associée au problème: $F(Q) = 0$ ou $F(Q) = iQ$. Cette partie fait donc intervenir des outils et idées du calcul des variations, notamment en théorie des équations elliptiques, et des EDO (car dans le cas radial ces EDP se transforme en EDO).

profils asymptotiques Essayons d'avoir une intuition du phénomène avec (NLH). Si l'on considère une donnée initiale radiale positive u_0 qui atteint un maximum local strict en 0. Alors pour des temps courts, la valeur $u(t, 0)$ va croître plus vite qu'en les autres points au voisinage, mais elle va aussi être diffusée dans ce même voisinage. $u(t)$ va donc conserver le fait que 0 est un maximum local. Supposons que $u(t, 0)$ explose au temps T . On veut alors savoir à quoi ressemble $u(t, x)$ pour (t, x) suffisamment proche de $(T, 0)$: en zoomant, peut-on voir un profil asymptotique?

Essayons un raisonnement un peu plus rigoureux avec (NLW): on suppose que u explose, mais que $\int |\nabla u|^2$ reste borné. La perte de compacité de $\nabla u(t)$ dans L^2 lorsque $t \rightarrow T^*$ s'explique alors par dilatation, translation ou concentration. Comme (NLW) admet une vitesse de propagation finie, la dilatation et la translation sont donc impossibles: la solution se concentre. En considérant une solution radiale, celle-ci se concentre forcément à l'origine.

Effectuons maintenant un calcul formel. L'existence d'un profil asymptotique pour u se traduit alors par le fait qu'il existe $\lambda(t)$ un paramètre, avec $\lambda(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} \lambda(t) = 0$ et un profil ϕ tel que: $u_{\lambda(t)} \xrightarrow{t \rightarrow T} \phi$. Supposons $\lambda(t)$ différentiable. Après calculs, l'équation vérifiée par $u_{\lambda(t)}$ est alors sous la forme:

$$\partial_t(u_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\gamma_1}} F(u_\lambda) + \frac{1}{\lambda^{\gamma_2}} \frac{d}{dt}(\lambda) \Lambda(u_\lambda)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. On peut supposer que $\partial_t(u_\lambda)$ reste borné car $u_{\lambda(t)}$ converge, que $F(u_\lambda) \rightarrow F(\phi)$ et $\Lambda(u_\lambda) \rightarrow \Lambda(\phi)$. Comme $\lambda \rightarrow 0$ il faut des conditions sur $F(\phi)$, $\Lambda(\phi)$ et $\frac{d}{dt}\lambda$ pour que le membre de droite n'explose pas. On obtient ainsi les alternatives suivantes:

profil auto-similaire Si asymptotiquement $\frac{d}{dt}\lambda(t) \sim -\lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$, ce qui implique à la limite que $F(\phi) = K\Lambda(\phi)$ ou K est une constante de proportionnalité. ϕ est donc un profil explosif en lui-même, puisqu'alors la solution de l'EDP issue de $u_0 = \phi$ est de la forme $u(t) = \phi_{\frac{1}{\lambda}}$ avec $\lambda \rightarrow 0$. De plus, λ vérifie $\frac{d}{dt}\lambda = -\lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$. Cette EDO est bien connue, et on connaît donc le comportement asymptotique de λ . Cette solution étant juste un profil auquel on fait subir un changement d'échelle, on l'appelle solution auto-similaire. De telles solutions sont obtenues en résolvant l'EDP $F(u) = K\Lambda(u)$.

profil asymptotique stationnaire Si la condition précédente n'est pas vérifiée, pour ne pas que le membre de droite n'explose il y a deux possibilités. Si $\frac{d}{dt}\lambda \gg \lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$ alors ϕ vérifie à la fois $F(\phi) = 0$ et $\Lambda(\phi) = 0$: ϕ est un profil stationnaire de l'équation qui ne voit pas les changements d'échelles. Si $\frac{d}{dt}\lambda \ll \lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$ alors là encore $F(\phi) = 0$, ϕ est donc un profil stationnaire de l'équation.

Pour résumer ce calcul formel: on vient de distinguer le régime explosif auto-similaire, une solution qui s'auto-concentre avec un paramètre d'échelle admettant une vitesse précise, et d'autres régimes explosifs éventuels, ayant une vitesse de concentration différente.

Bien sûr, la concentration de plusieurs profils à des échelles différentes est possible. Et bien sûr, les vraies démonstrations de l'existence de profils asymptotiques sont plus compliquées que ce calcul formel. Un exemple de théorème de ce genre est établi dans [?] par Duyckaerts, Kenig et Merle:

Théorème 0.5.1. *On considère (NLW) sur \mathbb{R}^3 , avec $p = p^* - 1 = 4$. Soit u une solution telle que: u est radiale, explosive, et la quantité $\int |\nabla u|^2 + \int |\partial_t u|^2$ reste bornée. Alors u se décompose asymptotiquement en la somme d'une partie non singulière v et d'un nombre fini de solutions stationnaires de (NLW) à des échelles distinctes.*

dynamique près de la famille de solitons Nous venons d'expliquer pourquoi les solitons sont au coeur de la concentration de l'énergie et du phénomène explosif: ils sont les profils asymptotiques de certaines solutions explosives. Mais en eux même ils sont des solutions globales. On remarque que ces familles sont invariantes par changement d'échelle: en notant Q un de leurs éléments, pour $\lambda > 0$ Q_λ est encore une solution stationnaire ou périodique. On veut donc savoir si l'EDP d'évolution permet de remonter la branche $(Q_\lambda)_{\lambda>0}$ vers $\lambda = 0$, ce qui correspond au fait de faire exploser une bulle de soliton. Cette question est très importante et l'étude de la dynamique de ces EDP d'évolution autour des familles de solitons est actuellement très active.

Stabilité

On veut déterminer si en partant près de la famille de solitons, on reste près de cette famille de solitons. C'est parfois le cas, voici pour exemple le théorème de stabilité orbitale de la famille de solitons pour (NLS) L^2 -sous critique [?]:

Théorème 0.5.2. *On considère (NLS), on suppose $n \geq 1$ et $1 < p \leq 1 + \frac{4}{n}$. On note Q un élément de la famille de solitons.*

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \delta(\epsilon)$, alors pour tout $t < T^$ il existe $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}$ tels que:*

$$\|u(t, x) - Q(x - x(t))e^{i\gamma(t)}\| \leq \epsilon$$

explosion par concentration d'un soliton

La concentration d'un soliton est-elle possible? Comme l'on sait que l'énergie est conservée ou décroissante, le cas conceptuellement le plus simple est celui énergie critique. Cela signifie que l'exposant $p = p_c$

est tel que les changements d'échelle n'affectent pas l'énergie: $\int |\nabla u_\lambda|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u_\lambda|^{p+1} = \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$. Pour ces trois équations $p_c = p^* - 1$ où p^* est l'exposant critique des injections de Sobolev. On veut alors savoir si en partant au voisinage de la famille de solitons $(Q_\lambda)_{\lambda>0}$ dans la topologie de l'espace d'énergie, on peut remonter cette branche avec $\lambda \rightarrow 0$ en temps fini.

Schweyer a montré par exemple récemment [?]:

Théoreme 0.5.3. *On considère (NLH) sur \mathbb{R}^4 , avec $p = p^* - 1$. Alors il existe des solutions explosives concentrant un soliton aussi proches que l'on veut de la famille de solitons. De plus le paramètre λ admet l'asymptotique:*

$$\lambda(t) \sim \frac{T^* - t}{\log(T^* - t)^2}$$

Portrait de phase

On a pas toujours stabilité de la famille de solitons. Dans ce cas là il est intéressant de dresser la liste de tous les comportements possibles près de cette famille. Par la suite, on veut également pouvoir caractériser topologiquement les ensembles de données initiales amenant à chacun des comportements possibles. L'identification des comportements au voisinage de la famille de soliton a récemment été accomplie par Martel, Merle et Raphael pour l'équation de Korteweg de Vries généralisée [?]:

Théoreme 0.5.4. *Il existe un voisinage V de la famille de solitons tel que pour tout $u_0 \in V$ on soit forcément dans l'un des trois scénarii suivants:*

sortie *la solution u sort de V en temps fini*

explosion *la solution u concentre un soliton*

convergence *la solution u converge asymptotiquement vers un soliton.*

problématiques liées La liste des thématiques d'études présentée précédemment n'est pas exhaustive. On peut s'intéresser au cumul de certains comportements. Par exemple Merle montre dans [?] que l'on peut concentrer k solitons en k points de \mathbb{R}^n . Il est également intéressant de se demander si les résultats établis plus haut sont résistants à des perturbations de l'EDP d'évolution, comme des perturbations de la métrique, des perturbations de la non-linéarité. Dans [?] par exemple les auteurs s'intéressent à cette problématique. Enfin, la concentration de l'énergie peut se produire sur un ensemble de points plus complexe qu'un singleton. Dans [?] Raphael montre l'existence d'une explosion sur une sphère.

0.6 notations et annexe

Définition 0.6.1. *On note $a(t) \ll b(t)$ si $\lim_{t \rightarrow T} \frac{a(t)}{b(t)} = 0$*

Définition 0.6.2. *L^p désigne l'espace de Lebesgue usuel, H^1 l'espace de Sobolev usuel. $\dot{H}^1 = \{u \text{ distribution, } \nabla u \in L^2\}$ muni de la norme $\|u\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$.*

Lorsque nous avons évoqué la vitesse de propagation finie de (NLW) c'est par rapport au résultat suivant:

Théoreme 0.6.1. Soit $B := B(x_0, R)$ la boule de centre x_0 de rayon R . On pose K le cône défini par:
 $K = \{(t, x), 0 \leq t \leq R \text{ et } |x - x_0| \leq R - t\}$.

On suppose que u et v sont deux solutions lisses de (NLW) de temps d'existence au moins égal à R , issues respectivement de u_0 et v_0 .

Alors si $u_0 = v_0$ sur B , $u = v$ sur K .

Part II

Mémoire de M2: formation de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires

Chapter 1

Introduction et Motivations

Les termes et notions utilisés dans cette introduction ne sont pas toujours mathématiquement rigoureux ou pertinents. Ceci est destiné à faciliter la compréhension des lecteurs peu familiers avec le domaine. Les autres, en revanche, verront facilement quels concepts fondamentaux des EDP se cachent derrière les formulations utilisées.

Les équations aux dérivées partielles d'évolution proviennent de modèles physiques mais également de problèmes purement mathématiques. Grossièrement parlant, elles décrivent l'évolution d'une "quantité" (température, densité de particules etc...), définie sur un ensemble continu (barre de métal, espace entier) localement en temps. C'est à dire, si l'on se donne une fonction représentant cette quantité au temps t , l'équation nous indique comment elle doit évoluer à ce même instant t .

La première question à se poser est la suivante. On suppose qu'une certaine fonction est donnée, représentant cette quantité au temps initial. Est-ce qu'il existe une seconde fonction, dépendant du temps maintenant, qui à l'instant initial est égale à la première, et dont l'évolution est conforme à l'équation considérée? C'est à dire, étant donné un état initial du système physique, est-ce que l'on peut trouver un système physique dépendant du temps, qui évolue conformément au phénomène étudié, et qui initialement soit égal au système donné? Si la réponse est oui, on appelle alors cette fonction dépendant du temps une solution. La seconde question est: est-ce que cette solution est unique? A une fonction initiale donnée, celle-ci a-t-elle plusieurs manières d'évoluer, chacune étant conforme à l'EDP? Dans un langage physique, l'équation est-elle déterministe: le système physique évolue-t-il de manière unique? Ceci est la formulation non mathématique de ce que l'on appelle la théorie de Cauchy pour une équation. Ces deux questions sont très intéressantes, la réponse est souvent difficile à donner, et il existe beaucoup de problématiques liées (dépendance de la solution vis-à-vis de la condition initiale, régularité des trajectoires etc...)

Lorsque l'on a traité ces deux questions (et répondu par l'affirmative), à chaque donnée initiale on peut donc associer une unique solution. On peut alors étudier plus finement chaque solution et chercher à décrire son comportement. Existe-t-il des solutions spéciales, car stationnaires, périodiques, ou autres? En temps long à quoi ressemble la solution? Pour faire court: la théorie de Cauchy c'est dire que le problème a un sens, et ensuite on veut savoir de manière précise ce que deviennent les solutions. Dans ce mémoire on va principalement s'intéresser à ces nouvelles questions. La théorie de Cauchy sera quand même examinée

pour le rendre accessible à un lecteur néophyte.

La problématique suivante va spécialement retenir notre attention. Lorsque l'on se donne une donnée initiale, et que l'on construit une solution à partir de celle-ci, cette solution est locale en temps. C'est-à-dire, cette solution donnée par la théorie de Cauchy existe un peu après l'instant initial. On peut alors se demander pour combien de temps la solution existe-t-elle. Cette solution peut exister indéfiniment, ce qu'on appellera existence globale. Mais il peut se produire en temps fini un phénomène amenant cette solution à ne plus exister ultérieurement. L'exemple classique est l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d}{dt}u = u^2, \quad u(0) = 1$$

dont la solution est $u(t) = \frac{1}{1-t}$, qui explose (tend vers $+\infty$) au temps $t = 1$. Lorsqu'un tel phénomène existe pour une EDP d'évolution, on le qualifie également d'explosion, ou de formation de singularité.

Nous verrons dans ce mémoire que pour les équations considérées, il existe plusieurs comportements possibles. Il y a des solutions particulières (périodiques ou stationnaires), les solitons. Nous verrons également qu'il existe des explosions, et que ces solitons jouent un rôle dans la formation de ces singularités. Enfin, parfois la solution peut être dispersée, comme ce sera le cas pour l'une des équations considérées, l'équation de Schrödinger non linéaire. Mettre au jour l'existence de ces divers comportements relève du qualitatif. L'étape d'après est de caractériser les données initiales amenant à chacun des phénomènes, et de décrire plus finement ces derniers (vitesse d'explosion, estimations de dispersions etc...), ce qui relève du quantitatif.

La formation de singularités pour une EDP d'évolution est un phénomène non linéaire. Son étude est très active en ce moment, car de nouvelles approches, techniques et résultats permettent de voir plus clair et plus loin. J'espère que ce mémoire soulèvera l'intérêt du lecteur, par la pertinence et l'universalité de certains résultats et certaines thématiques.

Dans le second chapitre nous présenterons les trois équations étudiées dans ce mémoire. Nous expliquerons leur origine, l'intérêt de leur étude et quelques propriétés premières. Ensuite, nous étudierons dans le troisième chapitre la théorie de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire (dans le mémoire version longue pour les élèves non familiers avec la question), et présenterons simplement les résultats pour les deux autres. Nous pourrons alors examiner les différents comportements possibles pour les trajectoires. Dans le chapitre quatre nous parlerons de ces solutions particulières que représentent les solitons, et du phénomène de dispersion appelé "scattering". Le chapitre suivant sera consacré à la preuve de l'existence d'explosions. Nous étudierons plus finement ces explosions dans la suite du mémoire. Le sixième chapitre fera la distinction entre différents types d'explosions. Nous consacrerons alors le septième chapitre à l'étude des explosions de type II avant de conclure dans le chapitre huit.

Chapter 2

Présentation des équations étudiées

Cette partie introduit les équations non linéaires qui seront analysées au cours de ce mémoire. Nous indiquerons leur lien avec la physique, et donnerons quelques résultats de base.

2.1 L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) focalisante sur \mathbb{R}^n

Cette équation s'écrit:

$$(NLS) \begin{cases} \partial_t u &= i\Delta u + i|u|^{p-1}u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Cette équation apparaît en physique dans plusieurs modèles, pour des fibres optiques, des lasers ou des condensats de Bose-Einstein par exemple. Elle provient de la mécanique quantique.

Elle met en jeu deux termes. L'un linéaire: $\partial_t u = i\Delta u$, qui correspond à l'équation de Schrödinger linéaire. Cette équation est plutôt bien comprise. Le chapitre suivant récapitulera les éléments clés de sa résolution pour le lecteur qui la rencontre pour la première fois. Cette équation est dite dispersive: ses solutions "décroissent" en un certain sens. L'autre terme, $\partial_t u = i|u|^{p-1}u$ est non linéaire. Les solutions sont sous la forme $u(t, x) = u(0, x)e^{i\omega(x)t}$, avec $\omega(x) = |u(0, x)|^{p-1}$. En particulier, même si elle est non linéaire, elle ne fait pas, à elle seule, exploser les solutions.

Comme beaucoup d'équations d'évolution de ce domaine, c'est une équation hamiltonienne. On voit formellement que les deux quantités:

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1} \\ \|u\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sont conservées. Pour toutes les solutions de l'équation considérées dans ce mémoire, les trajectoires seront assez régulières (ou limite de trajectoire assez régulières) pour que ces quantités soient effectivement conservées.

Cette équation admet également l'invariance par changement d'échelle suivante: si $u(t, x)$ est une solution, alors pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-1}}} u(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$ est également une solution.

Son intérêt en mathématique est très important et elle est très étudiée actuellement. Elle est une équation non-linéaire assez "simple" car elle correspond à l'ajout d'une non-linéarité en puissance à une équation linéaire classique. Cependant il reste encore de nombreux problèmes ouverts en ce qui la concerne. En ce sens, sa bonne compréhension influencera la bonne compréhension d'équation plus compliquées des mathématiques et de la physique.

2.2 L'équation de la chaleur non linéaire sur \mathbb{R}^n

Cette équation s'écrit:

$$(NLH) \begin{cases} \partial_t u &= \Delta u + |u|^{p-1}u \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Comme (NLS), cette équation est le résultat de l'ajout d'une non-linéarité "simple" à une équation linéaire bien connue: l'équation de la chaleur.

Cette équation et ses variantes se retrouvent en physique lorsque l'on décrit la compétition d'un phénomène de diffusion (la partie $\partial_t u = \Delta u$) et d'un phénomène non linéaire (réaction etc...). Son étude est importante pour la famille plus générale des équations paraboliques non linéaires. Un peu comme (NLS), elle est l'équation non linéaire la plus "simple" de cette famille, et sa compréhension n'est encore que partielle.

La partie linéaire, $\partial_t u = \Delta u$ fait décroître les solutions dans un certain sens, c'est ce qu'on appelle la dissipation. La partie non linéaire est explosive: $\partial_t u = |u|^{p-1}u$ admet une solution sous la forme $u(t, x) = \frac{C(x)}{(T(x)-t)^{\frac{1}{p-1}}}$. Nous verrons que ces deux termes peuvent interagir pour produire des comportements nouveaux.

Cette équation correspond au flot associé à l'opposé du gradient de la fonctionnelle $E : u \mapsto \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$. Le lecteur non familier avec cette notion pourra constater que cette quantité décroît au cours du temps pour les solutions de l'équation.

Cette équation admet la même invariance par changement d'échelle que (NLS): si $u(t, x)$ est une solution, alors pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-1}}} u(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$ est également une solution.

Dans chacune des trois équations considérées, l'énergie sera notée E . Cela ne prêterait pas à confusion car les équations seront traitées séparément.

2.3 Le flot de la chaleur harmonique entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{S}^2

Cette équation s'écrit:

$$(HHF) \begin{cases} \partial_t u &= \partial_{rr} u + \frac{\partial_r u}{r} - k^2 \frac{f(u)}{r^2} \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

où $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et k est un entier non nul. f va être précisée dans la suite.

2.3.1 Explication et dérivation de l'équation

Cette équation est un cas particulier du flot de la chaleur harmonique entre deux variétés Riemanniennes. La dérivation de cette équation fait intervenir la notion de gradient de fonctionnelle sur un espace de fonction, qui n'est pas rappelés ici. Le lecteur qui ne connaît pas ce sujet pourra consulter: [METTRE LA REF]

Soit $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Si v vérifie des conditions de régularité et d'intégrabilité suffisantes, on peut lui associer l'énergie $\tilde{E}(v) = \int |\nabla v|^2$. On peut alors s'intéresser au flot de l'opposé du gradient de cette fonctionnelle, mais en se restreignant aux fonctions à valeurs dans \mathbb{S}^2 . Cette équation s'écrit:

$$(1) \quad \partial_t v = \mathbb{P}_{T_v \mathbb{S}^2}(\Delta v)$$

où $T_v \mathbb{S}^2$ désigne le plan tangent de la sphère \mathbb{S}^2 au point $v(x)$.

Si l'on considérait les fonctions non plus à valeur dans la sphère mais à valeur dans \mathbb{R} et que l'on appliquait la même démarche, on obtiendrait l'équation $\partial_t v = \mathbb{P}_{T_v \mathbb{R}}(\Delta v) = \Delta v$. (1) apparaît donc comme la complexification de l'équation de la chaleur en changeant la géométrie de l'espace d'arrivée.

Pour simplifier encore l'équation (1), on se restreint à une classe de fonctions possédant une symétrie particulière: la classe des fonctions k -corotationnelles. On utilise dans la suite les coordonnées polaires dans le plan \mathbb{R}^2 . On écrira donc:

$$v((r, \theta)) = \begin{pmatrix} v_1((r, \theta)) \\ v_2((r, \theta)) \\ v_3((r, \theta)) \end{pmatrix}$$

Définition 2.3.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ est k -corotationnelle si $\forall r, \theta, v_2((r, 0)) = 0$ et:

$$v((r, \theta)) = \begin{pmatrix} v_1((r, 0)) \cos(k\theta) \\ v_1((r, 0)) \sin(k\theta) \\ v_3((r, 0)) \end{pmatrix}$$

On note \mathcal{F}_k l'ensemble des fonctions k -corotationnelles.

Cela signifie que lorsque l'on effectue une rotation d'angle α dans le plan: $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$ l'image par v subit une rotation d'angle $k\alpha$ dans le plan orthogonal à Oz . De plus, on demande à ce que $v((r, 0))$ soit dans le plan Oxz .

On note $u(r)$ la longueur de l'arc sur la sphère reliant le pôle sud $(0, 0, -1)$ au point $v((r, 0))$. Alors u détermine entièrement v . En effet, si v est k -corotationnelle, on a :

$$v((r, \theta)) = \begin{pmatrix} \sin(u(r))\cos(k\theta) \\ \sin(u(r))\sin(k\theta) \\ \cos(u(r)) \end{pmatrix}$$

On va donc choisir d'étudier l'évolution de u plutôt que celle de v .

L'ensemble \mathcal{F}_k est invariant par le flot de (1). De plus, en exprimant (1) en fonction de u on obtient: v est une solution k -corotationnelle de (1) si et seulement si u est une solution de (HHF) en prenant $f(u) = \frac{\sin(2u)}{2}$, c'est-à-dire:

$$(HHF \ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2) \quad \partial_t u = \partial_{rr} u + \frac{\partial_r u}{r} - k^2 \frac{\sin(2u)}{2r^2}$$

Nous avons donc bien montré que (HHF), au moins pour cette fonction f particulière, est un cas particulier du flot de la chaleur harmonique.

Pour ne pas faire une présentation trop compliquée, nous avons choisi de présenter la dérivation de (HHF) à partir du flot de la chaleur harmonique entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{S}^2 . Mais on peut faire la même chose entre \mathbb{R}^2 et n'importe quelle surface de révolution. Les surfaces de révolution considérées sont construites ainsi:

Soit g une fonction 2π périodique et impaire, avec $g(0) = 0$ (et donc $g(\pi) = 0$), telle que $g'(0) = 1$, $g > 0$ sur $]0, \pi[$. Soit z la fonction 2π périodique et paire, avec $z(0) = 0$ vérifiant $g' + z' = 1$. On construit alors une surface de révolution en considérant l'ensemble des points dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} g(u)\cos(\phi) \\ g(u)\sin(\phi) \\ z(u) \end{pmatrix}$$

pour $u \in \mathbb{R}$ et $\phi \in]0, 2\pi[$. Avec le choix $g = \sin$ et $z = 1 - \cos$ la variété ainsi construite est la sphère \mathbb{S}^2

On peut alors facilement adapter la notion de fonction k -corotationnelle et la paramétrisation par la longueur d'arc u précédemment utilisées pour la sphère à ce nouveau cadre. On obtient alors l'équation (NLH) avec f donnée par: $f = gg'$. (NLH), pour f de cette forme, représente donc le flot de la chaleur harmonique entre \mathbb{R}^2 et une surface de révolution.

Dans la suite, f sera toujours prise sous la forme $f = gg'$ pour g une fonction 2π périodique et impaire, avec $g(0) = 0$, telle que $g'(0) = 1$, $g > 0$ sur $]0, \pi[$.

2.3.2 Propriétés, origines physique et mathématique

On peut réécrire l'énergie \tilde{E} de $v \in \mathcal{F}_k$ en fonction de u :

$$\tilde{E}(v) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 = \int_{]0, +\infty[} (|\partial_r u|^2 + k^2 \frac{g(u)^2}{r^2}) r dr = E_k(u)$$

(1) est le flot de l'opposé du gradient de \tilde{F} , et l'on constate facilement que (HHF) est le flot de l'opposé du gradient pour F . En particulier, F décroît le long des trajectoires de (HHF): si u est une solution, alors

$$F(u(t)) \geq F(u(0)).$$

Cette équation admet également une invariance par changement d'échelle: si $u(t, x)$ est une solution, alors pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(t, x) = u(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$ est également une solution.

En physique, (1) provient des équations de Landau-Lifschitz du ferromagnétisme. En chaque point (r, θ) du plan \mathbb{R}^2 se situe un élément du matériau (atome, molécule) qui possède une direction d'aimantation $v((r, \theta))$ sur la sphère \mathbb{S}^2 . (1) correspond alors à un processus de diffusion pour cette direction d'aimantation.

En mathématiques, cette équation a été étudiée notamment dans les travaux pionniers de Eels et Samson. En suivant une trajectoire de (1), la fonctionnelle \tilde{E} décroît. De manière asymptotique, peut-être que u va converger vers un point critique de cette fonctionnelle. En montrant l'existence d'une limite asymptotique pour certaines trajectoires, et le fait que celle-ci soit forcément un point critique, ils ont alors pu montrer l'existence de points critiques pour \tilde{F} (dans un cadre plus général). Ces points critiques, appelés fonctions harmoniques, sont très étudiés en mathématiques.

Chapter 3

Théorie de Cauchy

La question fondamentale à se poser lorsque l'on veut étudier mathématiquement une équation d'évolution est: a-t-elle des solutions? Nous énoncerons simplement les résultats sans donner de preuves, ce document étant adressé à un public connaissant le domaine. Une autre version existe où l'on répond avec plus de détail à cette question.

3.1 (NLS)

Théorème 3.1.1. [?] cas H^1 sous-critique:] On suppose $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ (le membre de droite étant égal à $+\infty$ dans les cas $N = 1, 2$).

L'équation est bien posée localement dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps $T(u_0) > 0$ et une solution de l'équation $u \in C([0, T(u_0)], H^1(\mathbb{R}^N))$. De plus le temps d'existence est contrôlé par la norme H^1 de la donnée initiale: $T(u_0) > f(\|u_0\|_{H^1})$ pour une certaine fonction f strictement positive.

Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans le Polycopié du cours donné à l'école Polytechnique par Pierre Raphael, [?].

3.2 Equation de la chaleur non linéaire

Pour l'équation de la chaleur non-linéaire il existe le même résultat.

Théorème 3.2.1. [?] cas H^1 sous-critique:] On suppose $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ (le membre de droite étant égal à $+\infty$ dans les cas $N = 1, 2$).

L'équation est bien posée localement dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps $T(u_0) > 0$ et une solution de l'équation $u \in C([0, T(u_0)], H^1(\mathbb{R}^N))$.

Mais on peut également étudier cette équation dans L^∞ .

Théoreme 3.2.2. *L'équation (NLH) est bien posée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps $T(u_0) > 0$ et une solution de l'équation $u \in C([0, T(u_0)], L^\infty(\mathbb{R}^N))$.*

3.3 (HHF)

On rappelle que pour le flot de la chaleur harmonique, la fonction u considérée représente la manière de recouvrir la sphère (ou une variété de révolution similaire) par le plan \mathbb{R}^2 (cf présentation de l'équation pour plus de détails). On va s'intéresser plus spécialement aux fonctions qui envoient l'origine sur le pôle sud, et "l'infini" sur le pôle nord.

Définition 3.3.1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose alors:*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{u \in H_{loc}^1(]0, +\infty[), \lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = \pi\}$$

Et on définit:

$$E_k(u) = \int_{]0, +\infty[} (|\partial_r u|^2 + k^2 \frac{g(u)^2}{r^2}) r dr$$

On alors également un théorème d'existence locale, cette fois-ci pour une régularité plus élevée, ainsi que la décroissance de l'énergie le long des trajectoires.

Théoreme 3.3.1. *[?] Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $u_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$ avec $u_0 \in H_{loc}^2(]0, +\infty[)$ et $\int_0^\infty |\partial_{rr} u|^2 dr < +\infty$ d'énergie k -corotationnelle $E_k(u_0)$ finie.*

Alors il existe un temps $T > 0$ et une unique solution au problème (HHF) u qui vérifie: $\partial_r u \in L^\infty([0, T], L^2(]0, +\infty[))$, $\partial_{rr} u \in L^1([0, T], L^2(]0, +\infty[))$ et $\partial_t u \in L^1([0, T], L^2(]0, +\infty[))$. De plus, l'énergie $E_k(u(t))$ est décroissante. Pour tout temps, u est également dans $\tilde{\mathcal{F}}$

Un résultat d'existence locale, prouvé spécialement dans le contexte qui nous concerne, avec en prime une preuve de la stabilité de la famille de soliton (nous verrons plus loin à quoi cela fait référence), est montré dans [?].

Chapter 4

2 comportements particuliers lors d'une existence globale: le scattering et les solutions périodiques (solitons)

Nous avons précédemment montré (au moins pour (NLS)) que les trois équations étudiées dans ce mémoire admettent des solutions, au moins localement en temps. On peut alors définir la solution maximale issue de u_0 comme la solution issue de u_0 et définie sur un intervalle de temps maximal. Lorsque cet intervalle de temps maximal est $[0, +\infty[$, on dit qu'il y a existence globale.

Deux phénomènes intéressants peuvent se présenter lorsqu'une solution est globale, dont l'étude est nécessaire pour bien comprendre les explosions (comme nous le verrons plus loin). Il existe pour ces trois équations des fonctions spécifiques, appelées solitons. Pour (HHF) les solitons sont les solutions stationnaires de l'équation, que nous décrirons dans la première sous-section. Pour (NLS) ce sont des solutions périodiques de l'équation qui ont un lien étroit avec l'énergie associée à (NLS), décrites en deuxième. Pour (NLH), ce sont des fonctions stationnaires d'une équation qui dérive de (NLH) traduisant la concentration d'un profil, et nous analyserons cela en dernier.

Ces solutions particulières font interagir à la fois la partie linéaire et la partie non linéaire de l'équation, et dans un certain sens ces deux contributions "se compensent" pour créer un profil constant au cours du temps. On peut aussi se demander si une des deux parties peut l'emporter sur l'autre. Le cas où la partie non linéaire l'emporte sera analysé dans le prochain chapitre. Parfois c'est la partie linéaire qui l'emporte: la non linéarité n'est pas assez forte pour contrer la dispersion apportée par la partie linéaire, et la solution est alors globale et décroissante. Ce phénomène est appelé scattering, et il sera étudié pour NLS.

Le scattering est étudié ici pour la complétude du mémoire et pour son lien avec le portrait de phase de l'équation (voir chapitre 9). Ce qui va se révéler en revanche étonnant, c'est que les solutions périodiques sont directement en lien avec les phénomènes d'explosions! C'est ce que nous verrons dans deux chapitres.

4.1 Les solitons et les solutions auto-similaires

4.1.1 La famille de solutions stationnaires de (HHF)

Nous avons vu dans le chapitre de présentation des équations que le flot de la chaleur harmonique est le flot de l'opposé du gradient de l'énergie $\int |\nabla u|^2$. Il existe une famille à un paramètre de minimiseurs de cette énergie dans l'espace de solutions considéré, qui forme donc une famille de points fixes pour la dynamique.

Théorème 4.1.1. [?] Soit k un entier non nul.

Alors il existe une fonction $Q^k :]0, +\infty[\rightarrow]0, \pi[$ vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) Q^k est une fonction croissante de classe C^2 et a le comportement asymptotique: $Q^k(r) = 0$ et $Q^k(r) = \pi$, ie $Q^k \in \tilde{\mathcal{F}}$
- (ii) Q^k est l'unique minimiseur, à changement d'échelle près, de l'énergie. Si $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est d'énergie k -corotationnelle finie, avec $u \in \tilde{\mathcal{F}}$, alors $F(Q^k) \leq F(u)$. De plus, cette égalité a lieu si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $u = Q^k_\lambda$, ie $u(r) = Q^k(\frac{r}{\lambda})$.
- (iii) Q^k est un point stationnaire de l'équation (HHF): $(\partial_{rr} + \frac{\partial_r}{r} + \frac{f(\cdot)}{r^2})(Q^k) = 0$

Remarque 4.1.1. - (iii) est une conséquence de (i) et de (ii). En effet, si Q^k est un minimiseur de F , alors l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit exactement (iii), puisque (HHF) est le flot de l'opposé du gradient de F .

- Pour le cas particulier $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ on a les formules explicites: $Q^k(r) = 2 \tan^{-1}(r^k)$

Lemme 4.1.1. Il existe une application Q^k vérifiant les propriétés (i) et (iii), qui est solution de $rQ^k_r = kg(Q^k)$

Preuve 4.1.1. intuition de la démarche adoptée Si Q^k vérifie (iii), alors en multipliant (iii) par $rQ^k_r(r)$ on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2 Q_r^{k^2}) &= 2(rQ_r^k)(rQ_r^k)_r \\ &= 2(rQ_r^k)(rQ_{rr}^k + Q_r^k) \\ &= 2(rQ_r^k)(rk^2 \frac{f(Q^k)}{r^2}) \\ &= 2k^2 Q_r^k g(Q^k) g'(Q^k) \\ &= \frac{d}{dr}(k^2 g^2(Q^k)) \end{aligned}$$

En intégrant, et en prenant compte des conditions aux limites que l'on veut on obtient alors: $r^2 Q^k(r)^2 = k^2 g(Q^k)$. C'est donc cette ODE que l'on va chercher à résoudre.

vraie preuve Soit Q^k la solution maximale de l'ODE $rQ^k_r = kg(Q^k)$, avec $Q^k(1) = \frac{\pi}{2}$.

Comme 0 et π sont deux solutions de cette équation, on a: $0 < Q^k < \pi$ et donc Q^k est définie sur $]0, +\infty[$.

Comme g est positive sur $]0, \pi[$, Q^k est croissante, et admet deux limites, notées Q^k_0 et Q^k_∞ respectivement.

On suppose par l'absurde que $Q^k_0 \neq 0$. Alors $rQ^k_r = kg(Q^k) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} kg(Q^k_0)$ nous donne que Q^k se comporte

de manière logarithmique, ce qui est impossible. D'où $Q_0^k = 0$.

De même, on montre que $Q_\infty^k = \pi$.

La résolution de l'ODE nous donne que Q^k est de classe C^1 . On peut alors différentier $rQ_r^k = kg(Q^k)$ pour obtenir que Q^k est de classe C^2 . De plus, lorsque l'on différencie cette expression on obtient: $(\partial_{rr} + \frac{\partial_r}{r} + \frac{f(r)}{r^2})(Q^k) = 0$: Q^k est harmonique.

On calcule alors aisément l'énergie de Q^k :

$$\begin{aligned} F(Q^k) &= \int (Q_r^k(r)^2 + k^2 \frac{g(Q^k)}{r^2}) r dr \\ &= 2k \int Q_r^k g(Q^k) dr \\ &= 2k [G(Q^k)]_0^{+\infty} \\ &= 2kG(\pi) \end{aligned}$$

où G désigne la primitive de g qui vaut 0 en 0.

Lemme 4.1.2. Q^k définie précédemment vérifie la propriété de minimisation (ii).

Preuve 4.1.2. Soit $v \in H_{loc}^1$, d'énergie finie, avec $v(r) = 0$ et $v(r) = \pi$. Alors on a:

$$\begin{aligned} F(v) &= \int (v_r(r)^2 + k^2 \frac{g(v)}{r^2}) r dr \\ &\leq 2 \int kv_r g(v) dr \\ &= 2k [G(v)]_0^{+\infty} \\ &= 2kG(\pi) \\ &= F(Q^k) \end{aligned}$$

où G est la primitive introduite dans la preuve du lemme précédent. Q^k minimise donc bien l'énergie. On suppose maintenant qu'il y a égalité. En coupant l'intégrale en deux et en appliquant deux fois l'inégalité $a^2 + b^2 \leq 2ab$ on a:

$$\begin{aligned} F(v) &= \int (v_r(r)^2 + k^2 \frac{g(v)}{r^2}) r dr \\ &= \int_0^R (v_r(r)^2 + k^2 \frac{g(v)}{r^2}) r dr + \int_R^\infty (v_r(r)^2 + k^2 \frac{g(v)}{r^2}) r dr \\ \text{leq} & 2 \int_0^R kv_r g(v) dr + 2 \int_R^\infty kv_r g(v) dr \\ &= 2k ([G(v)]_0^R + [G(v)]_R^{+\infty}) \end{aligned}$$

Or

$$2k ([G(v)]_0^R + [G(v)]_R^{+\infty}) = 2kG(\pi) = F(Q^k) = F(v)$$

Chacune des deux inégalités se doit donc d'être une égalité. La première s'écrit:

$$2kG(v(R)) = \int_0^R (v_r(r)^2 + k^2 \frac{g(v)}{r^2}) r dr$$

En différenciant cette expression on obtient:

$$2kg(v(R))v_r(R) = Rv_r(R)^2 + \frac{k^2}{R}g(v(R))$$

ce qui n'est possible que si $Rv_r(R) = kg(v(R))$.

Il existe un $\lambda > 0$ tel que $v(\frac{1}{\lambda}) = Q^k(1)$. Comme l'énergie est invariante par scaling: $F(v) = F(v_\lambda)$ on peut appliquer le même raisonnement à v_λ , qui vérifie la même ODE que Q^k , avec la même valeur en 1, et qui est donc égale à Q^k par unicité.

On a bien montré: $v_\lambda = Q^k$

4.1.2 (NLH)

L'équation (NLH) admet, en dimension assez grande, une solution stationnaire, mais qui n'est ni dans l'espace H^1 , ni dans l'espace L^∞ .

Lemme 4.1.3. Soit N et p tels que $N - 2 - \frac{2}{p-1} > 0$. La fonction radiale définie par $\phi^*(x) = \phi(|x|)$, où

$$\phi(r) = \frac{c^*}{r^{\frac{2}{p-1}}}, \quad c^* = \left(\frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

est une solution stationnaire de (NLH)

On cherche maintenant des solutions auto-similaires à l'équation (HHF), c'est-à-dire des solutions sous la forme $u(t, x) = u_{\lambda(t)}(0, x)$ où on rappelle que $u_\lambda(0, x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{p-1}}} u(0, \frac{x}{\lambda})$.

Lemme 4.1.4. Toute solution auto-similaire u de (NLH) vérifie:

$$u(t, x) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \psi \left(\frac{x-a}{\sqrt{T-t}} \right)$$

où ψ vérifie l'équation suivante:

$$(3) \quad \Delta \psi - \frac{1}{2} x \cdot \nabla \psi - \frac{1}{p-1} \psi + |\psi|^{p-1} \psi = 0$$

De plus, il existe des solutions bornées à cette seconde équation.

4.1.3 La famille de solitons de (NLS)

Théorème 4.1.2. On se place dans le cas $N \geq 2$ et $p \leq \frac{N+2}{N-2}$.

Il existe un unique profil $Q \in H^1(\mathbb{R}^N)$, radial, positif, vérifiant l'équation:

$$\Delta Q - Q + Q|Q|^{p-1} = 0$$

Ce profil engendre une solution périodique de (NLS) donnée par: $Q(t, x) = e^{it} Q(x)$

On construit alors toute une famille de solutions périodiques en utilisant l'invariance par déphasage, par translation et par changement d'échelle de l'équation.

Une preuve complète de ce théorème peut être trouvée dans [?]. Il est également intéressant de lire [?] à ce sujet.

4.2 Le scattering, avec pour exemple (NLS)

Pour certaines solutions, c'est la partie linéaire de l'équation qui l'emporte. Ce phénomène survient dans les équations dispersives comme (NLS). Si la non-linéarité appliquée à la fonction u n'est pas assez forte, elle ne peut pas contrecarrer la partie linéaire, et c'est la dispersion qui l'emporte.

Pour simplifier les preuves et ne pas avoir à effectuer des estimations sur les dérivées de u , nous nous plaçons dans une gamme de non-linéarités qui permettent au problème d'être bien posé dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Évidemment, ces résultats peuvent être adaptés à d'autres configurations.

Proposition 4.2.1. *On suppose que p vérifie $p \leq \frac{N+2}{N}$.*

Alors (NLS) est bien posée localement dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer cette proposition, nous utilisons un lemme indiquant quel type de forcing permet d'obtenir une solution.

Lemme 4.2.1. *Soit $T > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit un terme de force f vérifiant la condition d'intégrabilité $f \in L^{r'}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour r' et q' les exposants conjugués associés à un couple d'exposants de Strichartz:*

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1, \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{2}{r} + \frac{N}{q} = \frac{N}{2}$$

alors il existe une unique solution u au problème:

$$\begin{cases} \partial_t u &= i\Delta u + f \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

dans $L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^N))$.

Preuve 4.2.1. *La solution u est sous la forme:*

$$u(t) = S_t^S(u_0) + \int_0^t S_{t-s}^S(f(s))$$

On veut donc montrer que le deuxième terme du membre de droite appartient à $L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^N))$. On fixe $t \in [0, T[$. La norme L^2 est donnée par:

$$\left\| \int_0^t S_{t-s}^S(f(s)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \phi \int_0^t S_{t-s}^S(f(s))$$

On peut prendre $f \in C_c^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^N)$, le résultat général sera alors obtenu par passage à la limite. On calcule donc:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \phi \int_0^t S_{t-s}^S(f(s)) \right| &\leq \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^N} \phi S_{t-s}^S(f(s)) \right| \\ &= \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^N} S_{s-t}^S(\phi) f(s) \right| \\ &\leq \int_0^t \| S_{s-t}^S(\phi) \|_{L^q} \| f(s) \|_{L^{q'}} \\ &\leq \| \phi \|_{L^{r'}([0, t[, L^q)} \| f \|_{L^{r'}([0, t[, L^{q'})} \\ &\leq C \| \phi \|_{L^2} \| f \|_{L^{r'}([0, t[, L^{q'})} \end{aligned}$$

La dernière égalité étant valide puisque les exposants r et q permettent une estimation de Strichartz.

On a donc montré:

$$\left\| \int_0^t S_{t-s}^S(f(s)) \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^{r'}([0,t], L^{q'})}$$

cette estimation permet de conclure sur l'existence de la solution dans $L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^N))$ et de la continuité par rapport à f et u_0 .

Ce lemme va nous aider à gérer la non-linéarité par une méthode de point fixe.

Preuve 4.2.2. Nous allons d'abord montrer la preuve de l'aspect bien posé. Comme dans la preuve effectuée au premier chapitre de ce mémoire sur la théorie de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, nous allons utiliser les inégalités de Strichartz.

Si u est une solution, u s'écrit:

$$u(t) = S_t^S(u_0) + \int_0^t S_{t-s}^S(|u(s)|^{p-1}u(s))ds$$

Le problème se formule donc ainsi. Si cette équation est bien posée dans un certain espace (i.e. u et certaines de ses dérivées possèdent une certaine intégrabilité), alors $|u|^{p-1}u$ et ses dérivées sont "moins" intégrables. Ce défaut d'intégrabilité est compensé par les propriétés de décroissances du semi-groupe $(S_t^S)_{t \in \mathbb{R}}$. La formule plus haut possède alors un sens.

Dans la formule de Duhamel, on veut que u^p soit un terme de force acceptable au sens du lemme précédent: $u^p \in L^{R'}(L^{Q'})$ pour R' et Q' les exposants conjugués d'un couple d'exposants de Strichartz. On aura alors que u sera dans n'importe quel $L^r(L^q)$ pour tous les exposants de Strichartz. On cherche donc un couple d'exposant de Strichartz (r, q) tel que si $u \in L^r(L^q)$, alors u^p soit un terme de force acceptable.

Soient (r, q) un couple d'exposants de Strichartz. On suppose $u \in L^r([0, T[, L^q)$. Alors $u^p \in L^{\frac{r}{p}}([0, T[, L^{\frac{q}{p}})$. Comme $[0, T[$ est un intervalle fini, par l'inégalité de Hölder $u^p \in L^{R'}([0, T[, L^{\frac{q}{p}})$ pour tout $R' \leq \frac{r}{p}$.

On veut savoir s'il existe un R' vérifiant: R' et $\frac{q}{p}$ sont les exposants conjugués d'un couple $(R, (\frac{q}{p})')$ d'exposant de Strichartz, et $R' \leq \frac{r}{p}$.

On a:

$$R = \frac{R'}{R' - 1} \text{ et } (\frac{q}{p})' = \frac{q}{q - p}$$

Comme (r, q) et $(R, (\frac{q}{p})')$ sont des couple de Strichartz,

$$q = \frac{2r}{r - \frac{4}{N}} \text{ et } R = \frac{2(\frac{q}{p})'}{N(\frac{(\frac{q}{p})'}{2} - 1)}$$

On peut alors exprimer R' en fonction de r , p et N :

$$R' = \frac{1}{1 + \frac{N}{4} + \frac{p}{r} - \frac{Np}{4}}$$

la condition $R' \leq \frac{r}{p}$ est donc équivalente à $p \leq 1 + \frac{4}{N}$ ce qui est exactement la condition demandée.

On fixe donc maintenant des exposants r, q et R remplissant ces conditions. On souhaite appliquer une méthode de point fixe dans l'espace:

$$E = L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^r([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))$$

que l'on muni de la norme:

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^N))} + \|u\|_{L^r([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))}$$

On considère l'application Φ qui à $v \in E$ associe la solution de:

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(v) = i\Delta \Phi(v) + i|v|^{p-1}v \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution recherchée est alors une fonction v telle que:

$$v(t) = S_t^S(u_0) + \Phi(v)$$

On recherche donc une partie de E sur laquelle le membre de droite définit une application contractante.

Pour deux fonctions v_1 et v_2 de E , $\Phi(v_1) - \Phi(v_2)$ est la solution associée au problème:

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + i(|v_1|^{p-1}v_1 - |v_2|^{p-1}v_2) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Il vient:

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_E \leq C \| |v_1|^{p-1}v_1 - |v_2|^{p-1}v_2 \|_{L^{R'}([0, T[, L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^N))}$$

on sait que:

$$||v_1(s)|^{p-1}v_1(s) - |v_2(s)|^{p-1}v_2(s)| \leq C|v_1(s) - v_2(s)|(|v_1(s)|^p + |v_2(s)|^p)$$

(c'est l'inégalité des accroissements finis pour $\mathbb{C} \ni z \mapsto |z|^{p-1}z$). Donc en utilisant Hölder:

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_E \leq C \| |v_1 - v_2| \|_{L^{R'}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))} \left(\| |v_1| \|_{L^{R'}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))}^{p-1} + \| |v_2| \|_{L^{R'}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))}^{p-1} \right)$$

Dans le cas sous-critique, la contraction en temps s'obtient plus facilement. En effet, on a $v_i \in L^{\frac{r}{p}}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))$ et $R' < \frac{r}{p}$. En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient donc:

$$\|v\|_{L^{R'}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))} \leq \|v\|_{L^{\frac{r}{p}}([0, T[, L^q(\mathbb{R}^N))} |T|^{\frac{1}{1-\frac{R'p}{r}}}$$

soit A une constante assez grande, nous avons montré que pour $v_1, v_2 \in B_E(0, A \|u_0\|)$ on a:

$$\|S_t^S(u_0) + \Phi(v_i)\|_E \leq C + A^p C' T^{\frac{1}{1-\frac{R'p}{r}}} \|u_0\|_{L^2}^p$$

et

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_E \leq A^p C' T^{\frac{1}{1-\frac{R'p}{r}}} \|u_0\|_{L^2}^{p-1} \|v_1 - v_2\|_E$$

Donc pour T assez petit, la boule $B_E(0, A \|u_0\|)$ est invariante par l'application $v \mapsto S_t^S(u_0) + \Phi(v)$ et celle-ci est contractante. Par le théorème de Banach-Picard il existe donc un unique point fixe, c'est la solution recherchée.

Dans le cas critique, on ne peut plus sortir une puissance de T par Hölder car $R' = \frac{r}{p}$. On utilise donc le fait que la solution de l'équation linéaire se disperse. On se place dans l'espace de Banach $E = L^r([0, T], L^q(\mathbb{R}^N))$.

On s'attend à ce que pour un temps court, v reste proche de la solution de l'équation linéaire issue de u_0 . On se place donc sur la boule $B_E(S_t^S(u_0), \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_i)\|_E &\leq C' \|v\|_E^p \\ &\leq C' (\|u\|_E + \|u - v\|_E)^p \\ &\leq C' \|u\|_E^p + C'\epsilon \|u\|_E^{p-1} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Or on sait que $S_t^S(u_0) \in L^r(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$ donc on a : $\lim_{T \rightarrow 0} \|S_t^S(u_0)\|_{L^r([0, T], L^q(\mathbb{R}^N))} = \lim_{T \rightarrow 0} \|S_t^S(u_0)\|_E = 0$. En prenant T et ϵ assez petits, on a alors :

$$\|\Phi(v_i)\|_E \leq \epsilon$$

Donc l'application $v \mapsto S_t^S(u_0) + \Phi(v)$ envoie la boule $B_E(S_t^S(u_0), \epsilon)$ dans elle-même. De même on obtient que cette application est une contraction. Il existe donc une unique solution au problème.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, qui stipule qu'il y a scattering pour des données initiales de taille assez petite.

Théorème 4.2.1. [?], [?] Il existe une constante $\delta > 0$ telle que si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\|u_0\|_{L^2} \leq \delta$, alors la solution u issue de u_0 est globale, et il existe deux profils asymptotiques $u_+, u_- \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tels que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_t^S(u_+) - u(t)\|_{L^2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|S_t^S(u_-) - u(t)\|_{L^2} = 0$$

On constate que pour l'exposant L^2 critique : $p = \frac{N+2}{N}$, on a donc le phénomène d'explosion vu précédemment et le phénomène de scattering.

Preuve 4.2.3. (1) existence globale :

Soit u_0 telle que $\|u_0\|_{L^2} \leq \delta$. Avoir une solution globale revient à résoudre l'équation intégrale :

$$u(t) = S_t^S(u_0) + \int_{-\infty}^t S_{t-s}^S(|u(s)|^{p-1}u)$$

On reprend les notations de la preuve de la proposition précédente, et on nomme E l'espace de Banach $L^r(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$. On note Φ l'application qui à $v \in E$ associe :

$$\Phi(v)(t) = \int_{-\infty}^t S_{t-s}^S(|v(s)|^{p-1}v)$$

On a vu que l'on avait alors les deux estimations :

$$\|S_t^S(u_0) + \Phi(v)\|_E \leq C \|u_0\|_{L^2} + C \|v\|_E^p$$

et

$$\| \Phi(v_1) - \Phi(v_2) \|_E \leq C \| v_1 - v_2 \|_E \left(\| v_1 \|_E^{p-1} \| v_2 \|_E^{p-1} \right)$$

Soit A une constante grande. On suppose que $v \in B_E(0, A\delta)$. On a alors:

$$\| S_t^S(u_0) + \Phi(v) \|_E \leq C\delta + C\delta^p A^p \leq A\delta$$

pour δ assez petit. De même:

$$\| \Phi(v_1) - \Phi(v_2) \|_E \leq C \| v_1 - v_2 \|_E A^{p-1} \delta^{p-1}$$

et donc l'application $v \mapsto S_t^S(u_0) + \Phi(v)$ est une contraction sur $B_E(0, A\delta)$ pour δ assez petit. D'où l'existence et l'unicité d'une solution globale.

(2) profils asymptotiques

On ne va montrer que l'existence de u_+ , celle de u_- est en tout point similaire. Si u_+ existe, comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| S_t^S(u_+) - S_t^S u_0 - \int_{-\infty}^t S_{t-s}^S(|u(s)|^{p-1}u(s)) \|_{L^2} = 0$$

En appliquant S_{-t}^S de chaque côté, u_+ est donc donné par:

$$u_+ = u_0 + \int_{-\infty}^t S_{-s}^S(|u(s)|^{p-1}u(s))$$

Il faut donc simplement vérifier que l'intégrale a un sens. De la même manière que pour la preuve de l'existence, ceci est vrai car $|u|^{p-1}u$ est un terme de force acceptable.

Remarque 4.2.1. Nous avons vu dans la preuve qu'il y a scattering dès que $u \in L^r(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour r et q deux exposants de Strichartz différents de $(+\infty, 2)$

La dispersion implique que l'énergie provenant de la non-linéarité: $\int |u|^{p+1}$ va tendre vers 0 et seule va rester l'énergie cinétique $\int |\nabla u|^2$. Cette énergie limite va donc être celle des profils asymptotiques.

Proposition 4.2.2. Le même théorème pour $L^2(\mathbb{R}^N)$ et des données de taille petite s'adapte pour H^1 . Il existe une constante $\delta > 0$ telle que si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\| u_0 \|_{H^1} \leq \delta$, alors (NLS) admet une unique solution globale dont les normes $L^r(L^q)$ pour (r, q) un couple d'exposants de Strichartz sont finies. Et il existe également des profils asymptotiques u_+ et u_- dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ces profils vérifient:

$$(i) \| u_- \|_{L^2} = \| u_+ \|_{L^2} = \| u_0 \|_{L^2}^2$$

$$(ii) 2E(u(t)) = \| \nabla u_- \|_{L^2}^2 = \| \nabla u_+ \|_{L^2}^2$$

Preuve 4.2.4. Cette preuve utilise la conservation de l'énergie et de la norme L^2 par le flot de (NLS). Elle est laissée au lecteur.

Chapter 5

Existence d'explosions

Nous avons introduit précédemment quelques équations non-linéaires, et montré, du moins pour la première, qu'elles admettent des solutions localement en temps. Nous aimerions maintenant savoir comment se comportent ces solutions. La théorie de Cauchy nous donne un temps d'existence local. La question naturelle est: combien de temps la solution existe-t-elle? Si la solution existe pour tout temps, on dit alors qu'elle est globale. Si la solution n'existe que pour un intervalle de temps fini, on dit alors qu'elle explose.

Dans cette section, nous allons voir que pour une non-linéarité assez forte, chacune des équations détaillée plus haut admet des solutions qui explosent en temps fini. Le phénomène d'explosion en lui-même mérite d'être détaillé, ce que nous ferons dans les chapitres suivants.

5.1 Intuition de l'explosion, étude de l'équation différentielle ordinaire donnée par la non-linéarité

L'équation de la chaleur non linéaire et l'équation des ondes non linéaire s'écrivent sous la forme:

$$\partial_t u = \text{terme linéaire} + \text{non-linéarité}$$

Nous avons vu que l'équation linéaire admet des solutions globales en temps. Si l'on enlève le terme linéaire, l'équation purement non linéaire devient une équation différentielle ordinaire en tout point de \mathbb{R}^N :

$$\partial_t u(x) = u(x)^p$$

Les solutions de cette équation sont:

$$u(t, x) = \frac{C}{(T - t)^{\frac{1}{p-1}}}$$

où C et T sont deux constantes dépendant de $u(0, x)$. T est le temps maximal d'existence, et u tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow T$.

Ces équations font donc intervenir deux contributions: l'une venant du terme linéaire ayant tendance à faire décroître la solution, et l'autre venant du terme non linéaire ayant tendance à la faire exploser. Pour avoir une explosion, il faut donc que le terme non-linéaire soit assez fort pour contrer le terme linéaire.

5.2 Utilisation de fonctionnelles: explosion pour (NLH) sur un ouvert borné et (NLS)

Il existe pour ces deux équations des arguments simples prouvant l'existence d'explosions. Cependant, ils ne donnent aucune autre information sur la formation de la singularité.

5.2.1 Existence d'explosions pour (NLH) sur un ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On considère l'équation de la chaleur non-linéaire sur K avec condition de Dirichlet au bord:

$$(1) \begin{cases} \partial_t u &= \Delta u + |u|^{p-1}u \\ u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{cases}$$

Nous admettons que pour un exposant p sous-critique: $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ cette équation est bien posée dans $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 5.2.1. [?] *On suppose que p vérifie $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Si la donnée initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $E(u_0) \leq 0$ (E étant définie au chapitre 1) alors la solution issue de u_0 explose en temps fini. De plus, il existe effectivement des fonctions non nulles remplissant cette condition.*

Preuve 5.2.1. *Nous avons vu que l'énergie E est bien définie pour p vérifiant cette condition. De plus, cette énergie décroît le long des trajectoires: $E(u(t, \cdot)) \leq E(u_0)$.*

L'évolution de la norme L^2 de la solution est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 &= 2 \int_{\Omega} \partial_t u u = -2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |u|^{p+1} \\ &= -4E(u) + \frac{4}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} + \int_{\Omega} |u|^{p+1} \\ &= -4E(u) + \frac{5+p}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} \end{aligned}$$

Donc si $E(u_0) \leq 0$ il vient:

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{5+p}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1}$$

Or l'inégalité de Hölder nous donne une estimation de la norme L^2 par la norme L^{p+1} :

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}$$

d'où $\int u^{p+1}$ est surlinéaire vis à vis de $\int u^2$:

$$\int_{\Omega} |u|^{p+1} \geq C \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{\frac{p+1}{2}}$$

l'évolution de la norme L^2 est alors surlinéaire:

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 \geq (\|u\|_{L^2}^2)^{\frac{p+1}{2}}$$

Donc si la solution u était définie pour tout temps, cette quantité exploserait en temps fini, d'où la contradiction.

De plus il existe des fonctions non nulles ayant une énergie négative par simple multiplication par un scalaire: pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$E(\alpha u) = \alpha^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \alpha^{p+1} \int_{\Omega} |u|^p + 1$$

donc en faisant tendre α vers $+\infty$ on obtient une valeur négative.

5.2.2 L'argument du viriel pour (NLS)

Proposition 5.2.2. [?] On suppose que l'exposant p de (NLS) est critique ou surcritique: $\frac{n+2}{n-2} \leq p$. Alors si la donnée initiale vérifie la condition d'intégrabilité $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et possède une énergie initiale strictement négative $E(u_0) < 0$ la solution qui en est issue explose en temps fini.

Il existe effectivement des fonctions d'énergie strictement négative.

Preuve 5.2.2. On admet que la condition d'intégrabilité demandée reste valide pour tout temps. On va étudier la quantité $\| |x|u \|_{L^2}$ et montrer que si la solution existait pour tout temps, cette quantité deviendrait négative, ce qui est absurde.

On calcule en effectuant des intégrations par parties:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u|^2 \right) &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \bar{u} \partial_t u \right) \\ &= 4 \operatorname{Re} \left(-i \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} x \cdot \nabla u \right) \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u|^2 \right) &= 4 \operatorname{Re} \left(- \int_{\mathbb{R}^N} \overline{(\Delta u + |u|^{p-1}u)} x \cdot \nabla u + \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} x \cdot \nabla (\Delta u + |u|^{p-1}u) \right) \\ &= 4 \operatorname{Re} \left[\begin{aligned} &- \int_{\mathbb{R}^N} \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} \bar{u} x \cdot \nabla u \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \cdot x \cdot \Delta u - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \cdot x \cdot |u|^{p-1} u \\ &- N \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} (\Delta u + |u|^{p-1}u) \end{aligned} \right] \\ &= \begin{aligned} &8 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \\ &+ 4 \operatorname{Re} \left(-2 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} \bar{u} x \cdot \nabla u - N \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \right) \end{aligned} \end{aligned}$$

Or:

$$\nabla(|u|^{p+1}) = (p+1)|u|^{p-1} \operatorname{Re}(\bar{u} \nabla u)$$

donc:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u|^2 \right) \frac{2N}{p+1} - N = 8 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \right)$$

En insérant l'énergie associée à (NLS) on obtient ainsi:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u|^2 \right) = 4N(p-1)E(u) - 4 \left(\frac{N}{2} - \frac{2}{p-1} \right) (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2$$

Or l'énergie décroît et part d'une valeur strictement négative, et en critique et sur-critique l'on a $\frac{N}{2} - \frac{2}{p-1} \geq 0$. Ainsi, $\frac{d^2}{dt^2} \int |x|^2 |u|^2 < \alpha < 0$. Si la solution était globale, la quantité $\int |x|^2 |u|^2$ deviendrait négative en

temps grand ce qui est absurde.

Enfin, de même que pour la proposition précédente, on peut trouver des données initiales d'énergie négative par simple multiplication par un scalaire assez grand.

5.3 Utilisation de propriétés spécifiques à l'équation: le caractère parabolique

Théoreme 5.3.1. [?] On considère l'équation (HHF). Dans le cas 1-corotationnel, il existe des solutions qui explosent en temps fini.

Pour le flot de la chaleur harmonique, nous disposons du principe de comparaison:

Théoreme 5.3.2. Soient u_1 et u_2 deux données initiales pour lesquelles la théorie de Cauchy du premier chapitre s'applique, telles que $u_1 \leq u_2$, et de temps d'existence respectifs T_1 et T_2 . Alors pour tout $t \leq \min(T_1, T_2)$ on a:

$$u_1(t, \cdot) \leq u_2(t, \cdot)$$

Ce résultat est montré dans [?]. La preuve que je fais ici est antérieure à ma connaissance de ce document et doit les idées principales à [?].

Preuve 5.3.1. On considère la différence $v = u_1 - u_2$, et l'on montre qu'elle ne peut prendre de valeurs positives.

étape(1): évolution temporelle de v :
 v vérifie l'équation:

$$\partial_s v = \partial_{yy} v + \frac{\partial_y v}{y} - \frac{f(u_1) - f(u_2)}{y^2}$$

on réécrit alors le terme non-linéaire:

$$f(u_1) - f(u_2) = -(u_2 - u_1) \int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds$$

d'où:

$$\partial_s v = \partial_{yy} v + \frac{\partial_y v}{y} - v \frac{\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds}{y^2}$$

étape(2): contrôle du terme source:

Soit $t < \min(T_1, T_2)$. Comme u_1 et u_2 restent proches de la famille de solitons $(Q_\lambda)_\lambda$, et que t n'est pas leur temps maximal d'existence, alors $0 < C_1 \leq \lambda_i(t) \leq C_2 < +\infty$. Comme les solitons admettent l'expansion $Q(y) \sim \frac{c}{\lambda} y + O(y^2)$ à l'origine, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t' \leq t, \forall x \leq \eta, u_i(t', x) \leq 2\epsilon$.

On a: $f' = g^2 + gg''$. Donc $0 \leq f'$ près de l'origine. Ainsi, pour ϵ assez petit, $\forall t' \leq t, \forall x \leq \eta$,

$$0 \leq \int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds$$

De plus, comme f' est bornée, alors il existe une constante C telle que $\forall t, \forall y$,

$$\left| \int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds \right| < C$$

étape(3): raisonnement par l'absurde

On suppose qu'il existe $t < \min(T_1, T_2)$ et $y \in [0, +\infty]$ tel que $v(t, y) > 0$. On considère alors la fonction w définie par:

$$w(t, x) = v(t, x) e^{\frac{-tC}{\eta^2}}$$

Montrons que $\sup_{t' \leq t, y} w$ est atteint. Par le même argument que dans l'étape 2, les paramètres λ_i sont bornés. Comme tous les solitons tendent vers π en l'infini, alors $\forall \epsilon_2 > 0$ il existe R tel que $\forall y \geq R$ et $t' \leq t$:

$$v(t, y) \leq \epsilon_2$$

Donc v atteint son maximum, et w aussi. On note (t_m, y_m) l'instant et la position réalisant ce maximum. On a: $t_m > 0$ car $v(0, \cdot) \leq 0$, et $w(t_m, y_m) > 0$. La dérivée temporelle de w en ce point doit donc être positive. Or:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t_m, y_m) &= \partial_{yy} w + \frac{\partial_y w}{y} - w \frac{\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds}{y^2} - w \frac{C}{\eta^2} \\ &= \partial_{yy} w - w \frac{1}{y_m^2} \left(\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds + C \frac{y_m^2}{\eta^2} \right) \end{aligned}$$

Or puisque le maximum est atteint en ce point, $\partial_{yy} w \leq 0$. Par construction on a $\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1)) ds + C \frac{y_m^2}{\eta^2} > 0$, d'où $\frac{d}{dt} w(t_m, y_m) < 0$ ce qui est la contradiction cherchée.

On peut prouver de la même manière un principe de comparaison vis-à-vis de sous-solutions, et restreint à l'intervalle $x \in [0, 1]$:

Proposition 5.3.1. Soient u_1 régulière vérifiant l'équation (HHF) sur $[0, T_1[\times]0, 1[$ avec $u_1(t, 0) = 0$ (c'est le cas si u_1 est solution de (HHF)). Soit u_2 une sous-solution régulière du problème sur $[0, T_2[\times]0, 1[$:

$$\frac{d}{dt} u_2 \leq \frac{d^2}{dr^2} u_2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_2 - \frac{\sin(2f)}{2r^2}$$

On suppose que $u_2(0, \cdot) \leq u_1(0, \cdot)$ et $\forall t \leq \min(T_1, T_2)$, $u_2(t, 1) \leq u_1(t, 1)$. Alors u_2 reste sous u_1 : pour tout $t \leq \min(T_1, T_2)$ on a:

$$u_2(t, \cdot) \leq u_1(t, \cdot)$$

La stratégie pour prouver la formation de singularité est alors simple: puisqu'il est difficile de fabriquer une solution explosive, on va fabriquer une sous-solution qui le soit, et prendre une donnée initiale située au dessus d'elle. La sous-solution est donnée par le lemme suivant:

Lemme 5.3.1. Soient $\sigma, \lambda_0, \mu \geq 0$ et $0 < \nu < 2$. On note λ la solution de:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \lambda &= -\sigma \lambda^\nu \\ \lambda(0) &= \lambda_0 \end{cases}$$

λ devient alors nulle en temps fini $T^* = T^*(\lambda_0, \sigma, \nu)$.

On considère la fonction f définie par:

$$\phi(t, r) = \arccos\left(\frac{\lambda(t)^2 - r^2}{\lambda(t)^2 + r^2}\right) + \arccos\left(\frac{\mu^2 - r^{2+\nu}}{\mu^2 + r^{2+\nu}}\right)$$

Alors ϕ vérifie les propriétés suivantes:

- graphe de ϕ : Pour tout $t < T^*$, $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(t, r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(t, r) = 2\pi$. Pour λ_0 assez petit, μ assez grand, $\phi(t, 1)$ reste proche de π : $\phi(t, 1) \leq \pi + \delta(\beta, \lambda_0)$ avec $\lim_{(\lambda_0, \mu) \rightarrow (0, +\infty)} \delta = 0$

- explosion en temps fini: f explose lorsque λ touche 0. On a pour tout $0 < r < 1$ $\lim_{t \rightarrow T^*} f(t, r) = \pi$

une sous-solution régulière: f est régulière. Pour μ assez grand, il existe une valeur σ_0 telle que si $\sigma \leq \sigma_0$, f est une sous-solution sur $[0, T^*[\times]0, 1[$

La preuve de ce lemme est simplement calculatoire est n'est pas faite ici. On est alors en mesure de finir la preuve de l'existence de solutions explosives:

Preuve 5.3.2. - étape (1): On choisit une solution u telle que $u(t, 1)$ reste au dessus de π .

Pour cela on considère une donnée initiale régulière ψ_0 telle que $\psi_0(1) > \pi$ et on note ψ la solution issue de ψ_0 . Par continuité, il existe un temps T' tel que $\psi(t, 1)$ reste au dessus de π : $\psi(t, 1) > \pi + \delta$ pour un $\delta > 0$. Pour toute donnée initiale u_0 au dessus de ψ_0 : $\psi_0(\cdot) \leq u_0(\cdot)$, la solution u issue de u_0 reste au dessus de ψ en vertu du principe de comparaison établi précédemment. On a donc pour $0 < t < \min(T', T(u_0))$, $u(t, 1) > \pi + \delta$.

- étape (2): on choisit des paramètre faisant exploser ϕ plus vite que T' .

En prenant λ_0 assez petit et μ assez grand, on a $\phi(t, \mu) < \pi + \delta$. En choisissant μ assez grand, f est une sous-solution, puis en choisissant λ_0 à nouveau suffisamment petit on a $T^* < T'$.

-étape(3) On prend une donnée initiale au dessus de ϕ et ψ . Elle reste pour tout temps $t < T'$ au dessus de ϕ en 1, et donc reste globalement au dessus de ϕ pour $t < T'$. Or ϕ explose en temps plus petit que T' , donc u aussi.

5.4 Explosion des solutions positives de (NLH) sur \mathbb{R}^N

Nous avons vu précédemment qu'il existe des solutions explosives pour (NLH) sur un ouvert borné. Nous allons maintenant montrer que sur \mathbb{R}^N , pour p vérifiant $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, toutes les solutions dont la donnée initiale est positive explosent en temps fini. Cette gamme d'exposants est plus restreinte que celles des exposants sous-critiques: $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$

Théorème 5.4.1. [?] On suppose que p vérifie: $1 < p \leq \frac{N+2}{N}$.

Soit u_0 une donnée initiale régulière et positive et non nulle de (NLH). Alors u_0 explose en temps fini.

Si u_0 est régulière et positive, alors la solution qui en est issue reste régulière et positive jusqu'à l'explosion (la positivité s'obtient par principe de comparaison similaire à celui décrit dans la sous-section précédente). Les dérivées qui interviendront dans les calculs par la suite seront donc bornées et décroissant à l'infini.

La stratégie adoptée dans cette preuve est similaire aux deux premières de cette section: nous allons étudier une quantité adaptée et montrer que son évolution entre en contradiction avec une existence globale de solution. On supposera sans perte de généralité que $u_0(0) > 0$

Lemme 5.4.1. Pour une telle solution, on pose:

$$J_0(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} u_0(y)$$

qui n'est autre que la valeur en 0 de la solution au problème linéaire de donnée initiale u_0 .

Alors on a l'inégalité suivante:

$$J_0(t)^{1-p} - u(t,0)^{1-p} \geq (p-1)t$$

On peut alors prouver le théorème précédent en connaissant l'évolution de J_0 :

Preuve 5.4.1. Par continuité, u_0 est strictement positive dans un voisinage de 0: il existe un rayon $r > 0$ tel que $u_0(x) > \epsilon$ pour $|x| \leq r$. On estime alors de manière brutale J_0 :

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} u_0(y) \\ &\geq \int_{|x| \leq r} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \epsilon \end{aligned}$$

Pour $t \geq 1$ et $|x| \leq r$, $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ est plus grand qu'une certaine constante $C > 0$, d'où:

$$J_0(t) \geq \epsilon C |B_r(0)| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}$$

Or si l'on suppose que la solution u existe pour tout temps, en injectant cette estimation dans celle obtenue dans le lemme précédent on obtient:

$$t^{\frac{N(p-1)}{2}} \geq Ct$$

Soit:

$$t^{\frac{N(p-1)}{2}-1} \geq C$$

Or la condition sur l'exposant p est exactement celle qui donne une puissance négative dans le membre de gauche. La solution ne peut donc pas exister pour tout temps car cette inégalité est violée en temps long.

Nous prouvons maintenant le lemme.

Preuve 5.4.2. Soit $t > 0$. On considère sur $[0, t] \times \mathbb{R}^N$ la fonction:

$$v_\epsilon(s, x) = K(t - s + \epsilon, x)$$

v_ϵ est le "retourné temporel" du noyau de la chaleur. Il vérifie: $\partial_t v_\epsilon = -\Delta v_\epsilon$. A la limite on obtient au sens des distributions: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon(0, \cdot) = K(t, \cdot)$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon(t, \cdot) = \delta_0$ la masse de Dirac en 0.

On regarde alors $J_\epsilon(s) = \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon(s, x)u(s, x)$. Cette quantité est bien définie car u est suffisamment décroissante, et vérifie:

$$\frac{d}{ds} J_\epsilon(s) = \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon u^p - \Delta v_\epsilon u + v_\epsilon \Delta u = \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon u^p$$

les intégrations par parties étant valides car u est suffisamment décroissante.

Or le noyau v_ϵ dans l'intégrale précédente est une mesure de masse totale 1, et on peut donc appliquer l'inégalité de Jensen:

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon u^p \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon u \right)^p$$

soit:

$$\frac{d}{ds} J_\epsilon(s) \geq J_\epsilon(s)^p$$

En intégrant cette inégalité il vient:

$$\frac{1}{1-p} (J_\epsilon(t)^{1-p} - J_\epsilon(0)^{1-p}) \geq t$$

Les remarques du début de la preuve sur le comportement de v_ϵ quand $\epsilon \rightarrow 0$ donnent: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(t) = u(t, 0)$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(0) = J_0(t)$. On a donc obtenu:

$$J_0(t)^{1-p} - u(t, 0)^{1-p} \geq (1-p)t$$

Chapter 6

Distinction des régimes explosifs de type I et type II, analyse du type I pour (NLH)

6.1 Philosophie des explosions de type II

Nous avons vu dans la section précédente que les équations considérées admettent des solutions explosives pour une certaine gamme de non-linéarités (conditions sur p pour (NLH), (NLW) et (NLS)). Nous souhaitons maintenant comprendre comment se forment ces explosions.

Certains lecteurs ont pu se dire: "c'est normal d'avoir des explosions, on a mis une non-linéarité assez forte pour qu'elle l'emporte sur le terme linéaire". Ce qui soulève la question suivante: dans quelle mesure chacun des termes contribue-t-il à la formation de la singularité?

-scattering Si le terme linéaire l'emporte, on dit alors qu'il y a "scattering" (dispersion), la solution se disperse car elle se comporte en temps long comme une solution de l'équation linéaire.

-type I: explosion EDO Si la non-linéarité l'emporte, la solution se comporte comme une solution de l'équation purement non-linéaire, $\frac{d}{dt}u = u^p$ par exemple pour (NLH). On appelle cette manière d'exploser une explosion de type I.

-explosion de type II Enfin, si la formation de singularité est due à la contribution simultanée des deux termes linéaire et non-linéaire, on appelle ce phénomène explosion de type II.

Bien sûr, des définitions plus précises et spécifiques à chaque équation seront données par la suite.

L'analyse des explosions de type II est reléguée au chapitre suivant. Nous allons maintenant examiner l'explosion de type I pour (NLH) et le scattering pour (NLW).

6.2 Explosion de type I pour (NLH)

La classification des explosions pour (NLH) prend la forme suivante:

Définition 6.2.1. Soit u une solution de (NLH) qui explose au temps T .

- On dit que l'explosion de u est de type I si u satisfait $\|u\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}$.
- On dit que l'explosion de u est de type II si cette inégalité n'est pas vérifiée: $\limsup_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u\|_{L^\infty} = +\infty$.

L'explication de cette classification est la suivante. En appliquant la formule de Duhamel à u on obtient:

$$u(t, \cdot) = S_t^H(u_0) + \int_0^t S_{t-s}^H(|u(s, \cdot)|^{p-1}u(s, \cdot))$$

Or le semi-groupe de la chaleur $(S_t^H)_{t \geq 0}$ est contractant sur L^∞ : $\|S_t^H(u)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$. On obtient donc l'estimation suivante sur la croissance de u :

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|u\|_{L^\infty}^p$$

Cette estimation est la version intégrée du fait qu' u croisse au pire comme la solution de l'EDO $\frac{d}{dt}u = u^p$. Dans le cas où u a effectivement cette croissance, on est face à une explosion de type I.

Mais supposons (de manière idéalisée) que Δu et $|u|^{p-1}u$ se compensent pour donner une croissance plus faible: $\frac{d}{dt} \|u\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty}^q$ pour $q < p$. Les solutions de cette EDO sont sous la forme $\frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{q-1}}}$ et comme $q < p$ on a: $\frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \underset{t \rightarrow T}{=} o\left(\frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{q-1}}}\right)$. Nous sommes alors face à une explosion de type II.

Cette définition est donc cohérente avec le paragraphe d'introduction.

On a le résultat suivant pour (NLH) en sous-critique:

Théoreme 6.2.1. [?] On suppose $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Alors il n'existe pas d'explosions de type II. Toutes les explosions sont de type I.

En d'autres termes, dans le cas sous-critique, c'est la non-linéarité qui l'emporte. Ce résultat est affiné par le théorème suivant:

Théoreme 6.2.2. [?] On suppose $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Soit u une solution qui explose en temps T et telle que $\|u_0\|_{C^2} \leq C_0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C = C(\epsilon, C_0, T)$ telle que:

$$\left| \frac{d}{dt}u(t, x) - |u(t, x)|^{p-1}u(t, x) \right| \leq \epsilon |u(t, x)|^p + C$$

Les preuves de ces théorèmes sont plus longues et plus compliquées que les résultats présentés précédemment. C'est pourquoi nous renvoyons le lecteur aux papiers originaux s'il désire en savoir plus.

De plus, la condition p sous critique n'est pas optimale. La classification exacte des types d'explosions possibles en fonction de la non-linéarité a été effectuée, nous en reparlerons dans le chapitre "le portrait de phase" dédié à ce genre de question.

Chapter 7

Analyse des explosions de type II

Nous avons expliqué dans le chapitre précédent pourquoi une explosion de type II était a priori un phénomène complexe, faisant interagir la partie linéaire et la partie non linéaire de l'équation, et ce à tout instant suffisamment proche du temps d'explosion. On a l'intuition qu'un tel comportement n'est pas possible pour n'importe quel profil de fonction. Dans la première partie de ce chapitre, nous verrons que lors d'une explosion de type II, un soliton se concentre en un point de l'espace, prouvant alors l'existence d'un profil asymptotique. Cela se traduit sous la forme: $u \sim Q_\lambda$ avec $\lambda \rightarrow 0$

Cela nous donne une première information pour traquer l'existence d'explosions de type II: il faut que la concentration d'un soliton soit possible. Pour (NLS) cela implique une non-linéarité au moins L^2 -critique. De manière générale pour une d'autres EDPs d'évolution non linéaires, il faut une non-linéarité assez forte: $p \leq p_{critique}$, $p_{critique}$ étant déterminé par des relations entre espaces fonctionnels (type injection de Sobolev). Cela donne donc une condition en un sens purement "énergétique".

Une explosion concentre donc un soliton. Mais un soliton en soit, par exemple ceux que nous avons vu pour (HHF) et (NLS), ne sont pas des objets explosifs! Pour que la concentration d'un soliton soit possible, il faut que la dynamique de l'EDP près de la famille de solitons $(Q_\lambda)_{\lambda>0}$ le permette. On est donc amené à étudier la dynamique au voisinage de la famille de solitons. Le fait que celle-ci permette de telles explosions impose donc une nouvelle condition qui n'est pas nécessairement la identique à la condition "énergétique" décrite dans le paragraphe précédent. Par exemple, pour (HHF) nous verrons que la concentration d'un profil Q^1 est possible alors que la concentration des profils Q^k pour $k > 1$ ne l'est pas. Ceci sera le sujet de la deuxième section de ce chapitre.

7.1 Existence de profils asymptotiques pour une explosion de type II

7.1.1 (NLS) L^2 -critique et L^2 -sous-critique

Dans cette section, nous n'allons pas montrer que le profil asymptotique est un soliton (résultat ouvert?) mais nous allons montrer qu'une explosion concentre une masse au moins égale à celle du soliton.

On se place en régime L^2 critique ou sous-critique: $p \leq 1 + \frac{4}{N}$. On cherche à comparer les parties linéaires et non linéaires de l'équation au travers des fonctionnelles dont elles dérivent.

L'injection de Sobolev $H^1 \subset L^{p^*}$ s'écrit:

$$\| u \|_{L^{p^*}} \leq C \| \nabla u \|_{L^2}$$

L'inégalité de Holder permet donc d'estimer la norme L^{p+1} en interpolant les normes L^2 et L^{p^*} :

$$\| u \|_{L^{p+1}} \leq C \| u \|_{L^2}^{1-\theta} \| u \|_{L^{p^*}}^\theta \leq C \| u \|_{L^2}^{1-\theta} \| \nabla u \|_{L^2}^\theta$$

où θ est donné par la relation: $\frac{1}{p+1} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p^*}$ et p^* est donné par: $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{N}$. Cette inégalité s'appelle une inégalité de type Gagliardo-Nirenberg. On peut maintenant comparer les deux termes de l'énergie de (NLS) via:

$$\int |u|^{p+1} \leq C \| u \|_{L^2}^{(1-\theta)(p+1)} \| \nabla u \|_{L^2}^{(\theta)(p+1)}$$

Dans le cas L^2 critique on trouve $\theta(p+1) = 2$ et dans le cas sous-critique $\theta(p+1) < 2$.

concentration de la masse pour le régime L^2 critique

On se place dans le cas L^2 critique. La constante dans l'inégalité précédente est en fait reliée au soliton.

Lemme 7.1.1. *On suppose $p = 1 + \frac{4}{N}$.*

Alors la constante optimale (i.e. la plus petite) dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg précédente est $C_{opt} = \frac{2}{\|Q\|_{L^2}^2}$

Preuve 7.1.1. étape 1: existence d'un minimiseur pour cette constante

Minimiser cette constante revient à déterminer:

$$\frac{1}{C_{opt}} = \inf_{u \in H^1} \frac{\| u \|_{L^2}^{p-1} \| \nabla u \|_{L^2}^2}{\| u \|_{L^{p+1}}^{p+1}} := \inf_{u \in H^1} G(u)$$

Cet infimum est strictement positif, à cause justement de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

Soit u_n une suite minimisante: $u_n \in H^1$ et $\lim G(u_n) = \inf G$. Quitte à effectuer un changement d'échelle et une multiplication par un scalaire, on peut supposer que pour tout n , $\| u \|_{L^2} = 1$ et $\| u \|_{L^{p+1}} = 1$. G est en effet invariante par ces deux opérations. Le fait que $\lim G(u_n) = \inf G$ impose alors $\lim \| u_n \|_{L^2} = \frac{1}{C_{opt}}$.

Pour obtenir de la compacité pour la suite u_n , on applique le lemme de concentration compacité (son énoncé et sa preuve sont en [?], l'énoncé original et sa preuve sont dans [?]). L'évanescence est impossible car $\| u \|_{L^{p+1}} = 1$. La dichotomie est également impossible. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe deux suites v_n et w_n de H^1 données par ce lemme (en omettant l'extraction près), telles que:

$$\begin{aligned} \text{supp}(v_n) \cap \text{supp}(w_n) &= \emptyset \\ \int |v_n|^2 &\rightarrow \alpha, \quad \int |w_n|^2 \rightarrow 1 - \alpha \\ \int |v_n|^{p+1} \int |w_n|^{p+1} &\rightarrow 1 \\ \int |\nabla v_n|^2 \int |\nabla w_n|^2 &\rightarrow \beta \end{aligned}$$

pour deux constantes $\alpha < 1$ et $\beta \leq \frac{1}{C_{opt}}$.

On calcule alors l'énergie du profil $v_n + w_n$ pour aboutir à une contradiction.

$$\frac{(\|v_n\|_{L^2}^{p-1} + \|w_n\|_{L^2}^{p-1})(\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_n\|_{L^2}^2)}{(\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1})} = \frac{\|v_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 + \|w_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla w_n\|_{L^2}^2}{\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}} + \frac{\|v_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla w_n\|_{L^2}^2 + \|w_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2}{\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}}$$

On utilise alors l'inégalité: $\frac{\|u\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}} \geq \frac{1}{C_{opt}}$ pour montrer:

$$\frac{\|v_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 + \|w_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla w_n\|_{L^2}^2}{\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}} \geq \frac{1}{C_{opt}}$$

et de plus, comme on peut supposer $\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 \rightarrow \gamma > 0$ (car si $\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$ et $\|\nabla w_n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$ alors on aurait $\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \rightarrow 0$ par l'injection de Sobolev ce qui est impossible). On a donc:

$$\lim \frac{\|v_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla w_n\|_{L^2}^2 + \|w_n\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla v_n\|_{L^2}^2}{\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}} \geq \gamma \alpha > 0$$

D'où:

$$\lim \frac{(\|v_n\|_{L^2}^{p-1} + \|w_n\|_{L^2}^{p-1})(\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_n\|_{L^2}^2)}{(\|v_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1})} > \frac{1}{C_{opt}}$$

ce qui est absurde.

Nous sommes donc dans le cas de la compacité du lemme concentration-compacité:

A translation et extraction près, u_n converge dans H^1 vers une limite u . G étant continue pour la topologie de H^1 , $G(u) = \lim G(u_n) = \inf G$.

étape 2: ce minimiseur est en fait Q a translation et scaling près

Tout d'abord, par l'inégalité de convexité pour le gradient, on peut supposer que u est positif. Comme u est un minimiseur de G , c'est en particulier un point critique, et cette fonction vérifie donc l'équation d'Euler-Lagrange:

$$\Delta u - \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^{p-1}} u + (p-1) \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}} |u|^{p-1} u = 0$$

au sens des distributions. Comme G est invariant par multiplication par un scalaire et changement d'échelle, on peut supposer que:

$$\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^{p-1}} = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^2}^{p-1}} \quad \text{et} \quad \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}} = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1}}$$

l'équation d'Euler-Lagrange se réécrit donc:

$$\Delta u - \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^2}^{p-1}} u + (p-1) \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1}} |u|^{p-1} u = 0$$

On va maintenant calculer ces deux constantes dans l'équation. On rappelle que Q vérifie:

$$\Delta Q - Q + |Q|^{p-1}Q = 0$$

En multipliant cette équation par \bar{Q} et en intégrant on obtient:

$$\int |\nabla Q|^2 - \int |Q|^2 + \int |Q|^{p+1} = 0$$

En multipliant par $Q + x \cdot \nabla Q$ et en utilisant l'identité de Pohozaev on obtient:

$$\frac{1}{2} \|\nabla Q\|_{L^2}^2 = \text{ce qu'il faut} \|\| Q \|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

En fait, u vérifie donc:

$$\Delta u - u + |u|^{p-1}u = 0$$

Or nous avons vu que toute solution de cette équation est, à translation et scaling près, égale à Q . Donc:

$$u = Q$$

étape 3: calcul de la constante

On peut alors calculer:

$$\frac{1}{C_{opt}} = \frac{\|Q\|_{L^2}^{p-1} \|\nabla Q\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1}} = \frac{\|Q\|_{L^2}^{p-1}}{2}$$

d'où le résultat du lemme.

L'inégalité suivante est une conséquence directe du lemme précédent:

Lemme 7.1.2. *En régime critique:*

$$F(u) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \left(1 - \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}} \right)^{p-1} \right)$$

En particulier, si $u \neq 0$ et u a une masse plus petite que Q : $\|u\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ alors son énergie est strictement positive: $F(u) > 0$.

Nous sommes maintenant équipés pour montrer la concentration de la masse lors d'une explosion.

Théorème 7.1.1. *On suppose $p = 1 + \frac{4}{N}$. Soit u une solution radiale, centrée en 0 qui explose au temps T .*

Alors pour tout $R > 0$:

$$\liminf_{t \rightarrow T} \int_{B(0,R)} |u(t)|^2 \geq \|Q\|_{L^2}^2$$

Remarque 7.1.1. *Ce résultat montre qu'une "bulle" se concentre lorsque l'on considère une explosion radiale. La géométrie de l'ensemble des points autour desquels une solution explose (se concentre) peut être plus compliquée. Par exemple, une solution peut exploser le long d'une courbe.*

Preuve 7.1.2. On suppose par l'absurde que ce résultat est faux pour une solution u : il existe une suite de temps $t_n \rightarrow T$, un rayon $R > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que:

$$\int_{B(0,R)} |u(t_n)| \leq \|Q\|_{L^2} - \epsilon$$

Comme u explose en T , la théorie de Cauchy nous donne: $\lim_{t \rightarrow T} \|\nabla u\|_{L^2} = +\infty$.

Pour voir le profil qui se concentre, on applique le scaling de l'équation en posant $u_n = u(t_n)_{\lambda_n}$ avec $\lambda_n = \frac{1}{\|\nabla u(t_n)\|_{L^2}}$, où $f_\lambda(\cdot) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} f(\frac{\cdot}{\lambda})$. La suite de fonction u_n ainsi obtenue vérifie:

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2} &= \|u(t_n)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2} \\ \|\nabla u_n\|_{L^2} &= 1 \\ F(u_n) &= \lambda_n^2 E(u(t_n)) = \lambda_n^2 E(u(0)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Mais d'autre part:

$$E(u_n) = \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

Donc $\frac{1}{p+1} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \rightarrow \frac{p+1}{2} \neq 0$.

Comme les u_n sont radiales, on n'est pas obligé de se servir du lemme de concentration compacité, car l'injection des fonctions H^1 dans L^q pour $1 < q < p^*$ est compacte (l'énoncé exact de ce fait et sa preuve sont en annexe). Il existe donc un profil limite $v \in H^1$ radial, tel que $u_n \rightarrow v$ fortement dans L^q et $u_n \rightarrow v$ faiblement dans H^1 .

v a une norme L^{p+1} non nulle, donc v est non nul. de plus, comme la norme du gradient est semi-continue inférieurement pour la convergence faible, on a $F(v) \leq 0$. Mais l'on a également $\|v\|_{L^2}^2 \leq \|Q\|_{L^2}^2 - \epsilon$. En effet:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2} &= \sup_{f \in L^2, \|f\|=1} \langle v, f \rangle \\ &\leq \sup_{f \in L^2, \|f\|=1} \lim \langle u_n, f \rangle \\ &\leq (\|Q\|_{L^2}^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Car $\langle u_n, f \rangle = \int_{B(0, \frac{R}{\lambda_n})} f u_n + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{R}{\lambda_n})} f u_n$, et :

$$\int_{B(0, \frac{R}{\lambda_n})} f u_n \leq (\|Q\|_{L^2}^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{R}{\lambda_n})} f u_n \rightarrow 0$$

Or nous avons vu que si v a une masse plus petite que celle du soliton, son énergie est positive, d'où la contradiction.

impossibilité d'explosion pour le régime L^2 sous-critique

La simple inégalité de Gagliardo-Nirenberg du début de cette section implique l'impossibilité d'explosions en régime L^2 sous-critique.

Théoreme 7.1.2. Si $p < 1 + \frac{4}{N}$ alors il n'y a pas de solutions explosives pour (NLS)

Remarque 7.1.2. La preuve de l'existence d'explosions par l'identité du viriel donnée au chapitre cinq est donc fine.

Preuve 7.1.3. On suppose par l'absurde que u est une solution qui explose au temps T . Alors $\lim_{t \rightarrow T} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty$. La norme L^2 reste elle constante car c'est une loi de conservation de l'équation: $\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2}$.

Or l'inégalité de Gagliardo Nirenberg impose que si $\|v\|_{L^2} = Cte$ et $\|\nabla v\|_{L^2} \rightarrow +\infty$ alors $F(v) \rightarrow +\infty$. D'où la contradiction car l'énergie est conservée par le flot.

7.1.2 (HHF)

Pour le flot de la chaleur harmonique, lors d'une explosion une bulle se concentre ayant le profil d'une application harmonique asymptotiquement.

Théoreme 7.1.3. [?] Soit $k \in \mathbb{N}^*$, u une solution de (HHF) qui explose au temps $T > 0$.

Alors il existe une suite de temps $t_n \rightarrow T$, $t_n < T$ et une suite de facteurs d'échelle $\lambda_n \rightarrow 0$ telles que:

$$u(t_n) \xrightarrow{H_{loc}^2(|0, +\infty[)} Q^k$$

7.1.3 (NLH)

On se place dans le cas sur-critique $p > \frac{N+2}{N-2}$, étant donné que l'on a déjà vu que seules des explosions de type I pouvaient apparaître dans le cas sous-critique.

Théoreme 7.1.4. [?] Soit u une solution radiale de (NLH), explosant au temps $T > 0$. On pose $w^*(x) = \lim_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(t, \sqrt{T-t}x)$.

Alors w^* est bien définie, et est égale soit au profil stationnaire ϕ^* , soit à une solution bornée de l'équation (3).

7.2 Analyse de la dynamique près de la famille de solitons, existence et non-existence de solutions explosives

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une explosion concentre un profil spécifique. Cette information va être notre point de départ pour construire une solution explosive pour (HHF). En effet, nous avons vu que pour exploser, il fallait concentrer une bulle $Q_{\lambda(t)}^k$ avec $\lambda(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$. La variété unidimensionnelle de solitons $(Q_{\lambda}^k)_{\lambda > 0}$ est une branche de points stationnaires de même énergie. On peut donc tenter d'examiner la dynamique près de cette branche, et voir s'il existe une manière de la "remonter". C'est-à-dire, voir s'il existe une solution u telle que pour tout t u soit proche de $Q_{\lambda(t)}^k$, et que $\lambda(t)$ tende vers 0 en temps fini.

7.2.1 Intuition avec le comportement en dimension finie

Nous commençons par rappeler le comportement des trajectoires au voisinage d'un point stationnaire en dimension finie, lorsque les valeurs propres de l'opérateur linéarisé n'ont pas de partie réelle nulle.

Soit un système dynamique donné par $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) où f est continûment différentiable. On note $f_t(x)$ la solution issue de x .

Théoreme 7.2.1. *On suppose que 0 est un point fixe et on nomme L l'opérateur linéarisé autour de 0.*

On suppose que L n'admet pas de valeurs propres dont la partie réelle s'annule, et on note n^- la somme des dimensions géométriques associées aux valeurs propres ayant une partie réelle négative, et n^+ celle pour les valeurs propres ayant une partie réelle positive.

Alors la dynamique de f est topologiquement conjuguée, localement, à la dynamique donnée par l'opérateur linéarisé. Il existe deux ouverts O_1 et O_2 dans \mathbb{R}^d et un difféomorphisme h entre les deux, tels que $f_t(x) = h^{-1}(L_t(h(x)))$.

En particulier, localement, toutes les trajectoires s'éloignent de 0 à une vitesse exponentielle, à l'exception d'une sous-variété de dimension n^-

Dans le cas de (HHF), la famille de solitons est une famille de points stationnaires. L'opérateur linéarisé admet donc une valeur propre nulle, de vecteur propre le vecteur tangent de la variété $(Q_\lambda^k)_{\lambda>0}$. On n'est donc pas dans le cas du théorème précédent, mais plutôt de son adaptation à ce cas dégénéré: le théorème de la variété centrale. De plus, l'opérateur linéarisé est l'opposé d'un opérateur auto-adjoint positif. Je me permets donc d'énoncer un cas spécial du théorème de la variété centrale.

Il est important d'observer que lorsqu'une valeur propre associée à un vecteur propre v^- a une partie réelle négative, la trajectoire $L_t(v^-)$ converge exponentiellement vite vers 0. Lorsqu'elle est nulle, soit la valeur propre est nulle et les vecteurs propres sont fixes par la dynamique linéarisé, soit elle est purement imaginaire et les vecteurs propres tournent autour de 0. Dans les deux cas, cela signifie que la stabilité vis à vis du point fixe est donnée par une approximation polynomiale plus poussée que la simple linéarisée. Les termes d'ordres supérieurs sont négligeable devant les termes linéaires près du point fixe, et on s'attend à ce que la "décroissance exponentielle" subie par les vecteurs v^- persiste pour la vraie dynamique.

Théoreme 7.2.2. *On suppose que $n^+ = 0$. On note n_0 la somme des dimensions géométrique associées aux valeurs propres de partie réelle nulle.*

Alors il existe une variété de dimension n_0 notée W_0 , tangente au sous-espace somme des sous-espaces associés aux valeurs propres de partie réelle nulle, telle que localement, toute trajectoire du système dynamique original converge vers W_0 à une vitesse exponentielle.

Ce théorème stipule que la bonne compréhension du système dynamique passe par la bonne compréhension de la dynamique sur cette variété W_0 , appelée variété centrale.

Un exemple important, car étant la simplification de ce qui va suivre, est donné par le système dynamique dans l'espace:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y^2 \\ \dot{z} &= -z\end{aligned}$$

Le point fixe est l'origine, ainsi que l'ensemble de l'axe Ox . La variété centrale est le plan Oxy . On voit que la branche Ox est stable pour $y > 0$ et que la dynamique remonte cette branche en se dirigeant vers la droite, et qu'elle est instable pour $y < 0$.

7.2.2 Impossibilité de l'explosion pour (HHF) pour $k > 1$

On sait grâce au théorème de la section précédente que si une explosion a lieu, celle-ci concentre une bulle ayant un profil de fonction harmonique. Comme les données initiales k -corotationnelles donnent lieu à des trajectoires k -corotationnelles, et que les seules fonctions harmoniques k -corotationnelles sont les solitons Q^k (cf chapitre 4), si u explose, alors asymptotiquement $u \sim Q_{\lambda(t)}^k$ où $\lambda(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow T$. Pour savoir si de telles explosions sont possibles, nous allons donc étudier la dynamique au voisinage de la famille $(Q_\lambda^k)_{\lambda > 0}$. C'est-à-dire, nous allons étudier les trajectoires de l'équation (HHF) pour des données initiales dans un voisinage de Q^k .

Pour le problème (HHF) concernant les solutions k -équivariantes pour $k \geq 2$ l'opérateur linéarisé est suffisamment coercif près de la famille de solitons. Si l'on perturbe Q de ϵ assez petit, alors $\epsilon \rightarrow 0$ suffisamment rapidement pour empêcher la solution d'exploser.

Au voisinage de Q_λ^k on a :

$$(-\partial_{rr} - \frac{\partial_r}{r} + k^2 \frac{f(\cdot)}{r^2})(Q_\lambda^k + \epsilon) = H_\lambda^k(\epsilon) + \frac{O(\epsilon^2)}{r^2}$$

où $H_\lambda^k = -\partial_{rr} - \frac{\partial_r}{r} + k^2 \frac{f(Q_\lambda^k)}{r^2}$ est l'opérateur linéarisé au voisinage de Q_λ^k .

Un calcul permet de voir que cet opérateur est symétrique sur $C_c^\infty(]0, +\infty[)$.

Le vecteur tangent à la branche $(Q_\lambda^k)_{\lambda > 0}$ est :

$$\frac{d}{d\lambda} Q_\lambda^k = -\frac{1}{\lambda} (\Lambda Q^k)_\lambda$$

où $\Lambda f(r) = r f'(r)$.

On va désormais fixer $\lambda = 1$ et étudier la dynamique au voisinage de Q^k pour $k \geq 4$. En effet, avec le scaling de l'équation, étudier les trajectoires près d'un point de la branche, revient à étudier les trajectoires près de n'importe quel point de la branche.

Tout d'abord, il convient de décomposer la trajectoire comme présenté dans la section précédente.

Lemme 7.2.1. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que si u_0 vérifie $\|u_0 - Q^k\|_X \leq \delta$, alors il existe un temps $s > 0$, un paramètre $\lambda : [0, s[\rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^1 et une fonction $\epsilon : [0, s[\rightarrow]0, +\infty[X$ tel que pour $t \leq s$ l'on ait :*

$$u(t) = Q_{\lambda(t)}^k + \epsilon(t)$$

où ϵ vérifie la condition d'orthogonalité $\langle \epsilon(t), (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \rangle = 0$

Preuve 7.2.1. *Nous ne donnerons ici qu'un schéma de preuve.*

Le fait que pour v assez proche de Q^k la décomposition $v = Q_\lambda^k + \epsilon$ avec la condition $\langle \epsilon(t), (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \rangle = 0$ est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites. En effet, après calcul on se rend compte que la fonction $(\Lambda Q^k)_{\lambda(t)}$ est bien dans l'espace d'énergie X

Le fait que cette décomposition soit possible et régulière ($\lambda \in C^1$) sur un intervalle de temps dépendant seulement de la distance initiale à Q provient alors de la régularité du flot de l'équation.

On peut alors estimer l'évolution du paramètre $\lambda(t)$:

Lemme 7.2.2. *Il existe une constante C telle que:*

$$|\lambda_t| \leq C\lambda \left\| \frac{\epsilon}{r^2} \right\|_{L^2}^2$$

Preuve 7.2.2. *On a:*

$$H_\lambda^k(\epsilon(t)) + \frac{O(\epsilon^2)}{r^2} = \frac{d}{dt}(Q_{\lambda(t)}^k + \epsilon(t)) = \frac{-\lambda_t}{\lambda}(\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} + \epsilon_t$$

En intégrant l'expression précédente contre $(\Lambda Q^k)_{\lambda(t)}$ il vient:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_t}{\lambda} \left\| (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \right\| &= \langle H_\lambda^k(\epsilon), (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \rangle + \left\langle \frac{O(\epsilon^2)}{r^2}, (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \right\rangle \\ &= \langle \epsilon, H_\lambda^k((\Lambda Q^k)_{\lambda(t)}) \rangle + \left\langle \frac{O(\epsilon^2)}{r^2}, (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{O(\epsilon^2)}{r^2}, (\Lambda Q^k)_{\lambda(t)} \right\rangle \end{aligned}$$

On utilise alors la relation $\left\| (\Lambda Q^k)_\lambda \right\|_{L^2}^2 = \lambda^2 \left\| (\Lambda Q^k) \right\|_{L^2}^2$ pour finir d'estimer:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{O(\epsilon^2)}{r^2}, (\Lambda Q^k)_\lambda \right\rangle \right| &= \left| \lambda^2 \left\langle \frac{O(\epsilon^2)}{r^4}, (r^2 \Lambda Q^k)_\lambda \right\rangle \right| \\ &\leq \lambda^2 C \left\| \frac{\epsilon^2}{r^4} \right\|_{L^1} \left\| r^2 \Lambda Q^k \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \lambda^2 C \left\| \frac{\epsilon}{r^2} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

car pour $k \geq 4$ on a: $\left\| r^2 \Lambda Q^k \right\|_{L^\infty} < +\infty$

Maintenant, il reste à montrer que $\left\| \frac{\epsilon}{r^2} \right\|_{L^2}$ décroît suffisamment en temps pour que λ reste petit (a priori on ne sait même pas que cette quantité est finie).

Cette décroissance, due à la coercivité de H_λ^k est montrée par dans sous une forme très différente car les auteurs n'utilisent pas ce cadre de travail. L'auteur montre une estimation qui est équivalente à:

Proposition 7.2.1. *On suppose $k \geq 4$.*

Il existe pour δ assez petit une constante C_δ , avec $C_\delta \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$, telle que si u_0 vérifie $\left\| u_0 - Q^k \right\|_X \leq \delta$, et que la solution issue de u_0 vit jusqu'au temps T , alors:

$$\left\| \frac{\epsilon}{r^2} \right\|_{L^2_{[0,T]} L^2_r} \leq C(\delta)$$

On obtient alors le théorème précédent comme conséquence du lemme et de la proposition précédente.

Théoreme 7.2.3. [?] On suppose $k \geq 4$.

Alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que si u_0 vérifie: $\|u_0 - Q^k\|_X \leq \delta$, alors la solution issue de u_0 est globale. De plus, le paramètre λ mesurant l'écart à la famille de solitons converge asymptotiquement: il existe $\lambda_\infty > 0$ tel que $\lambda(t) \rightarrow \lambda_\infty$

Ce résultat a été amélioré par dans [?]. Les auteurs montrent qu'il est également vrai pour $k = 3$. Pour $k = 2$, ils montrent que le paramètre λ n'est plus forcément convergent en temps long, mais il ne peut pour autant pas tendre vers 0 en temps fini.

7.2.3 Explosion pour $k = 1$

Nous allons essayer d'expliquer la démarche adoptée dans avec les notions de la dimension finie expliquées dans la première sous-section.

Dans la sous-section précédente, nous avons vu que pour $k \geq 3$ l'opérateur linéarisé était suffisamment coercif pour empêcher le déplacement le long de la branche de solitons:

- $\ker(H_\lambda^k) = (\Lambda Q^k)_\lambda$ dans X et H_λ^k est auto-adjoint sur X .
- H_λ^k est assez coercif: l'évolution de ϵ introduit précédemment est donnée par:

$$\epsilon_t = H_\lambda^k(\epsilon) + NL - \frac{1}{\|(\Lambda Q^k)_\lambda\|_{L^2}} \langle NL, (\Lambda Q^k)_\lambda \rangle$$

la partie linéaire, $H_\lambda^k(\epsilon)$, permet alors de compenser la non-linéarité $NL - \frac{1}{\|(\Lambda Q^k)_\lambda\|_{L^2}} \langle NL, (\Lambda Q^k)_\lambda \rangle$ et de faire décroître ϵ assez rapidement.

Quels sont les changements pour le cas 1-corotationnel? Désormais, on allège les notations en omettant le 1: $Q^1 = Q$, et $H^1 = H$

Pour $k = 1$, ΛQ^1 n'est plus dans l'espace L^2 , et n'est même pas dans le dual de l'espace d'énergie X . La décomposition utilisée: $X = \mathbb{R}Q + (\mathbb{R}Q)^{orthogonal}$ n'a donc plus de sens.

Il existe un théorème de la variété centrale en dimension infinie, stipulant que si l'opérateur linéarisé possède un noyau de dimension finie, alors il existe une variété centrale tangente à ce noyau possédant les mêmes propriétés que celle du théorème énoncé précédemment. Ici, ce théorème n'est pas applicable car $\ker H = \emptyset$ dans X .

Cependant, il va exister un "équivalent" de cette variété centrale, qui nous aidera à nous déplacer le long de la branche de solitons $(Q_\lambda)_{\lambda > 0}$. De plus, l'évolution des coordonnées sur cette variété centrale sera donnée par un système dynamique comme dans l'exemple de dimension finie, et ce système dynamique sera polynomial car l'on travaille au voisinage de points fixes. On va donc pouvoir comprendre l'évolution de la trajectoire en examinant l'évolution des coordonnées sur la variété centrale qui est plus simple à comprendre.

Lemme 7.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un profil $Q_{\lambda,b}$ pour $\lambda > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) $Q_{\lambda,0} = Q_\lambda$

(ii) $\frac{d}{db_i} Q_{\lambda,0} = T_\lambda^i$ ie la variété $(Q_{\lambda,b})_{\lambda>0, b \in \mathbb{R}^n}$ est tangente à l'espace vectoriel $Vect((T_\lambda^i)_{1 \leq i \leq n})$ en $Q_{\lambda,0}$

(iii) $\frac{d}{d\lambda} Q_{\lambda,b} = -\frac{1}{\lambda} \Lambda Q_{\lambda,b}$ ie λ est bien le paramètre d'échelle.

(iv)

$$\begin{aligned} (-\partial_{rr} - \frac{\partial_r}{r} + \frac{f(\cdot)}{r^2})(Q_{\lambda,b}) &= \frac{-b_1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} Q_{\lambda,b} \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n (-(2i+1 + \frac{2}{|\log(b_1)|}) b_i b_1 + b_{i+1}) \frac{\partial}{\partial b_i} Q_{\lambda,b} \\ &+ \text{reste négligeable} \end{aligned}$$

L'évolution des paramètres est alors donnée de manière approchée par le système:

$$\begin{cases} -\lambda_t \lambda &= -b_1 \\ b_{it} &= \frac{1}{\lambda^2} (-(2i+1 + \frac{2}{|\log(b_1)|}) b_1 b_i + b_{i+1}) \end{cases}$$

Le système dynamique donnant le comportement des paramètres permet de comprendre plus facilement l'évolution de ces derniers. Il admet des trajectoires pour lesquelles λ touche 0 en temps fini avec des vitesses asymptotiques différentes. Cela signifie que les profils $Q_{\lambda,b}$ mènent à des explosions avec diverses vitesses.

Lemme 7.2.4. *Pour tout n , il existe une trajectoire du système dynamique précédent convergent vers 0, avec comme asymptotique:*

$$\lambda(t) \sim \frac{(T-t)^n}{|\log(T-t)|^{\frac{2n}{2n-1}}}$$

On voit donc comment la "variété centrale" que l'on a construite permet d'exhiber des explosions et de prédire leurs vitesses. Évidemment, il faut clore la démonstration de leur existence en montrant que cette dynamique approchée reste valide en temps long. Ce résultat est hors de portée de ce mémoire. Dans les auteurs montrent effectivement que:

Théoreme 7.2.4. *[?] [?] Il existe pour (HHF) dans le cas 1-corotationnel un nombre dénombrable de vitesses d'explosion. Pour tout $n \geq 1$ on peut trouver une solution de (HHF) explosant à un temps $T > 0$ telle que le paramètre λ vérifie:*

$$\lambda(t) \sim \frac{(T-t)^n}{|\log(T-t)|^{\frac{2n}{2n-1}}}$$

Chapter 8

Conclusion, perspectives et la question du portrait de phase

Dans ce mémoire nous avons vu que l'étude des explosions pour les équations non-linéaires peut se révéler très intéressante. Mais il existe beaucoup de questions que nous n'avons pas abordées.

On peut s'intéresser par exemple à la persistance des phénomènes étudiés si l'on ne se place plus sur l'espace entier mais sur un ouvert borné, ou alors sur un certain type de variété, ou encore si l'on modifie la métrique sur \mathbb{R}^N . On peut essayer de voir si d'autres types d'explosions sont possibles, par exemple des explosions non plus en un point mais en plusieurs points ou bien sur un ensemble encore plus compliqué.

On peut également vouloir dresser le portrait de phase des solutions. C'est-à-dire, étant donné une donnée initiale, être capable de dire si la solution va exploser, se disperser, converger vers un autre objet (etc...) ou si elle va se décomposer en une somme de plusieurs profils, chacun possédant une dynamique asymptotique propre (par exemple une partie de la fonction tend vers un soliton alors que le reste se disperse).

Le soliton est un des premier objet non-linéaires que l'on rencontre (par exemple pour (NLS) toute donnée initiale de masse strictement plus petite va être dispersée). Il est donc très important de dresser ce portrait de phase au voisinage de celui-ci dans le but de comprendre la dynamique générale. Cet objectif a été réalisé, par exemple, pour l'équation KdV récemment par Martel-Merle-Raphael, [?], [?].

Part III

Mémoire de M1: étude mathématiques de modèles en neurosciences

Chapter 9

Compte-rendu du déroulement du stage

Ce document est la synthèse du stage que j'ai effectué lors du second semestre de ma première année de master. Il est en deux parties. Cette première partie décrit de manière générale ce que j'ai été amené à faire lors de ces cinq mois à l'étranger. La seconde est consacrée à la présentation plus précise de l'étude d'un modèle, qui aura été le travail le plus conséquent réalisé lors de ce stage. Il m'avait été demandé de faire un rapport plus concis, mais je pense que les idées principales de la deuxième partie ne sont pas difficiles à comprendre et qu'une lecture de celle-ci sans rentrer dans le détail des preuves est possible.

Généralités sur le stage:

Le stage a été effectué à l'université autonome de Barcelone, sous la direction de José A. Carrillo, du 04/02/2012 au 29/06/2012. Les buts principaux étaient:

- comprendre en quoi consiste la recherche en mathématiques appliquées aux neurosciences.
- perfectionner mes connaissances en mathématiques de la modélisation, et en apprendre un peu plus sur les thématiques d'actualité dans ce domaine.
- apprendre l'espagnol.
- découvrir la culture catalane et plus généralement la culture espagnole, m'enrichir avec l'expérience de vivre à l'étranger.

Monsieur Carrillo m'avait été recommandé par O. Faugeras que je remercie pour l'aide qu'il m'a apporté.

Déroulement:

Au début du stage j'ai commencé par lire des publications de mathématiques appliquées aux neurosciences, afin de mieux comprendre ce domaine, et de trouver une problématique sur laquelle travailler. Cela a duré environ un mois. Ensuite nous avons décidé de nous focaliser sur l'étude du ring model (voir le mémoire en

deuxième partie de ce document). Tout au long du stage, je lisais des textes portant sur les différentes notions mathématiques abordées. En juin, j'ai étudié d'autres thématiques (hypocoercivité, entropie...) d'actualité dans le domaine des équations aux dérivées partielles, puis j'ai commencé à écrire ce rapport de stage.

Apprentissage de l'espagnol et participation à un séminaire sur les neurosciences

Ce stage a été l'occasion pour moi d'apprendre l'espagnol. J'ai suivi des cours intensifs (deux heures par jour, quatre jours par semaine) pendant deux mois et demi et ai validé ce cours avec la note maximale (d'une valeur de 6ECTS). J'avais toujours voulu parler de manière fluide une autre langue que l'anglais, et j'estime à présent avoir un niveau correct en espagnol. J'ai également pu perfectionner mon anglais, et plus particulièrement mon anglais mathématique, lors de discussions avec mon maître de stage, de conférences, ou d'entretiens avec d'autres mathématiciens.

A. Compte a accepté ma présence au séminaire hebdomadaire de son groupe de travail en neurosciences. Chaque semaine une personne différente présentait une publication d'actualité en neurosciences, qui était alors commentée par l'ensemble du groupe. Cela m'a permis de voir les questions auxquelles les chercheurs tentent de répondre dans ce domaine, où en est la connaissance actuelle et comment un tel groupe de travail fonctionne.

Notions mathématiques abordées

Ce stage a été l'occasion de découvrir de nombreux résultats mathématiques, en mathématiques de la modélisation et également en analyse fonctionnelle. Voici les livres que j'ai pu lire:

- Partial Differential Equations, de Evans:
J'ai lu une bonne partie de ce livre (je connaissais déjà certains résultats avant d'entamer sa lecture grâce aux cours d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles suivis précédemment). Cela m'a été utile notamment pour la compréhension des équations de Fokker-Planck et pour perfectionner mes connaissances en équation aux dérivées partielles en général.
- Delay Equations, fonctionnal-, complex, and nonlinear analysis, de Diekmann, Van Gils, Verduyn Lunel et Walther:
De nombreux travaux d'actualité en mathématiques appliquées aux neurosciences portent sur l'étude de la prise en compte de retards dans les interactions entre neurones. La lecture de ce livre a été utile pour comprendre les équations à retard souvent utilisées.
- Stochastic Differential Equations, de Oksendal:
Ce livre m'a permis de consolider les notions apprises en équations différentielles stochastiques au premier semestre. Le lien entre certaines équations aux dérivées partielles et certains processus stochas-

tiques est souvent utile pour une bonne compréhension des phénomènes modélisés.

- **The Fokker-Planck Equation, de Risken:**
J'ai lu cet ouvrage afin de mieux comprendre les équations de Fokker-Planck, leur provenance et leur propriétés. Bien que ce soit une œuvre difficile car peu rigoureuse, elle donne une bonne intuition pour l'étude de ces équations.
- **A Short Course on Operator Semigroups, de Engel et Nagel:**
Les semi-groupes fortement continus apparaissent automatiquement dès qu'un problème d'évolution est bien posé. Leur compréhension m'a donc été très utile pour aborder certaines publications en équations aux dérivées partielles et pour entamer la lecture du livre sur les équations à retard.
- **Random Perturbations of Dynamical Systems, de Freidlin et Wentzell:**
Lorsque l'on a voulu modéliser une perturbation aléatoire de la dynamique pour le ring model, ce livre m'a été très utile (concernant les résultats sur les grandes déviations et les temps de sortie en particulier).
- **Computational Neuroscience: A Comprehensive Approach, de Chapman et Hall:**
Je n'ai lu que certaines parties de ce livre. Il contient de bons articles sur certains problèmes concernant la modélisation en neurosciences.

En dehors de ces livres, j'ai pu également apprendre en lisant des publications ou des cours en ligne. J'ai lu un cours de Kreyszig d'analyse fonctionnelle, qui m'a permis de comprendre l'obtention des résultats en théorie spectrale des opérateurs à partir de l'analyse complexe. Durant la période de recherche d'une direction pour mon travail, j'ai pu lire de nombreuses publications en neurosciences. Parmi leurs auteurs on pourra citer: Faugeras, Touboul, Roxin, Ermentrout, Hopfield, Ricciardi et d'autres. Fin juin, j'ai commencé à aborder la thématique de l'hypocoercivité et les autres notions gravitant autour (méthodes d'entropie, in-égalités de Sobolev etc...). J'ai ainsi lu des travaux de Villani, Mouhot, Dolbeaut, Perthame et d'autres. Enfin, tout au long de mon stage j'ai assisté à des conférences de mathématiques de la modélisation tenues à l'université. J'ai pu également participer à des mini-cours et à des séminaires.

Remarques personnelles sur le stage

José A. Carrillo a été un encadrant très dynamique et chaleureux, et je le remercie sincèrement de l'attention qu'il m'a portée. Les conditions de travail à l'université étaient bonnes (j'avais un bureau, et la bibliothèque de mathématiques était relativement complète). A noter seulement que la chaleur de juin rend difficile de travailler dans des locaux mal isolés.

Concernant les mathématiques, ce stage aura été l'occasion de porter un regard neuf sur mon travail. J'ai pris beaucoup de recul sur la manière dont j'apprenais les notions jusqu'à présent, dont j'organisais ma

connaissance mathématique, et sur ce que je recherchais dans les mathématiques. Par exemple, j'ai perfectionné ma compréhension du cadre fonctionnel pour traiter les équations aux dérivées partielles. Je me suis rendu compte qu'une parfaite maîtrise de l'analyse fonctionnelle était requise, que je m'efforce depuis lors de posséder. Je pense donc pouvoir aborder ma deuxième année de master plus efficacement: j'ai une idée plus claire de ce que je cherche et de la manière dont je veux l'obtenir. Pour moi, l'objectif principal du stage a été rempli: j'ai pu me faire une idée de ce à quoi la recherche en mathématiques appliquées aux neurosciences ressemble, et j'ai pu découvrir d'autres thèmes d'actualité en mathématiques de la modélisation plus généralement.

Pour finir, ce stage a été une expérience humaine enrichissante. J'ai pu rencontrer de nombreux étrangers provenant de pays différents, et partager ma culture avec la leur. Je pense que les séjours à l'étranger sont parfaits pour susciter la curiosité et la tolérance. En parallèle, l'Espagne était au cœur de l'actualité ces derniers mois, et observer les diverses réactions et pensées d'espagnols et d'étrangers face à la crise était aussi très intéressant.

Chapter 10

Mémoire de stage

10.1 introduction

10.1.1 Avant propos

Ce mémoire est une trace du travail effectué avec mon encadrant José A. Carrillo durant mon séjour de cinq mois à l'université autonome de Barcelone. Là-bas j'ai eu le plaisir de découvrir un peu plus la modélisation mathématique en neurosciences et d'apprendre de nouvelles notions mathématiques. Ce texte ne constitue pas un résumé de tout ce que j'ai pu faire, apprendre ou découvrir durant ce stage. Il est concentré sur l'étude du problème principal sur lequel j'ai travaillé. Plus d'informations sur le stage en général sont disponibles dans la partie précédente.

La rédaction de ce mémoire a été motivée par mon envie d'écrire un texte conséquent à propos d'un thème sur lequel j'avais pu travailler. Le fait de l'écrire en lui-même est bénéfique: chercher à énoncer clairement ses raisonnements permet de vérifier que l'on maîtrise le sujet, et apprendre à rédiger un document de qualité est également utile. Rédiger ce papier est donc venu compléter le travail fourni durant le stage.

La démarche, le fait de s'intéresser aux problématiques abordées, proviennent de mon tuteur, de A. Roxin qui a bien voulu consacrer un peu de son temps à nous aider, et de moi-même. On trouvera dans ce document des résultats que j'ai obtenu ainsi que d'autres issus de livres ou de publications afin de le rendre aussi complet que possible. J'ai trouvé la plupart de ceux de la première partie (parfois en m'apercevant un peu après qu'ils avaient été obtenus par d'autres auparavant). La deuxième partie est une adaptation de résultats de [?], associée à des preuves alternatives des résultats reposant sur l'utilisation de théories développées dans [?] et [?] principalement. L'annexe contient majoritairement des notions provenant de livres, de publications, et d'adaptations d'idées vagues trouvées sur internet lorsque je ne pouvais me procurer les livres que je désirais.

10.1.2 introduction au modèle étudié dans ce mémoire

Des expériences ont permis de constater que dans le cortex visuel primaire (V1), les neurones sont sélectifs à l'orientation du stimulus visuel présent dans leur champ récepteur [?]. Cette sélectivité possède un aspect remarquable: elle ne change pas pour des neurones alignés perpendiculairement au cortex (lorsque

l'on effectue des mesures à l'aide d'une électrode et que l'on enfonce celle-ci perpendiculairement au crâne, on observe une sélectivité pour une orientation constante). Si l'on se déplace parallèlement à la surface du cortex, en revanche, on constate que toutes les orientations sont représentées. Il existe notamment des points au voisinage desquels toutes les orientations sont présentes. C'est ce qu'on appelle des pinwheels: un circuit local (de taille de l'ordre du mm^2) dans lequel il existe des neurones sélectifs à chaque orientation.

A l'aide de connaissances physiologiques sur les neurones (concernant leurs interactions, leur décharge...), des chercheurs ont alors réalisé un modèle mathématique afin d'expliquer comment se comporte ce circuit local [?] [?]. Il porte le nom de "ring model". Il est intéressant de chercher à savoir comment ce modèle découle de modèles plus réalistes de type Hodgkin-Huxley [?], mais ce n'est pas le but de ce papier. Nous allons plus nous intéresser au traitement mathématique de l'équation qu'à son origine.

On modélise donc une population de neurones dans laquelle chaque orientation possède une sous-population de neurones sélectifs à celle-ci. On suppose que dans chaque sous-population tous les neurones ont des interactions similaires avec les neurones des autres sous-populations: c'est l'approximation de champ moyen. Le circuit peut alors être paramétré par un angle $x \in [0, \pi[$. Pour tout x , nous allons nous intéresser à l'évolution de la cadence de tir moyenne des neurones de la sous-population spécifique à cette orientation, que nous noterons $V(x, t)$. L'évolution de V suit une équation de type Wilson et Cowan [?]:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = -V(x, t) + \varphi(J(x, t))$$

où J désigne "l'intensité" reçue par la sous-population, et φ est généralement une fonction sigmoïdale:

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 + e^{-(s-\theta)}}$$

où θ désigne le seuil de la fonction. $J(x, t)$ est la somme de l'intensité due au stimulus visuel et de celle due aux interactions avec les autres sous-population de neurones. Elle s'écrit:

$$J(x, t) = \int_0^\pi W(x, y)V(y, t)dy + I(x, t)$$

l'intensité reçue par la population sélective pour l'orientation y est ainsi $W(x, y)V(y, t)$. $W(x, y)$ désigne la force et la nature (inhibitrice ou excitatrice) des synapses reliant la sous-population associée à l'angle y à celle associée à x . $I(x, t)$ désigne l'intensité due au stimulus visuel.

L'étude de ce modèle peut soulever de nombreuses problématiques. Par exemple, des travaux récents [?] [?] cherchent à étudier les effets de la prise en compte de délais dans les interactions entre les sous-populations. Ici nous chercherons à étudier comment une intensité bruitée $\tilde{J}(x, t) = J(x, t) + d\xi(x, t)$ peut modifier la dynamique de ce réseau de neurones.

Il y a deux parties et une annexe dans ce mémoire. Dans la première partie on cherche à étudier le modèle déterministe (sans bruit), à lui donner un cadre mathématique et à étudier ses propriétés. On verra qu'une bifurcation peut faire apparaître un comportement intéressant: la stabilité d'états traduisant une certaine orientation pour le système (appelés "bumps") en l'absence d'orientation pour le stimulus. Nous finirons cette partie en modélisant une intensité "bruitée" et en étudiant comment elle peut faire apparaître des bumps de

manière spontanée.

La seconde partie sera consacrée à l'équation de Fokker-Planck apparaissant naturellement avec la dynamique "bruitée". Elle sera l'occasion d'utiliser des outils mathématiques un peu plus poussés et de rejoindre d'autres thématiques actuelles dans ce domaine (méthodes d'entropies, trou spectral etc...).

Chapter 11

étude du problème déterministe et insertion du bruit

11.1 étude préliminaire

Pour conserver le cadre usuel du développement en série trigonométrique des fonctions périodiques, le paramètre x du réseau de neurones est maintenant pris entre 0 et 2π . On cherche donc à étudier l'équation suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) &= -V(x, t) + \varphi \left(\int_0^{2\pi} W(x, y) V(y, t) dy + I(t) \right) \\ V|_{t=0} &= V_0 \end{cases}$$

En fait, il est plus simple d'étudier l'évolution d'une autre quantité que la cadence de tir moyenne. On appelle champ local en x la quantité:

$$A(x, t) = \int_0^{2\pi} W(x, y) V(y) dy + I(t, x)$$

Alors A vérifie l'équation suivante:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) &= -A(x, t) + \int_0^{2\pi} W(x, y) \varphi(A(t, x)) dy + I(t) \\ A|_{t=0} &= A_0 \end{cases}$$

Comme V vérifie:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = -V(x, t) + \varphi(A(x, t))$$

on peut légitimement ne regarder que la deuxième équation. Si on montre que A converge pour les temps longs vers A_∞ , alors V converge vers $\varphi(A_\infty)$.

Il s'agit maintenant de donner un cadre fonctionnel pour l'étude de cette équation. Pour une solution biologiquement plausible, on attend au moins une continuité de la fonction A . Cela nous amène vers deux

choix: l'espace $H^1(]0, 2\pi[)$ ou bien l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π . En fait, les propriétés usuelles de W , φ et I rendent possible de montrer que le problème est bien posé dans ces deux espaces [?]. Cependant, une structure intéressante est donnée par l'espace $L^2(]0, 2\pi[)$. On étudiera donc la dynamique dans cet espace en gardant en tête que les solutions de données initiales continues restent continues.

On pose:

$$J : L^2(]0, 2\pi[) \rightarrow L^2(]0, 2\pi[)$$

$$f \mapsto \left(\begin{array}{ccc} J(f) :]0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{2\pi} W(x, y) f(y) dy \end{array} \right)$$

J vérifie alors quelques propriétés intéressantes.

Proposition 11.1.1. *On suppose que $W \in L^2(]0, 2\pi[^2)$. Alors:*

- (a) ϕ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En particulier cet opérateur est compact.
- (b) Si W est symétrique, alors ϕ est auto-adjoint. ϕ est donc ortho-diagonalisable.

Preuve 11.1.1. (a) Soit e_n une base orthonormale de $L^2(]0, \pi[)$. On a alors:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \|J(e_n)\|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} W(x, y) e_n(y) \right)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} W(x, y) e_n(y) \right)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W(x, y)^2 \\ &= \|W\|_{L^2(]0, 2\pi[^2)}^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini et la formule de Bessel-Parceval. J est donc bien un opérateur de Hilbert-Schmidt.

(b) On a:

$$\langle J(f), g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W(x, y) f(y) g(x)$$

Si W est symétrique, cette expression l'est également et J est alors auto-adjoint. Comme les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts, J est donc compact et auto-adjoint. Cet opérateur est donc diagonalisable dans une base orthonormale.

La proposition précédente nous donne envie de trouver la base orthonormale adaptée à la décomposition de J . C'est l'objet de la proposition suivante:

Proposition 11.1.2. *On suppose que $W \in L^2(]0, 2\pi[^2)$ est symétrique et invariant par translation, c'est à dire que W ne dépend que de la distance entre deux points (distance sur le cercle). Alors la base ortho-diagonalisante de J est la base des fonctions trigonométriques.*

Preuve 11.1.2. On note W_0 la fonction donnée par $W_0(x) = W(0, x)$. Les hypothèses signifient alors que pour tout $y \in]0, 2\pi[$: $W(x, y) = W_0(y - x)$.

On note w_n les coefficients de la décomposition de W_0 dans la base trigonométrique. Par symétrie, seuls les fonctions cosinoïdales apparaissent:

$$W_0(y) = \sum_{i=0}^{\infty} w_n \cos(ny)$$

D'où, pour tout x et y :

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} w_n \cos(n(y-x)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_n (\cos(nx)\cos(ny) + \sin(nx)\sin(ny)) \end{aligned}$$

Donc pour toute fonction $f \in L^2(]0, 2\pi[)$, en notant $f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^1 \cos(iy) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 \sin(iy)$ il vient:

$$(J(f))(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi w_n f_i^1 \cos(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} \pi w_n f_i^2 \sin(ix)$$

(avec un abus de notation sur la composante constante). Ce qui montre le résultat.

On note ϕ la fonction qui à une fonction F de $L^2(]0, 2\pi[)$ associe les deux suites de ses coefficients trigonométriques. $\phi(F) = f$ est un élément de $\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{N}) \times L^2(\mathbb{N})$ que l'on muni du produit scalaire usuel. On note f_i^1 le coefficient pour les cosinus, f_i^2 pour les sinus, et f_0 pour la moyenne. On note donc $f = (f_0, f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, \dots)$ pour regrouper les termes de même fréquence. On note enfin ϕ^{-1} l'inverse de ϕ . On peut alors étudier la dynamique sur $L^2(\mathbb{N})$. Elle s'écrit:

$$(2) \quad a_i^1 = -a_i^1 + w_i \int_0^{2\pi} \cos(ix) \varphi(\phi^{-1}(a)(x)) dx + I_i^1$$

(et de même pour les coefficients sinusoïdaux et la moyenne).

Dans le cas où l'intensité est nulle, comme le problème pour A est invariant par translation, alors celui pour les coefficients de Fourier est invariant par une famille de composition de rotations. C'est à dire, le système est invariant sous l'action d'opérateurs $R(\theta)$ dont la matrice est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pour finir cette partie, on énonce le fait que le problème est bien posé sous des conditions vérifiées biologiquement.

Proposition 11.1.3. *On suppose que φ est lipschitzienne sur \mathbb{R} . On suppose également que $W \in L^2(]0, 2\pi[)$. Alors le problème pour A est bien posé sur $L^2(]0, 2\pi[)$.*

11.2 étude d'un cas particulier

On se concentre sur le cas où seuls les deux premiers modes apparaissent pour la connexion synaptique: $W(x, y) = w_0 + w_1 \cos(y - x)$. Il est alors plus pratique d'étudier l'évolution des coefficients de Fourier. En effet, par (2), l'amplitude des modes de Fourier de fréquence plus grande tend exponentiellement vers 0. On peut alors simplement étudier la dynamique pour les trois premières composantes, ce qui la réduit à un système dynamique en dimension finie. On note a_0 , a_1 et a_2 respectivement la composante constante, la composante en cosinus et en sinus. La dynamique s'écrit alors:

$$(3) \begin{cases} \dot{a}_0 &= -a_0 + w_0 \int_0^{2\pi} \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_0 \\ \dot{a}_1 &= -a_1 + w_1 \int_0^{2\pi} \cos(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_1 \\ \dot{a}_2 &= -a_2 + w_1 \int_0^{2\pi} \sin(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_2 \end{cases}$$

Deux propriétés importantes sont à retenir, elles sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 11.2.1. • Pour w_0 et w_1 positifs et I constant, un changement de variable donne une dynamique donnée par l'opposé du gradient d'une fonction.

- Si l'intensité est nulle, le centre de masse du système (le réel α tel que $a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) = r \cos(x - \alpha)$) reste fixé.

Preuve 11.2.1. • Nous allons montrer que pour W symétrique et invariant par translation, si tous les w_i sont de même signe, alors un tel changement de variable existe. On peut les supposer tous positifs sans perte de généralité.

On pose $\Psi(f_0, f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, \dots) = (\frac{f_0}{w_0^{\frac{1}{2}}}, \frac{f_1^1}{w_1^{\frac{1}{2}}}, \frac{f_1^2}{w_1^{\frac{1}{2}}}, \frac{f_2^1}{w_2^{\frac{1}{2}}}, \frac{f_2^2}{w_2^{\frac{1}{2}}}, \dots)$. Alors l'évolution de $\tilde{a} = \Psi(a)$ est donnée par:

$$\dot{\tilde{a}}_i^j = -\tilde{a}_i^j + w_i^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \cos(ix) \varphi \left(w_0^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_i^1 \cos(ix) + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_i^2 \sin(ix) \right)$$

En posant:

$$H(f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left((f_i^j)^2 - f_i^j I_i^j \right) - \int_0^{2\pi} \Phi \left(w_0^{\frac{1}{2}} f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} f_i^1 \cos(ix) + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} f_i^2 \sin(ix) \right)$$

où Φ est une primitive de φ on a alors:

$$\dot{\tilde{a}}_i^j = -\frac{\partial}{\partial x_i^j} H(a)$$

- Nous allons montrer également un résultat plus général: si W est symétrique et invariant par translation, et que la donnée initiale est symétrique, alors le centre de masse est fixe.

On suppose donc A symétrique, par rapport à 0 sans perte de généralité. On retourne à l'équation déterminant l'évolution de A et l'on va montrer que \tilde{A} à le même centre de masse que A . Mais on constate que $\int_0^{2\pi} W(x, y) \varphi(A(t, x)) dy$ est symétrique par rapport à 0, c'est qui donne ce résultat.

Déterminer les points fixes de cette dynamique revient alors à déterminer les minimaux de la fonction H sur \mathbb{R}^3 .

Dans le reste de cette section, nous nous intéressons à l'étude d'une bifurcation pour un point d'équilibre de cette dynamique. Nous allons voir que passé une intensité critique, des "bumps" stables peuvent apparaître (nous avons déjà parlé des bumps dans l'introduction). Cette bifurcation est une pitchfork subcritique. On peut voir ces "bumps" comme une propriété de mémoire du système.

Lemme 11.2.1. *Si l'intensité est uniforme, et $w_0 < \frac{2}{\pi}$ il existe toujours un unique état uniforme (c'est-à-dire que seule la première composante est non nulle) qui soit stationnaire, celui-ci vérifie:*

$$a_{unif} = 2\pi w_0 \varphi(a_{unif}) + I_0$$

Preuve 11.2.2. *On a: $\max_{s \in \mathbb{R}} \varphi'(s) = \varphi'(\theta) = \frac{1}{4}$. La condition sur w_0 est donc la condition pour que l'application $a_0 \mapsto 2\pi w_0 \varphi(a_0) + I_0$ soit contractante. Dans ce cas, elle n'admet qu'un seul point fixe par le théorème de Banach.*

Biologiquement, cet état correspond à une activité uniforme pour l'ensemble des neurones. Or lorsqu'un stimulus est présenté, c'est-à-dire une intensité I avec $I_1 \neq 0$ ou $I_2 \neq 0$, les coefficients a_1 et a_2 deviennent non nuls, reflétant la sélection de l'orientation par le circuit neuronal. La question que l'on peut se poser est la suivante: si l'intensité reste uniforme, existe-t-il des états stables avec $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$? La stabilité de ces états traduit le fait que l'existence d'un bump peut persévérer, même en l'absence d'une orientation pour l'intensité. Ce phénomène d'hystérésis donne une propriété de mémoire au système, comme nous allons le voir plus loin.

Pour étudier l'apparition d'une bifurcation, nous allons étudier la linéarisation de la dynamique au voisinage de l'état stationnaire u_{unif} . Comme le système est invariant par rotation sur les deuxièmes et troisièmes coordonnées, on peut se restreindre à étudier la bifurcation pour le système dynamique ou la troisième variable est nulle. La linéarisation s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -a_0 + 2\pi w_0 \varphi'(a_{unif}) a_0 \\ \dot{a}_1 &= -a_1 + \pi w_1 \varphi'(a_{unif}) a_1 \end{aligned}$$

Lemme 11.2.2. *On désigne toujours par a_{unif} l'état stationnaire uniforme. On considère w_1 comme un paramètre.*

Alors le système subit une bifurcation pour la valeur critique $w_c = \frac{1}{\pi \varphi'(a_{unif})}$. De plus, la forme normale associée à cette bifurcation est:

$$(4) \dot{a}_1 = \pi w_1' \varphi'(a_{unif}) a_1 + \frac{w_c \pi}{8} \varphi'''(a_{unif}) a_1^3 + o(|w_1 a_1|, |a_1|^3)$$

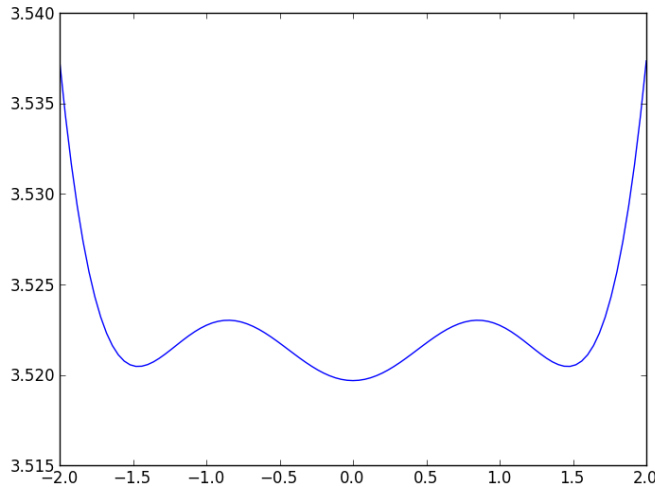
où l'on a considéré $w_1 = w_c + w_1'$. En particulier, si $\varphi'''(a_{unif}) > 0$, cette bifurcation est de type pitchfork subcritique.

Pour $\varphi'''(a_{unif}) > 0$, on obtient alors pour w_1' petit:

- Si $w_1' > 0$ l'état uniforme a_{unif} est instable.

- Si $w'_1 < 0$ l'état uniforme est stable, mais il existe deux états stationnaires instables proches de lui, dont la deuxième coordonnée est donnée au premier ordre par les zéros de (4). Comme par symétrie, l'on s'est restreint à étudier la bifurcation pour deux coordonnées seulement, il existe en fait un cercle (par invariance par translation de la dynamique) de solutions stationnaires instables autour de a_{unif} .

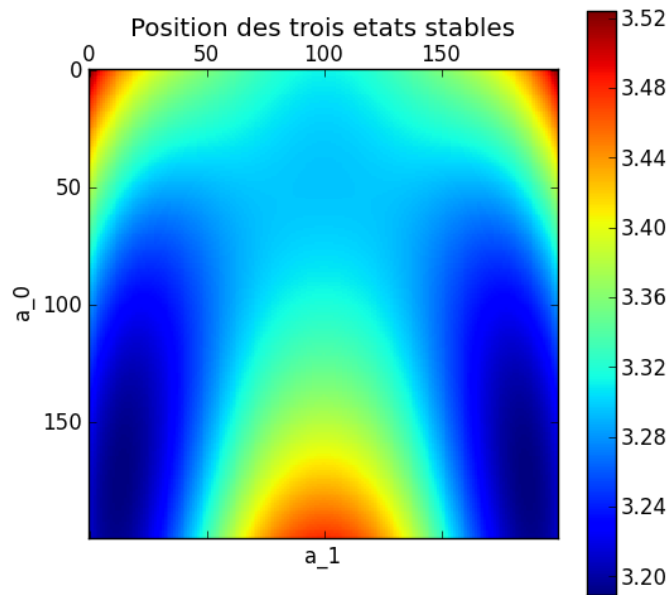
Le graphique suivant montre, pour des valeurs des paramètres appropriées, à $a_0 = a_{unif}$ et $a_2 = 0$ fixés, les valeurs de l'énergie en fonction de a_1 . On peut clairement observer trois puits de potentiel:

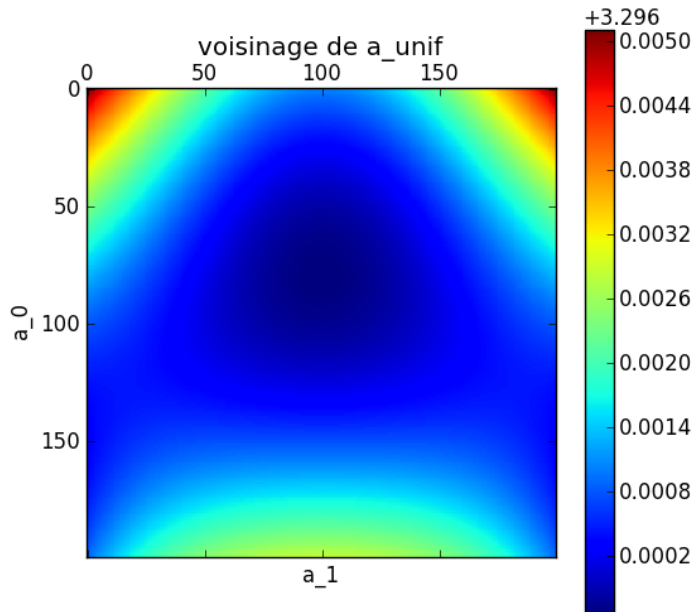


Nous avons vu cependant que via un changement de variable, la dynamique est donnée par l'opposé du gradient d'une énergie tendant vers $+\infty$ lorsque $\|a\| \rightarrow +\infty$. Si a_{unif} est instable, il existe alors un autre état stationnaire stable (donné par le minimum global de l'énergie). Comme a_{unif} est l'unique état stationnaire uniforme, cela signifie que cet autre état stationnaire ne l'est pas: c'est un bump. Par invariance par translation, il existe alors un bump stable pour toute orientation. On peut se demander si ces bump subsistent lorsque $w'_1 < 0$. Nous allons voir que oui.

La propriété de mémoire découle alors de la stabilité de ces bumps même si l'intensité I est uniforme. En effet, supposons qu'un stimulus possédant une certaine orientation soit présenté. Le système adopte alors une réponse possédant la même orientation. Si le stimulus est retiré, mais que l'on garde une intensité uniforme (représentant par exemple l'effet de l'attention) pour rester au niveau de la bifurcation, alors le système migrera non pas vers l'état stationnaire uniforme mais vers le bump stable possédant la même orientation. Le système se "souvient" du stimulus qui lui a été présenté. Pour montrer que cela est possible, nous devons montrer l'existence de valeurs d'une intensité uniforme, pour lesquelles a_{unif} est stable et il existe également des bumps stable.

Le problème est que le développement limité (4) ne peut pas servir à calculer ces bumps. Nous avons donc effectué une simulation numérique pour la dynamique donnée par $\dot{\tilde{a}}_i^j = -\frac{\partial}{\partial x_i^j} H(a)$. Par invariance par translation, nous avons pris la troisième coordonnée nulle pour pouvoir nous placer en dimension 2. Le graphique suivant montre l'énergie pour des valeurs du seuil θ , des autres paramètres w_0 et w_1 , ainsi que de l'intensité I . On constate bien l'existence d'un état uniforme et de bumps stables. Les deux graphiques suivants représentent les valeurs de l'énergie H , et l'on constate bien l'existence de trois puits de potentiel.





11.3 étude du problème avec bruit

11.3.1 modélisation du bruit

On cherche à modéliser le fait que les interactions entre les neurones sont bruitées. On aimerait ainsi donner un sens à l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) &= -V(x, t) + \varphi \left(\int_0^{2\pi} W(x, y) V(y, t) dy + I(t) + \sigma d\xi(t, x) \right) \\ V|_{t=0} &= V_0 \end{cases}$$

où $d\xi(t, x)$ représente le bruit à l'instant t pour la population de neurone située en x , et σ l'intensité de ce bruit.

Deux problèmes sont donc soulevés:

- (1) quelle définition mathématique donner à ξ ?
- (2) quel sens donner à l'équation plus haut?

Évidemment ces deux questions sont liées. On constate que formellement, la quantité A définie plus haut vérifie alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) &= -A(x, t) + \int_0^{2\pi} W(x, y) \varphi(A(t, x)) dy + I(t) + \sigma d\xi(t, x) \\ A|_{t=0} &= A_0 \end{cases}$$

On va donc étudier cette deuxième équation pour éviter les problèmes avec la non linéarité φ . On souhaite, pour conserver les acquis du cadre fonctionnel précédent, que ξ soit un processus aléatoire à valeur dans $L^2(]0, 2\pi[)$. Pour tout x , $\xi(\cdot, x)$ doit être un mouvement brownien. Pour x et x' , on veut pouvoir dire que $\xi(\cdot, x)$ et $\xi(\cdot, x')$ ne sont pas indépendants mais corrélés, avec une corrélation qui est fonction de la distance entre les deux points, c'est à dire:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\xi(t, x)\xi(t, x'))}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x))}\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x'))}} = f(|x - x'|)$$

Or un processus aléatoire "brownien" ξ sur un espace de Hilbert vérifie, pour toute forme linéaire l , que $l(\xi)$ est un mouvement brownien. On est donc attiré par le fait de modéliser ξ via son application à une famille de formes linéaires adaptée, qui dans le cas présent est la famille des formes linéaires données par les fonctions trigonométriques.

Si pour tout i on note $\langle \xi(t, \cdot), \cos(i \cdot) \rangle = a_i B_i(t)$ et $\langle \xi(t, \cdot), \sin(i \cdot) \rangle = b_i B'_i(t)$ (avec un abus de notation car la fonction constante est comptée deux fois) on reconstruit donc simplement ξ par:

$$\xi(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B_i(t) \cos(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i B'_i(t) \sin(ix)$$

En supposant que tous les mouvements brownien intervenant sont indépendants (hypothèse justifiée par la suite), La fonction de corrélation est alors donnée par:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\xi(t, x)\xi(t, x'))}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x))}\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x'))}} &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \cos(ix)\cos(ix') + \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \sin(ix)\sin(ix')}{(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \cos^2(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \sin^2(ix))(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \cos^2(ix') + \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \sin^2(ix'))} \\ &= f(|x - x'|) \end{aligned}$$

Biologiquement, on constate que la corrélation est une fonction décroissante de la distance, que l'on peut modéliser par une exponentielle décroissante: $f(|x - x'|) = e^{-\delta|x-x'|}$ pour $\delta > 0$. Or il est possible d'obtenir cette corrélation par la modélisation du bruit précédente. En effet, on peut calculer que:

Lemme 11.3.1. *Les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{\delta|x|}$ (définie sur $[-\pi, \pi]$) sont nuls pour la partie sinusoidale et positifs pour la partie cosinusoidale.*

Preuve 11.3.1. • par parité, les coefficients de Fourier correspondants aux fonctions sinusoidales sont nuls.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. alors:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) e^{-\delta|x|} dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos(kx) e^{-\delta x} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \operatorname{Re}(e^{-\delta x + ikx}) dx \\ &= 2 \operatorname{Re}(\int_0^{\pi} e^{-\delta x + ikx} dx) \\ &= 2 \operatorname{Re}\left(\frac{(-1)^k e^{-\delta x} - 1}{-\delta + ik}\right) \\ &= \frac{2\delta(1 - (-1)^k e^{-\delta\pi})}{\delta^2 + k^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

On note alors: $e^{\delta|x|} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos(ix)$ avec $c_i \geq 0$ par la remarque précédente. L'ensemble des remarques énoncées jusqu'ici nous permet alors de modéliser le bruit:

Théoreme 11.3.1. On définit $\xi(t, \cdot)$ un processus aléatoire à valeur dans $L^2([0, 2\pi])$ par:

$$\xi(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{c_i} B_i^1(t) \cos(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{c_i} B_i^2(t) \sin(ix)$$

où les B_i^j sont des mouvements browniens indépendants.

Alors ξ est bien défini, et vérifie les propriétés suivantes:

- (i) Pour tout x , $\xi(\cdot, x)$ est un mouvement brownien.
- (ii) La fonction de corrélation pour ξ entre deux points est donnée par l'exponentielle décroissante $e^{\delta|x|}$.

Preuve 11.3.2. • On a vu dans le calcul des coefficients de Fourier de l'exponentielle décroissante que ces derniers sont sommables (car $\frac{1}{k^2}$). Donc les sommes partielles $\sum_{i=0}^n c_i B_i^1 + \sum_{i=0}^n c_i B_i^2$ convergent (dans $L^2(\Omega)$ où Ω est l'espace de probabilité sur lequel sont définis les mouvements brownien).

On en déduit que les sommes partielles $\sum_{i=0}^n \sqrt{c_i} B_i^1 \cos(ix) + \sum_{i=0}^n \sqrt{c_i} B_i^2 \sin(ix)$ convergent presque partout. ξ est donc bien défini.

- Pour tout x , $\xi(\cdot, x)$ est un mouvement brownien (en tant que limite de mouvements browniens)
- Soient x et x' , alors:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\xi(t, x)\xi(t, x'))}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x))}\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x'))}} &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos(ix)\cos(ix') + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sin(ix)\sin(ix')}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos^2(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sin^2(ix)\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos^2(ix') + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sin^2(ix')\right)}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos(i(x-x'))}{\sum_{i=0}^{\infty} c_i} \\ &= \frac{e^{-\delta|x-x'|}}{\sum_{i=0}^{\infty} c_i} \end{aligned}$$

Or $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = e^{-\delta \times 0} = 1$. On a donc bien:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\xi(t, x)\xi(t, x'))}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x))}\sqrt{\mathbb{E}(\xi(t, x'))}} = e^{-\delta|x-x'|}$$

11.3.2 étude de la dynamique bruitée

Donner un sens à l'équation:

$$(5) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) &= -A(x, t) + \int_0^{2\pi} W(x, y) \varphi(A(t, x)) dy + I(t) + \sigma d\xi(t, x) \\ A|_{t=0} &= A_0 \end{cases}$$

revient à définir l'équivalent de l'intégrale d'Itô sur l'espace de Hilbert $L^2(]0, 2\pi[)$ vis à vis du processus stochastique $\xi(t, \cdot)$ (voir [?] pour une idée d'une telle construction). Cela peut s'adapter aisément, mais n'est pas le but du document et nous n'écrivons donc pas cette étape. De manière équivalente, cela revient à définir l'intégrale d'Itô sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{N})$ des coefficients de Fourier pour la dynamique stochastique donnée par:

$$(6) \quad \dot{\tilde{a}}_i^j = -\tilde{a}_i^j + w_i^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \cos(ix) \varphi(w_0^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_i^1 \cos(ix) + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{\frac{1}{2}} \tilde{a}_i^2 \sin(ix)) + \sigma \sqrt{c_i} dB_i^j(t)$$

On voit clairement comment adapter la définition de l'intégrale d'Itô pour cette dynamique en dimension dénombrable. On énonce donc le résultat traitant de l'aspect bien posé du problème, sans le démontrer:

Théoreme 11.3.2. *Pour toute donnée initiale $A_0 \in L^2(]0, 2\pi[)$, il existe un unique processus $A \in C(0, \infty; L^2(]0, 2\pi[)$ tel que $A(0) = A_0$ et A vérifie l'équation stochastique (5).*

De manière équivalente, pour toute donnée initiale $a_0 \in L^2(\mathbb{N})$, il existe un unique processus $a \in C(0, \infty; L^2(\mathbb{N}))$ tel que $a(0) = a_0$ et a vérifie l'équation stochastique (6).

On vient ainsi de définir une perturbation aléatoire des systèmes dynamiques définis par (1) et (2). Soit $T > 0$, on considère la distance sur $C(0, T; L^2(]0, 2\pi[)$ définie par $d(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t) - g(t)\|_{L^2(]0, 2\pi[)}$ (et respectivement la distance sur $C(0, T; L^2(\mathbb{N}))$ définie par $d(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t) - g(t)\|_{L^2(\mathbb{N})}$. Les résultats classiques sur les perturbations aléatoires [?] s'adaptent alors:

Théoreme 11.3.3. *Soit $A_0 \in L^2(]0, 2\pi[)$ (respectivement $a_0 \in L^2(\mathbb{N})$) et $T > 0$.*

Alors lorsque $\sigma \rightarrow 0$, la solution au problème stochastique (5) A de donnée initiale A_0 (respectivement au problème (6) a pour la donnée initiale a_0) sur $[0, T]$ converge en probabilité (pour la distance définie plus haut) vers la solution du problème déterministe (1) (respectivement (2)).

11.3.3 étude du cas particulier avec ajout du bruit

On se concentre sur l'évolution des coefficients de Fourier de A . L'équation s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -a_0 + w_0 \int_0^{2\pi} \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_0 + \sigma \sqrt{c_0} dB_0(t) \\ \dot{a}_1 &= -a_1 + w_1 \int_0^{2\pi} \cos(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_1 + \sigma \sqrt{c_1} dB_1(t) \\ \dot{a}_2 &= -a_2 + w_1 \int_0^{2\pi} \sin(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_2 + \sigma \sqrt{c_1} dB_2(t) \\ \dot{a}_i &= -a_i + \sigma \sqrt{c_i} dB_i(t), \text{ pour } i \geq 3 \end{aligned}$$

On voit que l'évolution des coefficients de Fourier de fréquence élevée est une perturbation par un bruit blanc d'une relaxation linéaire. On peut donc penser légitimement (bien qu'aucun résultat de convergence ne soit montré dans ce document) que les coefficients de fréquences élevée vont être très proche de 0. On décide alors afin de simplifier l'étude de la dynamique, de la tronquer. Nous allons donc dans la suite seulement considérer le problème stochastique donné par:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -a_0 + w_0 \int_0^{2\pi} \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_0 + \sigma \sqrt{c_0} dB_0(t) \\ \dot{a}_1 &= -a_1 + w_1 \int_0^{2\pi} \cos(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_1 + \sigma \sqrt{c_1} dB_1(t) \\ \dot{a}_2 &= -a_2 + w_1 \int_0^{2\pi} \sin(x) \varphi(a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) + I_2 + \sigma \sqrt{c_1} dB_2(t) \\ \dot{a}_i &= -a_i + \sigma \sqrt{c_i} dB_i(t), \text{ pour } 3 \leq i \leq N \end{aligned}$$

où $N \geq 2$ est un entier fixé.

Nous sommes donc ramené à l'étude d'une équation stochastique en dimension finie. Nous allons étudier deux aspects mathématiques de cette dynamique. Le premier, traité dans la suite de ce paragraphe, est l'approximation du temps moyen d'apparition d'un "bump" à partir de la donnée initiale uniforme étudiée précédemment. Le deuxième est le traitement de cette dynamique sous la forme équivalente d'une équation aux dérivées partielles (appelée équation de Fokker-Planck) pour la densité de probabilité de ce processus sur \mathbb{R}^N . Ce deuxième aspect est traité dans la seconde partie de ce document.

On se place dorénavant dans le cadre défini par l'étude de la bifurcation amenant à la stabilité des "bumps". La question que l'on se pose est la suivante: en partant de l'état uniforme stable, en moyenne quel temps faut-il pour voir apparaître la formation d'un bump? Une telle transition n'est pas la bienvenue car elle traduit une erreur du réseau de neurone qui transmet une information erronée. Le calcul du temps moyen de transition entre les deux positions stables, bumps et état uniforme, est donc intéressante pour comprendre l'impact du bruit dans la dynamique.

On sait que le temps moyen de sortie d'un domaine à partir d'un point de celui-ci vérifie une équation aux dérivées partielles (que l'on verra plus loin). Le problème est qu'une solution explicite n'est pas possible à obtenir pour un système aussi compliqué en dimension élevée. L'idée est donc de réduire la dimensionalité. Pour cela, on constate qu'au voisinage de la bifurcation, pour des valeurs de w'_1 négatives, la linéarisation du système dynamique déterministe s'écrit:

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= -d_i a_i, \text{ pour } i \neq 1, 2 \\ \dot{a}_i &= \pi w'_1 \varphi'(a_{unif}) a_i, \text{ pour } i = 1, 2\end{aligned}$$

avec d_i des constantes strictement positives. Donc plus w'_1 est proche de 0, plus la relaxation vers l'état uniforme est faible pour les coordonnées a_1 et a_2 alors qu'elle est maintenue constante pour les autres. L'intuition est donc que, pour de faibles valeurs du bruit avec w'_1 petit et négatif, si le système parvient à s'échapper du puits de potentiel en a_{unif} , c'est le long du plan $a_{unif} + E$ où E est l'espace vectoriel engendré par $(0, 1, 0, \dots, 0)$ et $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (engendré par les modes de Fourier du cosinus et du sinus). Nous allons donc supposer que la dynamique restreinte sur cet hyperplan est une bonne approximation de la dynamique générale. Cependant, cette "intuition" ne s'appuie sur aucun résultat de convergence pour le moment (ce travail n'a pas encore été fait).

Sur cet hyperplan la dynamique se réécrit simplement:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -a_1 + w_1 \int_0^{2\pi} \cos(x) \varphi(a_{unif} + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) dx + \sigma \sqrt{c_1} dB_1 \\ \dot{a}_2 &= -a_2 + w_1 \int_0^{2\pi} \sin(x) \varphi(a_{unif} + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)) dx + \sigma \sqrt{c_1} dB_2\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable déjà vu précédemment:

$$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{w_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{w_1}} \right)$$

on obtient:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{a}}_1 &= -\frac{\partial}{\partial a_1} H(a_1, a_2) + \frac{\sigma \sqrt{c_1}}{\sqrt{w_1}} dB_1 \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= -\frac{\partial}{\partial a_2} H(a_1, a_2) + \frac{\sigma \sqrt{c_1}}{\sqrt{w_1}} dB_2\end{aligned}$$

où l'énergie H a également été définie précédemment. On pose alors $\epsilon := \frac{\sigma\sqrt{c_1}}{\sqrt{w_1}}$. En faisant l'abus de notation $a = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ cela se réécrit simplement:

$$\dot{a} = -\nabla H + \epsilon dB$$

Pour estimer le temps d'apparition d'un bump, on cherche à calculer le temps de sortie du disque \mathcal{D} de centre $(0, 0)$ et de rayon $R^2 = \frac{-8w'_1\varphi'(a_{unif})}{w_c^2\varphi'''(a_{unif})}$. En effet, le bord de ce domaine est l'approximation du cercle des états instables où l'énergie H est la plus élevée (voir (4)).

Or le temps moyen de sortie T sur ce domaine vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} (-\nabla H) \cdot \nabla T + \Delta T = -1 & \text{sur } \mathcal{D} \\ T = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

Comme de plus la dynamique est invariante par rotation, T ne dépend que de la distance au centre r et on peut utiliser les coordonnées polaires. L'équation se réécrit:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} H \frac{\partial}{\partial r} T + \frac{\partial^2}{\partial r^2} T + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T = -1 & \text{sur }]0, R[\\ T(R) = 0 \end{cases}$$

On peut donc résoudre cette équation différentielle du second ordre à l'aide des techniques classiques. Finalement, on trouve:

Proposition 11.3.1. *Le temps moyen de sortie T du disque vérifie:*

$$\frac{d}{dr} T = \frac{-1}{re^{-H(r)}} \int_0^r se^{-H(s)} ds$$

T est donc donné par la primitive de cette fonction s'annulant en R .

Ce résultat termine la première partie du document. Nous avons vu comment donner un sens mathématique à l'équation d'évolution vérifiée par les cadences de tir des neurones. Nous avons pu montrer quelques propriétés de base sur la dynamique, et observer que des bifurcations font apparaître une propriété intéressante d'hystérésis pour le système. Nous nous sommes alors demandé comment la prise en compte de bruit dans les interactions pouvait perturber le système. Cela nous a amené à décrire proprement la notion de bruit pour ce système, et nous avons pu donner une approximation du temps d'apparition d'un bump spontané.

Chapter 12

Etude de l'évolution de la densité de probabilité

Une autre problématique intéressante pour la dynamique bruitée est la suivante: partant d'une donnée initiale, au bout d'un temps long, où se situe alors le système? Avec quelle probabilité est-il proche de l'état uniforme ou d'un bump? Nous allons ainsi changer de point de vue et étudier l'évolution de la densité de probabilité pour notre système. Celle-ci vérifie l'équation de Fokker-Planck suivante [?]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot ((x - F)p) + \sum_{i=0}^n \frac{\sigma_i^2}{2} \partial_{ii} p = Ap$$

Cette seconde partie utilisera beaucoup la théorie des équations aux dérivées partielles, et sera l'occasion de l'utilisation de résultats mathématiques plus poussés que la première. Les notions abordées en annexe sont celles nécessaires à l'étude effectuée dans cette deuxième partie que je ne connaissais pas ou peu avant de démarrer le stage. Pour plus de simplicité, la numérotation des équations recommence à 0.

Nous choisissons d'étudier le problème sur un ouvert borné que l'on prendra régulier pour plus de simplicité. Cela signifie que l'on confine la dynamique du système: l'amplitude selon chaque mode de Fourier reste bornée, ce qui a plus de sens au niveau biologique, car les taux de décharges des neurones sont bornés (bien sûr "restreindre la dynamique" n'a cependant pas de vrai sens biologique).

12.1 étude du problème sur un ouvert borné régulier

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . On effectue un changement de variable adéquat pour faire apparaître un laplacien dans l'équation (d'où l'apparition du terme \tilde{F}). Il faut alors ajouter la condition au bord de "non-flux" pour compléter l'équation précédente:

$$((x - \tilde{F})p + \nabla p) \cdot \vec{n} = 0$$

De plus, pour $\|x\|$ assez grand, le terme non linéaire $(-\tilde{F}(x))$ est négligeable (car borné) par rapport au terme de relaxation x . On peut donc supposer Ω suffisamment large, de sorte que $(x - \tilde{F}) \cdot \vec{n} > 0$ sur $\partial\Omega$ (traduisant la propriété de confinement due au terme de dérive dans l'équation).

Réécrivons alors l'équation sous une forme plus générale:

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi p) - \Delta p = \frac{\partial p}{\partial t} + Lp = 0 \\ (2) & (\phi p - \nabla p) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Avec comme propriétés pour ϕ :

$$(3) \quad \begin{aligned} & \phi \cdot \vec{n} < 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ & \phi \text{ est } C^\infty \text{ au voisinage de } \Omega \end{aligned}$$

Nous allons nous intéresser aux questions générales suivantes:

1. existe-t-il une solution stationnaire au problème? Est-elle unique? Est-elle envisageable biologiquement, c'est à dire est-elle une distribution de probabilité, positive et de masse unitaire?
2. Le problème d'évolution est-il bien posé?
3. A-t-on convergence pour des temps longs, vers la solution stationnaire?

Dans un premier temps, nous résoudrons le problème stationnaire. Nous montrerons qu'il existe une seule solution au problème $Ap = 0$, qui soit positive et de masse unitaire. Ensuite, nous montrerons que le problème d'évolution est bien posé: pour toute donnée initiale positive et de masse finie il existe une unique solution au problème, et de plus celle-ci reste positive et converge vers la solution stationnaire de même masse. Toutes ces propriétés seront formulées de manière précise dans les paragraphes qui leur sont dédiés.

12.2 Le problème stationnaire

12.2.1 Formulation et résultat

Le problème stationnaire est:

$$\begin{cases} (1stat) & \nabla \cdot (\phi p) - \Delta p = Lp = 0 \\ (2stat) & (\phi p - \nabla p) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Nous commençons par redonner la notion de solutions forte et faible usuelles pour ce problème elliptique:

Définition 12.2.1. 1. On dit que p est solution classique du problème stationnaire associé à ((1stat),(2stat)) si $p \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et que (1stat) et (2stat) sont vérifiés pour presque tout point de Ω .

2. On dit que p est solution faible du problème stationnaire si $p \in H^1(\Omega)$ et vérifie:

$$\int_{\Omega} -(\phi p) \cdot \nabla(v) + \nabla p \cdot \nabla v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

3. On dit que p est de masse unitaire si $p \in L^1(\Omega)$ et $\int_{\Omega} p = 1$

Nous pouvons alors énoncer le résultat principal de cette section: il n'existe qu'une seule solution stationnaire ayant du sens au niveau biologique.

Théorème 12.2.1. *Existence et unicité d'une distribution de probabilité stationnaire:*

L'ensemble des solutions faibles du problème stationnaire est une droite $\mathbb{C}u$, où u est positive sur Ω et de masse unitaire. De plus, u est infiniment dérivable et est également une solution classique.

Remarque 12.2.1. *Avant de nous lancer dans la preuve de ce théorème, nous allons en donner la structure:*

- *Nous allons considérer le problème modifié $Lu + bu = f$. Pour b assez grand, l'opérateur $f \mapsto u$ vérifie le principe du maximum. Il envoie donc continument le cône $\{f \in H^m(\Omega), f \geq 0\}$ dans son intérieur. Nous montrerons alors l'existence d'un vecteur propre approprié dans ce cône de deux manières différentes. La première est une adaptation du résultat sur les valeurs propres principales des opérateurs elliptiques contenu dans (). La deuxième utilise le théorème plus général de Krein-Rutman.*
- *Nous montrerons ensuite que ce vecteur propre est en fait l'unique solution du problème stationnaire.*
- *Enfin, le fait qu'une solution faible soit une solution classique est un résultat connu (provenant du gain de régularité pour une solution faible, et de l'intégration par partie de la relation fonctionnelle vérifiée). Ce résultat est démontré dans la première partie de la preuve 3.2.4.*

12.2.2 Deux preuves

On commence par remarquer que si $L(u) = 0$, alors $L(u) + bu = bu$. Caractériser le noyau de l'opérateur L revient alors à caractériser le sous-espace propre de $L + b$ associé à la (pour l'instant éventuelle) valeur propre b . Cette méthode a l'avantage de faire apparaître un opérateur coercif.

On considère donc le problème modifié suivant:

$$\begin{cases} (1') & \nabla \cdot (\phi u) - \Delta u + bu := L_b u = f \\ (2') & (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

La forme bilinéaire associée à ce problème s'écrit alors:

$$B_b : \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \int_{\Omega} -(\phi u) \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \nabla v + buv \end{array}$$

Propriétés générales

Lemme 12.2.1. *Il existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall b > b_0$, B_b est une forme bilinéaire coercive et le coefficient d'ordre 0 est positif: $b + \nabla \phi \geq 0$ sur Ω .*

Preuve 12.2.1. *La positivité du coefficient d'ordre 0 vient du fait que $\nabla \cdot \phi$ soit borné sur Ω .*

Soit $u \in H^1(\Omega)$. Par l'inégalité de Cauchy ($|ab| \leq \frac{1}{\epsilon^2} a^2 + \epsilon^2 b^2$), on peut contrôler dans l'expression de la forme bilinéaire le premier terme par les deux autres. $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\phi u) \cdot \nabla(u) \right| &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} |\phi u|^2 + \epsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^2} \int_{\Omega} u^2 + \epsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Donc pour $b > b_0 := C$, en choisissant $\frac{C}{b} < \epsilon^2 < 1$ on obtient la coercivité.

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans le cas où b vérifie la condition du lemme précédent.

Lemme 12.2.2. *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ l'on ait $B_b(u, v) = \int_{\Omega} f v$. De plus, si $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$. On note alors:*

$$R_b : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \mapsto & u \end{array}$$

Preuve 12.2.2. *L'existence provient du théorème de Lax-Milgram. La régularité pour un problème elliptique avec condition au bord de Neumann est montrée en annexe.*

On considère l'ensemble $C := \{u \in H^m(\Omega), u \geq 0 \text{ presque partout sur } \Omega\}$ pour $m = [\frac{n}{2}] + 1$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière). On se place dorénavant dans l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$, toutes les notions topologiques sont relatives à la norme usuelle sur cet espace. Voici alors les propriétés de C :

Lemme 12.2.3. (i) *L'ensemble C est un cône pour l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$, c'est-à-dire:*

1. C est un convexe fermé.
2. Pour tout $\lambda \geq 0$, $\lambda C \subseteq C$.
3. $C \cap \{-C\} = \{0\}$.

(ii) *Ce cône est solide: son intérieur $\overset{\circ}{C}$ est non vide. Cela implique en particulier qu'il soit un cône reproducteur: $C - C := \{u \in H^m(\Omega), u = c_1 + c_2, c_1, c_2 \in C\} = H^m(\Omega)$.*

Preuve 12.2.3. (i) *La convexité, l'invariance par multiplication par un scalaire positif et le fait que l'intersection avec son opposé $-C$ se réduise au vecteur nul sont directes. La fermeture, elle, provient du fait que si pour une suite $u_n \in C$, $u_n \rightarrow u$ dans $H^m(\Omega)$, alors il existe une sous-suite convergeant vers u presque partout, conservant donc la positivité.*

(ii) *Soit $a > 0$. Alors l'ensemble des fonctions de $H^m(\Omega)$ prenant des valeurs plus grandes que $a > 0$ est un ouvert. Cela est dû au fait que $H^m(\Omega)$ s'injecte continument dans l'ensemble des fonctions continues jusqu'au bord $C(\bar{\Omega})$ (en effet, $m > \frac{n}{2}$ et l'ouvert Ω est régulier). La propriété de cône reproducteur découle aisément de la solidité.*

Nous pouvons alors énoncer les propriétés de l'opérateur R_b restreint à C :

Lemme 12.2.4 (compacité) *R_b est compact.*

(forte positivité) *R_b est fortement positif: il envoie C dans son intérieur. Pour tout $u \in C$, $R_b(u) \in \overset{\circ}{C}$.*

Preuve 12.2.4 (compacité) *Cela vient du gain de régularité pour les opérateurs elliptiques et de l'injection compacte de H^{m+s} dans H^m pour $s > 0$.*

(forte positivité) Elle provient du principe du maximum fort, du lemme de Hopf, et de la condition au bord (3) (le fait que le drift "confine" la dynamique).

Soit $u \in C$ et soit $v := R_b(u)$. Alors v est une solution classique du problème inhomogène avec u dans le second membre. En effet, v gagne en régularité: $v \in H^{m+2}(\Omega)$. En particulier, $v \in C^2(\bar{\Omega})$. Comme

$$\int_{\Omega} -(\phi v) \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla w + bvw = \int_{\Omega} uw \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

En intégrant par partie il vient:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi v) w - \Delta v w + bvw + \int_{\partial\Omega} w(\phi v - \nabla v) \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} uw \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

En prenant w une fonction de $D(\Omega)$ on obtient alors au sens des distributions:

$$\nabla \cdot (\phi v) - \Delta v + bv = u$$

Or toutes ces distributions sont représentées par des fonctions dans $L^2(\Omega)$, d'où:

$$\nabla \cdot (\phi v) - \Delta v + bv = u$$

est vrai au sens L^2 . En particulier, on obtient:

$$\int_{\partial\Omega} w(\phi v - \nabla v) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

On déduit alors $(\phi v - \nabla v) \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (l'opérateur de trace étant surjectif).

En appliquant le principe du maximum faible on obtient:

$$\min_{\bar{\Omega}} v \geq -\max_{\partial\Omega} v^-$$

Nous allons donc montrer que le membre de droite est égal à zéro. Supposons par l'absurde qu'il ne l'est pas. Par continuité, soit $x \in \partial\Omega$ tel que le minimum de v sur $\partial\Omega$ soit atteint: $v(x) = \min_{\Omega} v < 0$. Alors la condition au bord: $(\phi v - \nabla v) \cdot \vec{n} = 0$, ainsi que la condition de confinement $\phi \cdot \vec{n} < 0$ donnent $\nabla v \cdot \vec{n} > 0$. Ceci est absurde, car signifie qu'une valeur plus petite est atteinte à l'intérieur de Ω .

Nous avons donc montré $v \geq 0$. Il reste à prouver que le minimum de v sur Ω est en fait strictement positif. Là encore nous procédons par l'absurde. Supposons que ce minimum soit 0. Alors par le principe du maximum faible cette valeur est atteinte à la frontière $\partial\Omega$.

Soit $x \in \partial\Omega$ tel que $v(x) = 0$. Le lemme de Hopf donne la stricte négativité du gradient en ce point critique: $\nabla v \cdot \vec{n} < 0$. Mais cela est en contradiction avec la condition au bord qui elle donne $\nabla v \cdot \vec{n} = 0$.

On a donc bien $v \in \mathring{C}$.

Commentons un peu ce que nous venons de montrer. Nous venons d'établir une bonne structure pour le problème.

- L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace pratique pour travailler: d'une part s'il existe un état stationnaire il se trouve dans cet espace par régularité (on peut donc légitimement s'y restreindre), et d'autre part les éléments de cet espaces sont continus et R_b les rend deux fois dérivables.
- Ces propriétés sont parfaites pour l'application des outils usuels en théorie elliptique: les principes du maximum fort et faible, le lemme de Hopf, et la compacité.
- Enfin, en plus de la structure d'espace de Hilbert, $H^m(\Omega)$ est muni d'une structure d'ordre, celle donnée par la positivité ($u \leq v$ si $0 \geq v - u$, soit $v - u \in C$), et R_b préserve cette structure d'ordre.

Démonstration à l'aide d'une méthode de point fixe Cette partie est dédiée à une première approche, utilisant des calculs et des notions spécifiques au problème. Nous verrons qu'en fait le résultat montré est d'ordre plus général, ce sera l'objet de la seconde démonstration faisant intervenir le théorème de Krein-Rutman. Cependant, ce que l'on obtient ici est un peu plus fort, dans un sens qui sera explicité au début de la prochaine partie.

Théorème 12.2.2. *Le rayon spectral de R_b est $r(R_b) = \frac{1}{b}$. Il est une valeur propre simple de l'opérateur R_b , associée à un vecteur propre positif sur Ω qui est solution de l'équation stationnaire. Toute autre valeur propre λ de R_b vérifie $Re(\frac{1}{\lambda}) \geq b$.*

Remarque 12.2.2. • *La dernière estimation entraine $|\lambda| < \frac{1}{b}$ pour toute autre valeur propre λ . Elle implique donc le fait que $\frac{1}{b}$ soit le rayon spectral.*

- *Comme nous l'avons déjà fait remarqué, une fonction est solution du problème stationnaire si et seulement si elle est vecteur propre de R_b pour la valeur propre $\frac{1}{b}$*

Preuve 12.2.5. 1. *Existence d'un vecteur propre positif*

Soit $u \in C$. On pose $v = R_b(u)$. Alors nous avons montré précédemment que $v > a > 0$ sur Ω pour une constante $a > 0$. Comme u et v sont continues, alors $\mu v \geq u$ pour un $\mu > 0$.

Soient $\epsilon, \eta > 0$. On considère le problème:

$$(4) \quad w = \eta R_b(w + \epsilon u)$$

pour l'inconnue $w \in C$. Alors si cette équation a une solution, on a: $\eta \leq \mu$.

Pour montrer cela, supposons que l'on ait une solution $w \in C$. Comme R_b est un opérateur positif, on a alors $w \geq \eta R_b(\epsilon u)$, donc:

$$w \geq \eta \epsilon v \geq \frac{\eta}{\mu} \epsilon u$$

En injectant cette nouvelle estimation dans (4) on obtient:

$$w \geq \eta R_b(u) \geq \frac{\eta^2}{\mu} \epsilon R_b(u) \geq \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2 \epsilon u$$

En itérant ce procédé, on obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w \geq \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^n \epsilon u$$

Comme $u > 0$ sur Ω , on doit donc avoir $\eta \leq \mu$, sinon la formule précédente serait absurde.

L'application $w \mapsto 2\mu R_b(w + \epsilon u)$ n'a donc pas de point fixe. En utilisant la contraposée du théorème de Schaefer (voir annexe), cela nous donne alors des informations sur l'ensemble:

$$S_\epsilon = \{w \in C, w = \eta R_b(w + \epsilon u), \text{ pour } \eta \in [0, 2\mu]\}$$

Cet ensemble est non borné (le théorème stipulant que s'il était, l'application précédente aurait un point fixe).

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\epsilon_n \rightarrow 0$. Il existe donc deux suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $w_n = \eta_n R_b(w_n + \epsilon_n u)$, $\eta_n \in [0, 2\mu]$ et $\|w_n\| \leq \frac{1}{\epsilon_n}$. On normalise alors la suite en posant $w'_n = \frac{1}{\|w_n\|} w_n$. w'_n est alors solution de:

$$w'_n = \eta_n R_b \left(w'_n + \frac{\epsilon_n}{\|w_n\|} u \right)$$

On peut supposer, à extraction près, que $\eta_n \rightarrow \eta \in [0, 2\mu]$. Comme $w'_n \in H^{m+2}(\Omega)$, que l'injection de $H^{(m+2)}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est compacte, et que C est fermé, on peut également supposer à extraction près que $w'_n \rightarrow w$ pour une fonction $w \in C$. Par continuité de R_b , on en déduit que w est solution de $w = \eta R_b(w)$. De plus, comme $\|w\| = 1$, on a $\eta \neq 0$.

2. Montrons que ce vecteur propre w est associé à la valeur propre $\frac{1}{b}$.

Pour cela, nous appliquons la relation fonctionnelle vérifiée par w à la fonction constante égale à 1 pour ne laisser que les termes de "création". Comme $w = \eta R_b(w)$ il vient:

$$\int_{\Omega} -(\phi w) \cdot \nabla x + \nabla w \cdot \nabla x + b w x = \int_{\Omega} \eta w x, \quad \forall x \in H^1(\Omega)$$

En prenant $x = 1$ il vient:

$$\text{soit } \begin{cases} \int_{\Omega} b w = \int_{\Omega} \eta w \\ (b - \eta) \int_{\Omega} w = 0 \end{cases}$$

Or $w > 0$. On en déduit alors que $b = \eta$: $\frac{1}{b}$ est une valeur propre et elle possède un vecteur propre positif.

3. Prouvons que $\frac{1}{b}$ est une valeur propre simple.

Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$, $u \neq w$ tel que $R_b(u) = bu$. Par régularité, u est de classe C^∞ , donc bornée. De plus, comme b est réel, quitte à prendre $Re(u)$ ou $Im(u)$, on peut supposer u réel.

On pose $\delta := \{\epsilon > 0, w - \epsilon u \geq 0\}$. On a: $w - \delta u \in C$, soit $w - \delta u \neq 0$, mais $(w - \delta u)(x) = 0$ pour un $x \in \Omega$. Or par ailleurs $R_b(w - \delta u) = b(w - \delta u) \in \dot{C}$, et l'on a montré que cela impliquait

$w - \delta u > a > 0$ pour $a > 0$, ce qui est absurde.

4. Toute autre valeur propre λ de R_b vérifie $Re(\frac{1}{\lambda}) \geq b$

Nous allons changer de point de vue: si λ est une valeur propre de R_b associée à un vecteur u , alors u est solution du système:

$$\begin{cases} (5) & \nabla \cdot (\phi u) - \Delta u + bu := L_b(u) = \mu u \text{ sur } \Omega \\ (6) & (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où l'on a posé $\mu := \frac{1}{\lambda}$ (nous avons déjà montré plus haut comment passer de la formulation faible à la formulation classique). C'est-à-dire, u est valeur propre de L_b et vérifie en plus la condition au bord. Il convient donc de prouver $Re(\mu) \leq b$.

Soit donc u une telle solution (éventuellement complexe). Soit $0 < \epsilon < 1$. Nous allons montrer que si $Re(\mu) < b$, alors $g := |\frac{u}{w^{1-\epsilon}}|^2$ vérifie $K(g) \leq 0$ pour K un opérateur elliptique coercif. On en déduira à l'aide du lemme de Hopf la nullité de v , ce qui sera une contradiction.

Soit $f \in C^\infty(\Omega)$, avec $f > 0$ sur Ω . On pose $v := \frac{u}{f}$. On a alors par définition de u :

$$\begin{aligned} \mu v f &= L_b(vf) \\ &= \nabla \cdot (\phi v f) - \Delta(vf) + bvf \\ &= f(\nabla \cdot (\phi v) + \Delta v + bv) + v(\nabla \cdot (\phi f) + \Delta f + bf) \\ &\quad - \nabla \cdot (\phi) f v - b f v - 2\nabla(f) \cdot \nabla(v) \\ \text{donc } \mu v &= L_b(v) - (b + \nabla \cdot (\phi))v - \frac{2}{f} \nabla v \cdot \nabla f + \frac{v}{f} L_b(f) \end{aligned}$$

En posant $K(v) := L_b(v) - (b + \nabla \cdot (\phi))v - \frac{2}{f} \nabla f \cdot \nabla v$ on le réécrit sous la forme:

$$K(v) + \left(\frac{L_b(f)}{f} - \mu\right)v = 0$$

et en prenant le conjugué complexe, l'on obtient:

$$K(\bar{v}) + \left(\frac{L_b(f)}{f} - \bar{\mu}\right)\bar{v} = 0$$

On calcule donc, en remarquant que le terme d'ordre 0 de K est nul:

$$K(|v|^2) = K(v\bar{v}) = \bar{v}K(v) + vK(\bar{v}) - 2\nabla v \cdot \nabla \bar{v} \leq \bar{v}K(v) + vK(\bar{v})$$

On obtient ainsi:

$$K(|v|^2) \leq -\left(\frac{L_b(f)}{f} - \mu\right)|v|^2 - \left(\frac{L_b(f)}{f} - \bar{\mu}\right)|v|^2 = 2\left(Re\mu - \frac{L_b(f)}{f}\right)|v|^2$$

En prenant $f = w$, avec $L_b(w) = bw$ on obtient:

$$K(|v|^2) \leq 2(Re(\mu) - b)|v|^2$$

On suppose maintenant par l'absurde que $\operatorname{Re}(\mu) < b$. Il en suit que $K(|v|^2) \leq 0$. Donc par le principe du maximum, $|v|^2$ atteint son maximum au bord. Le lemme de Hopf donne alors: $\nabla(|v|^2) \cdot \vec{n} > 0$ sur $\partial\Omega$. Or u et w vérifient tous deux les conditions aux bords: $(\nabla u \cdot \vec{n} = (\phi \cdot \vec{n})u, (\nabla w \cdot \vec{n} = (\phi \cdot \vec{n})w$. On calcule donc:

$$\begin{aligned} \nabla(|v|^2) \cdot \vec{n} &= \nabla\left(\frac{|u|^2}{w^2}\right) \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{w^4} (w^2(\bar{u}\nabla(u) \cdot \vec{n} + u\nabla(\bar{u}) \cdot \vec{n}) - 2w|u|^2\nabla(w) \cdot \vec{n}) \\ &= \frac{1}{w^4} (2w^2|u|^2 - 2w^2|u|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec le lemme de Hopf.

On a donc montré $\operatorname{Re}(\mu) \geq b$ pour toute autre valeur propre. Ce qui termine la preuve.

Démonstration à l'aide du théorème de Krein-Rutman Les propriétés structurelles (compacité, préservation stricte d'un ordre donné par un cône solide), sont celles requises pour l'application d'un corollaire du théorème de Krein-Rutman. Les informations sur ce théorème, ainsi que sur son corollaire, sont dans l'annexe. Un certain nombre d'idées utilisées pour sa preuve dans l'annexe ont été utilisées dans la section précédente: les approches ne sont pas si différentes.

Théorème 12.2.3. Soit C un cône solide. Soit T un opérateur linéaire compact, strictement positif, c 'est-à-dire envoyant C dans son intérieur $T(C \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{C}$. Alors:

- (i) Le rayon spectral de T est strictement positif: $r(T) > 0$.
- (ii) $r(T)$ est une valeur propre simple de l'opérateur T , associée à un vecteur propre dans le cône C . Il n'y a pas d'autres valeurs propres associées à un vecteur propre dans C .
- (iii) Toutes les autres valeurs propres λ vérifient $|\lambda| < r(T)$.

Montrons en outre que le vecteur propre associé est bien l'état stationnaire recherché, et qu'aucun autre état stationnaire positif n'existe.

Lemme 12.2.5. La fonction u , vecteur propre de R_b associée au rayon spectral $r(R_b)$ donnée par le théorème précédent, est l'unique état stationnaire positif du problème.

Preuve 12.2.6. • Montrons que u est un état stationnaire:

On effectue le même raisonnement que dans la section précédente. Si u est un vecteur propre d'intégrale non nulle, alors la valeur propre est forcément $\frac{1}{b}$. Cela s'obtient en appliquant l'équation fonctionnelle vérifiée par u à une fonction constante sur Ω . Nous renvoyons donc à la deuxième partie de la preuve 3.2.5.

- Montrons qu'il n'y a pas d'autres états stationnaires, à renormalisation près.

Soit $v \in L^2(\Omega)$ un autre état stationnaire. Alors comme $r(R_b) = \frac{1}{b}$, v est un vecteur propre pour R_b , associé au vecteur propre $r(R_b)$. Or par le théorème précédent, $r(R_b)$ est une valeur propre simple. Donc $v = au$ pour $a \in \mathbb{C}$.

12.3 Analyse du problème d'évolution

Nous nous intéressons à présent au problème d'évolution, que nous réécrivons ici:

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi p) - \Delta p = \frac{\partial p}{\partial t} + Lp = 0 \\ (2) & (\phi p - \nabla p) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons à montrer que ce problème est bien posé. Comme précédemment (et partout dans le domaine des EDP), nous allons commencer par donner une définition de ce que nous appelons solution faible du problème, qui généralise la notion de solution classique, mais qui permet de travailler dans une structure plus appropriée (ici hilbertienne).

Définition 12.3.1. *Solution faible pour un temps fini $T > 0$:*

On dit qu'une fonction $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ avec $u' \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ est une solution faible du problème d'évolution avec comme condition initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ si:

$$(8) \quad \langle u', v \rangle + \int_{\Omega} -(\phi u) \cdot \nabla(v) + \nabla u \cdot \nabla v = \langle u', v \rangle + B(u, v) = 0$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et presque tout temps $t \in [0, T]$, et

$$(9) \quad u(0) = u_0$$

Remarque 12.3.1. *Dans la définition précédente, on a pris garde de ne pas identifier $H^1(\Omega)$ avec son dual $H^1(\Omega)$. Pour la signification exacte de u' , nous renvoyons à la troisième partie de l'annexe.*

Théorème 12.3.1. *Pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible au problème d'évolution. De plus, celle-ci possède les propriétés de régularité suivantes:*

- (i) $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. La condition $u(0) = u_0$ a donc du sens.
- (ii) $u \in H^2(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0, T]$. L'équation est donc immédiatement régularisante après l'instant 0.
- (iii) $u \in C^1(]0, T[; L^2(\Omega))$, $u' = \frac{du}{dt}$ est donc une dérivée au sens classique pour tout $t > 0$.

Remarque 12.3.2. • *Le gain de régularité permet de montrer qu'une solution faible est en fait une solution classique sur $]0, T]$. Nous renvoyons à la preuve 3.2.4. où ce cas a déjà été traité.*

- *Comme ce théorème est valable pour n'importe quel temps $T > 0$, et qu'il donne $u(T) \in L^2(\Omega)$, on peut donc itérer son application pour prouver l'existence d'une solution sur $[0, \infty[$. On a alors montré l'existence et l'unicité d'une solution classique (pour tout $t > 0$) globale.*

Nous ne prouverons pas le gain de régularité. Ce résultat est très important mais un peu long, et parce qu'il est relativement connu, nous nous permettons de renvoyer à DBEUBIFEB pour une démonstration. Nous nous contenterons d'utiliser la méthode d'approximation de Galerkin pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible.

La preuve se déroulera comme suit:

- On projette (8) sur un sous-espace de dimension finie E_k de $L^2(\Omega)$. E_k aura été bien choisi, de sorte que $E_k \subset E_{k+1}$ et $\overline{\cup_{k \geq 0} E_k} = L^2(\Omega)$. On montre que la projection du problème admet une solution u_k .
- Ensuite, nous établirons des estimations d'énergie, qui traduisent le contrôle de la norme des différents termes intervenant dans le problème.
- Cela nous permettra de "passer à la limite" et de montrer l'existence d'une solution faible pour toute condition initiale dans $L^2(\Omega)$.
- L'unicité découlera des estimations d'énergie.

Preuve 12.3.1. *Existence d'une solution faible pour la projection sur un sous-espace adéquat:*

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions qui soit à la fois une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ et une base orthogonale de $H^1(\Omega)$ (base de vecteurs propres d'un opérateur symétrique adapté, dont nous ne détaillerons pas ici l'existence). On se place alors sur l'espace vectoriel engendré par les k premiers vecteurs de cette base

$$E_k := \{u \in L^2(\Omega), u = \sum_{i=0}^k u_i e_i, u_i \in \mathbb{C}\}$$

La projection du problème est alors:

$$\begin{aligned} (8_{proj}) \quad & \langle u^{k'}, v \rangle + B(u^k, v) = 0 \\ (9_{proj}) \quad & u^k(0) = P_k(u_0) \end{aligned}$$

pour tout $v \in E_k$, où P_k désigne la projection orthogonale sur E_k . Par linéarité, cela revient à satisfaire:

$$\langle u^{k'}, e_i \rangle + B(u^k, e_i) = 0$$

pour tout $i \in [0, k]$.

On suppose que w^k est une solution de la projection du problème. w^k vérifie: $w^k \in L^2(0, T; E_k)$ avec $w^{k'} \in L^2(0, T; E'_k)$. On pose $w_i^k = \langle w^k, e_i \rangle$. On vérifie alors que $w_i^{k'} = \langle w^{k'}, e_i \rangle \in L^2(0, T)$. Les coefficients w_i^k vérifient donc:

$$\begin{aligned} (10_{proj}) \quad & w_i^{k'} + B(w^k, e_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq k \\ (11_{proj}) \quad & w_i^k(0) = \langle u_0, e_i \rangle \end{aligned}$$

Or ceci est une équation différentielle ordinaire sur \mathbb{R}^n , vérifiant toutes les conditions nécessaires pour qu'on lui applique la théorie de Cauchy. ((10_{proj}), (11_{proj})) admet une unique solution (w_i^k) dans $C^1(0, T; \mathbb{R}^n)$.

La fonction u^k définie par $u^k := \sum w_i^k e_i$ est alors une solution de ((8_{proj}))(9_{proj}), c'est-à-dire une solution de la projection du problème.

Lemme 12.3.1. *Estimation d'énergie:*

Il existe une constante C , dépendant seulement des coefficients de L , du temps T et de la géométrie de l'ouvert Ω , telle que u^k vérifie:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u^k\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|u^{k'}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 12.3.3. Ces estimations d'énergies ont été montrées pour la projection du problème sur E_k . Cependant, on remarquera que la preuve peut être adaptée aisément pour montrer qu'elles sont valables pour n'importe quelle solution faible du problème.

Preuve 12.3.2. On multiplie l'équation (10_{proj}) par u_i^k puis on somme de 0 à k pour trouver:

$$\langle u^{k'}, u^k \rangle + B(u^k, u^k) = 0$$

Or on a montré dans le lemme 3.2.1 qu'il existe une constante b_0 telle que

$$\theta \|u^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B(u^k, u^k) + b_0 \|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

De plus, étant donné que les coefficients u_i^k sont dérivables, il vient: $\langle u^{k'}, u^k \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$. On obtient donc l'inégalité suivante:

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left(\|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\theta \|u^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pour estimer $\|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ on utilise alors l'inégalité $\frac{d}{dt} \left(\|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \|u^k\|_{L^2(\Omega)}^2$. En lui appliquant le lemme de Gronwall, il vient:

$$\|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^k(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{Ct}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|u^k(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Car comme P_k est une projection orthogonale:

$$\|u^k(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|P_k(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

On intègre alors (12), et avec l'estimation précédente cela donne:

$$\begin{aligned} \|u^k\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C \|u^k(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer $\|u^{k'}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$. Soit $f \in H^1(\Omega)$. On pose $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \in E_k$ et $f_2 \in E_k^\perp$. On a alors:

$$\begin{aligned} |\langle u^{k'}, f \rangle| &= |\langle u^{k'}, f_1 \rangle| \\ &= |B(u^k, f_1)| \\ &\leq C (\|u^k\|_{H^1(\Omega)} \|f_1\|) \\ &\leq C (\|u^k\|_{H^1(\Omega)} \|f\|) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\|u^{k'}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u^k\|_{H^1(\Omega)}$. En intégrant, il vient donc:

$$\begin{aligned} \|u^{k'}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C (\|u^k\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}) \\ &\leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Nous allons donc faire tendre k vers l'infini et montrer que la suite u^k converge vers une solution faible issue de u_0 , à l'aide du contrôle que donnent les estimations d'énergie.

Lemme 12.3.2. *Existence de solution faible:*

Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une solution faible au problème d'évolution.

Preuve 12.3.3. 1. Montrons que la suite des u^k possède une valeur d'adhérence forte.

Les estimations précédentes montrent que la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et la suite des dérivées en temps $(u^{k'})_{k \in \mathbb{N}}$ est elle bornée dans $L^2(0, T; H^{1'}(\Omega))$. Or nous avons les injections suivantes:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{1'}(\Omega)$$

La première injection est l'injection donnée par l'identité:

$$I_1 : \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \mapsto & f \end{array}$$

Cette première injection est compacte. La deuxième injection est donnée par:

$$I_2 : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \rightarrow & H^{1'}(\Omega) \\ f & \mapsto & \langle f, \cdot \rangle_{L^2} \end{array}$$

Cette deuxième injection est continue.

On peut donc appliquer le lemme d'Aubin-Lions: il existe une sous-suite (toujours notée u^k pour plus de simplicité) et une valeur d'adhérence u , telle que $u^k \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

2. Montrons que celle des $u^{k'}$ possède une valeur d'adhérence faible v , et que l'on a $u' = v$.

$(u^{k'})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2(0, T; H^{1'}(\Omega))$. On peut donc également trouver une sous-suite (encore notée $u^{k'}$) telle que $u^{k'} \rightharpoonup v$ dans $L^2(0, T; H^{1'}(\Omega))$.

Soit ψ une fonction C^∞ à support compact dans $]0, T[$. On veut montrer que:

$$\int_0^T \psi v$$

peut être identifiée comme une fonction f de $H^1(\Omega)$, au sens $\langle \int_0^T \psi v, w \rangle = \int_\Omega f w$ pour tout $w \in H^1(\Omega)$. Et que l'on a l'égalité:

$$f = - \int_0^T \psi' u$$

Cela est équivalent à montrer que pour tout $w \in H^1(\Omega)$, l'on a:

$$\langle \int_0^T \psi' u, w \rangle = \langle - \int_0^T \psi v, w \rangle$$

Or:

$$\begin{aligned}
\langle \int_0^T \psi' u, w \rangle &= \int_0^T \langle \psi' u, w \rangle \\
&= \int_0^T \langle u, \psi' w \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle u^k, \psi' w \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \int_0^T u^k \psi', w \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} - \langle \int_0^T u^{k'} \psi, w \rangle \\
&= - \langle \int_0^T v \psi, w \rangle
\end{aligned}$$

on a donc bien $u' = v$.

3. Montrons alors que u convient.

Pour tout $w_m \in C(0, T; E_m)$, pour $k \geq m$ comme u^k vérifie la projection du problème sur E_k on a pour tout t :

$$\langle u^{k'}(t), w_m(t) \rangle + B(u^k(t), w_m(t)) = 0$$

On intègre alors cette relation pour trouver:

$$\int_0^T \langle u^{k'}, w_m \rangle dt + \int_0^T B(u^k, w_m) dt = 0$$

Or u^k converge fortement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ d'où:

$$\int_0^T B(u^k, w_m) dt \rightarrow \int_0^T B(u, w_m) dt$$

De même $u^{k'}$ converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, d'où:

$$\int_0^T \langle u^{k'}, w_m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u', w_m \rangle dt$$

En passant à la limite on obtient alors:

$$\int_0^T \langle u', w_m \rangle + B(u, w_m) dt = 0$$

Par densité de $\cup_{m \in \mathbb{N}} C(0, T; E_m)$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, on conclut que pour tout $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, l'on a:

$$\int_0^T \langle u', w \rangle + B(u, w) dt = 0$$

Et on obtient donc:

$$\langle u', w \rangle + B(u, w) = 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]$$

Ce qui termine la preuve.

Lemme 12.3.3. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Alors toute solution faible du problème d'évolution est unique.

Preuve 12.3.4. Montrer l'unicité d'une solution au problème pour toute condition initiale est équivalent à montrer l'unicité pour une solution issue de 0. Or pour une telle solution u les estimations d'énergies donnent (voir lemme 3.3.1.):

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Donc $u = 0$. D'où l'unicité.

Afin de clôturer cette partie sur le problème d'évolution, nous énonçons un théorème récapitulatif ce que l'on vient de montrer, mais vu sous l'angle des semi-groupes. On aurait pu montrer directement l'existence du semi-groupe donnant les solutions en étudiant son générateur (qui, comme on l'imagine, est L). Le problème était la détermination du domaine de L , rendue compliquée par la condition aux frontières.

Théorème 12.3.2. On note T_t l'opérateur qui à u_0 une condition initiale, associe $u(t)$, où u est la solution faible du problème d'évolution issue de u_0 . Alors $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, il vérifie:

1. T_t est bien défini pour tout $t \geq 0$. C'est un opérateur linéaire, continu sur $L^2(\Omega)$.
2. $T_t T_{t'} = T_{t+t'}$ pour tous $t, t' \geq 0$, et $T_0 = I$.
3. Les trajectoires données par $(T_t)_{t \geq 0}$ sont continues: pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $t \mapsto T_t(u_0)$ est continue de \mathbb{R}_+ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve 12.3.5. • Le fait que T_t soit bien défini et que les trajectoires soient continues provient de la continuité énoncée dans le théorème 3.3.1.

- La propriété de semi-groupe provient de l'unicité des solutions pour le problème d'évolution.
- La continuité de T_t est une conséquence des estimations d'énergies énoncées dans le lemme 3.3.1.

12.4 Propriétés des trajectoires et analyse de la convergence vers l'état stationnaire

Dans les deux parties précédentes, nous avons montré que:

- A multiplication par une constante près, il existe une unique solution stationnaire au problème, que celle-ci est positive sur Ω .
- De toute donnée initiale, il existe une unique solution au problème d'évolution définie pour tout temps t .

Des questions naturelles peuvent alors se poser:

1. Pour une donnée initiale positive, la solution au problème d'évolution reste-t-elle positive?
2. A-t-on conservation de la masse le long des trajectoires?
3. Converge-t-on vers l'unique état stationnaire de même masse?

L'objectif de cette partie est de montrer que l'on peut répondre par l'affirmative à toutes ces questions. La positivité et la conservation de la masse ne sont pas très difficiles à montrer. La convergence en revanche réclame des outils un peu plus sophistiqués. Nous verrons que les propriétés montrées dans les parties 1 et 2 permettent d'établir l'existence d'un trou spectral (notion explicitée plus tard) pour le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$. Nous verrons également une autre méthode, utilisant la dissipation d'"entropies" bien choisies pour montrer cette convergence.

12.4.1 résultats montrés "de manière intuitive" et trou spectral

conservation de la masse et positivité En fait, le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ possède des propriétés intéressantes qui n'ont pas été dites dans le dernier théorème (car elles ne concernaient pas directement les questions que l'on se posait dans cette partie). Nous les donnons donc ici, elles nous seront utiles dans la suite.

Lemme 12.4.1. 1. Le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe compact de $L^2(\Omega)$.

2. son générateur est $\tilde{L} = -L$, et l'on a $Dom(\tilde{L}) = \{u \in H^2(\Omega), (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Remarque 12.4.1. Plus d'informations sur les semi-groupes, les générateurs, et les liens entre ces deux notions sont donnés en annexe.

Preuve 12.4.1. 1. Nous avons vu que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u(t)$ est immédiatement dans $H^1(\Omega)$ après l'instant initial. Or, pour une fonction $g \in H^1(\Omega)$ on peut montrer que la solution u du problème d'évolution associée à la condition initiale de g a une régularité encore plus forte:

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \text{ et } u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

et l'on a les estimations suivantes:

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|g\|_{H^1(\Omega)}$$

La constante T dépendant seulement de la géométrie de l'ouvert Ω , des coefficients de L et de T . De plus, on peut montrer que cela implique $u \in C(0, T; H^1(\Omega))$. Nous ne prouverons pas ces estimations. Leur démonstration, trop longue, est assez similaire à celle des estimations d'énergie montrées dans la partie précédente.

Soit donc $t > 0$ et $T > t$. Il existe alors $t_0 > 0$ et $a > 0$ tels que $t > t_0 + a$. On a alors, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et tout $t_1 \in [t_0, t_0 + a]$:

$$u(t_1) \in H^1(\Omega)$$

avec l'estimation (provenant des estimations d'énergie):

$$\|u\|_{L^2(t_0, t_0 + a; H^1(\Omega))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

On sait alors par le gain de régularité et les estimations l'accompagnant précédents:

$$u(t) \in L^\infty(t_1, T; H^1(\Omega))$$

avec l'estimation:

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u(t_1)\|_{H^1(\Omega)}$$

Il vient donc en combinant ces deux résultats:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \times \frac{1}{a} \int_{t_0}^{t_0+a} \|u(t_1)\|_{H^1(\Omega)} dt_1 \\
&\leq \frac{C}{a} a \left(\int_{t_0}^{t_0+a} \|u(t_1)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|u\|_{L^2(t_0, t_0+a; H^1(\Omega))} \\
&\leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de T_t dans $H^1(\Omega)$. On en déduit alors la compacité.

2. Prouvons d'abord la première inclusion. Soit $u_0 \in \text{Dom}(\tilde{L})$. On a:

- $t \mapsto u(t) = T(t)u_0$ est dérivable pour tout t , et notamment en 0.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(u(t) - u_0) = \tilde{L}(u_0)$

Par conséquent, par unicité de la dérivée faible, $u'(t) = \frac{du}{dt} \in L^2(\Omega)$ pour tout t . On a alors pour tout $t \geq 0$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + B(u, v) = 0$$

Le premier terme est alors le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$. Comme avant (voir preuve 3.2.4), on obtient après intégrations par parties et car $u \in H^2(\Omega)$ par régularité:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} + Lu &= 0, \text{ au sens } L^2(\Omega) \\
(\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega
\end{aligned}$$

D'où $\text{Dom}(\tilde{L}) \subset \{u \in H^2(\Omega), (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $\tilde{L} = -L|_{\text{Dom}(\tilde{L})}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $u_0 \in \{u \in H^2(\Omega), (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, et $u(t)$ la solution au problème d'évolution issue de u_0 . On peut alors montrer (d'une façon similaire à celle utilisée dans la preuve 3.3.2), que $u \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$. D'où $u \in \text{Dom}(\tilde{L})$.

On a donc montré $\{u \in H^2(\Omega), (\phi u - \nabla u) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \subset \text{Dom}(\tilde{L})$.

Lemme 12.4.2. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, la masse est conservée:

$$\int_{\Omega} u(t) = \int_{\Omega} u_0$$

où u désigne la solution du problème d'évolution issue de u_0 .

Preuve 12.4.2. Il suffit de montrer ce résultat sur un sous-espace dense. Nous allons donc nous placer sur $\text{Dom}(\tilde{L})$. Soit $u_0 \in \text{Dom}(\tilde{L})$. Alors la trajectoire $u(t)$ issue de u_0 est dérivable dans $L^2(\Omega)$ et l'on a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) &= \int_{\Omega} \frac{du}{dt} \\
&= \int_{\Omega} \tilde{L}(u(t)) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi u(t)) - \Delta u(t) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi u(t) - \nabla(u(t))) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\phi u(t) - \nabla(u(t))) \cdot \vec{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc la masse est conservée sur $\text{Dom}(\tilde{L})$, donc elle l'est sur $L^2(\Omega)$.

Lemme 12.4.3. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ qui soit positive presque partout, la positivité est conservée:

$$u(t) \geq 0, \text{ presque partout}$$

où u désigne la solution du problème d'évolution issue de u_0 .

Preuve 12.4.3. Commençons par deux remarques. La première est que l'on peut se restreindre à montrer cette propriété pour un sous-espace dense. La seconde est qu'il est équivalent de montrer cette propriété pour le sous-groupe $(e^{bt}T_t)_{t \geq 0}$. Le générateur de ce groupe est $-L + bI$ de même domaine que \tilde{L} .

L'espace des fonctions C^∞ à support compact et positives sur Ω est dense dans l'espace des fonctions positives de $L^2(\Omega)$. Cet espace est inclus dans $\text{Dom}(\tilde{L})$. Nous nous placerons sur cet espace.

On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction v_0 positive, dans C_c^∞ telle que pour un $t_1 > 0$, $v(t_1)$ soit strictement négative quelque part sur Ω . Comme v_0 est lisse et dans $\text{Dom}(\tilde{L})$ alors $v \in C^\infty(0, T; C^\infty(\Omega))$ (l'idée de la preuve d'un tel gain de régularité est similaire à celle utilisée dans la preuve 3.3.2, mais est trop longue pour être réécrite ici).

Soit $a > 0$ tel que $v(t_1) < -a$ quelque part sur Ω . Nous allons considérer la fonction $u(t) = e^{bt}v(t) + \frac{a}{t_1}$. Elle vérifie $\frac{du}{dt} = -L + bI$ sur Ω , et $u(t_1)$ est strictement négative quelque part sur Ω . On pose $b := b_1$ de sorte que le terme d'ordre 0 de $-L + b_1$: $-\nabla(\phi) + b_1$, soit positif. Nous allons considérer les deux ensembles $O_1 = \{t, u(t) \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ et $O_2 = [0, +\infty[\setminus O_1$, montrer que ce sont deux ouverts non vides, ce qui est absurde par connexité.

O_2 est non vide par hypothèse. De plus, comme $u \in C^\infty(0, T; C^\infty(\bar{\Omega}))$, alors O_2 est ouvert.

O_1 est non vide car contient l'instant 0. Soit $t_0 \in O_1$. Alors $u(t_0) \geq 0$. Soit $x \in \bar{\Omega}$ tel que $u(t_0)(x) = 0$.

Si $x \in \Omega$, on a: $\frac{\partial}{\partial x_i} u(t_0)(x) = 0$ (car sinon $u(t_0)(y) < 0$ quelque part proche de x). Si $u \in \partial\Omega$, alors $\frac{\partial}{\partial n} u(t_0)(x) := \nabla u(t_0)(x) \cdot \vec{n} = 0$ via la condition au bord. Soit e_i une base du plan tangent à $\partial\Omega$, on a alors $\frac{\partial}{\partial e_i} u(t_0)(x)$ (sinon de même on aurait $u(t_0)(y) < 0$ au voisinage de x sur $\partial\Omega$). On vient donc de montrer que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ tel que $u(t_0)(x) = 0$, $\nabla(u(t_0))(x) = 0$.

On montre alors de la même manière que $\frac{\partial}{\partial^2 x_i} u(t_0) \geq 0$ sur l'ensemble des points x tels que $u(t_0)(x) = 0$. Ainsi, $\Delta u(t_0)(x) \geq 0$.

Pour tout $x \in \bar{\Omega}$ tel que $u(t_0)(x) = 0$ on a alors $\frac{\partial}{\partial t} u = a > 0$. Par continuité, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{a}{2} > 0$ sur l'ensemble des x tels que $u(x) > \epsilon$. Il existe donc un intervalle de temps $[t_0, t_0 + \eta]$ tel que $u(t) \geq 0$. Donc $t_0 \in \overset{\circ}{O}_1$: O_1 est ouvert.

On en conclut que O_1 et son complémentaire dans $[0, \infty[$ sont tous deux des ouverts non vides, ce qui est absurde par connexité.

comportement asymptotique Nous allons maintenant nous intéresser à la convergence pour des temps longs vers la solution du problème stationnaire de même masse. Pour cela, on utilise les outils de la

théorie spectrale pour les semi-groupes fortement continus (pour plus de résultats et un aperçu sur la théorie générale, nous renvoyons à la quatrième partie de l'annexe). Nous décomposons $L^2(\Omega)$ en deux sous-espaces:

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathbb{C}u_{stat} \\ X_1 &= \{u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u = 0\} \end{aligned}$$

Lemme 12.4.4. X_0 et X_1 sont deux sous espaces fermés de $L^2(\Omega)$ stables sous l'action du semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$. De plus l'on a:

$$\begin{aligned} T_t|_{X_0} &= I \\ \sigma(\tilde{L}|_{X_1}) &\subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) < 0\} \\ \sigma(T_t|_{X_1}) &\subset B(0, 1) \end{aligned}$$

Preuve 12.4.4. 1. X_0 est évidemment stable, car c'est le sous-espace des états d'équilibre. X_1 est stable car la masse est conservée le long des trajectoires (cf lemme 3.4.2)

2. Dans le théorème 3.2.2 on a étudié l'opérateur L_b sur le domaine de \tilde{L} . On a montré que cet opérateur possède b comme valeur propre principale, que son sous-espace propre est le sous-espace des états stationnaires $\mathbb{C}u_{stat}$. Pour toute autre valeur propre λ , on a $\operatorname{Re}(\lambda) > b$.

Comme b n'est pas valeur propre de L_b sur X_1 , les valeurs propres λ de $L_b|_{X_1}$ vérifient donc $\operatorname{Re}(\lambda) > b$.

Comme $\tilde{L} = -L_b + b$, alors $\sigma(\tilde{L}|_{X_1}) = -\sigma(L_b|_{X_1 \cap \operatorname{Dom}(\tilde{L})}) + b$ donc les valeurs propres de $\tilde{L}|_{X_1}$ ont toutes une partie réelle strictement inférieure à 0.

Il reste à voir que le spectre de \tilde{L} n'est constitué que de valeurs propres. Pour cela, nous utilisons un résultat montré en annexe (voir quatrième partie de celle-ci). Pour un semi-groupe $(S_t)_{t \geq 0}$ fortement continu et finalement compact (après un temps t_0), de générateur A :

$$\sigma(S_t) \setminus \{0\} = P\sigma(S_t) \setminus \{0\} = e^{tP\sigma(A)} = e^{t\sigma(A)}$$

pour tout $t > t_0$, où $P\sigma(\cdot)$ désigne l'ensemble des valeurs propres.

Ce résultat donne directement que $\sigma(\tilde{L}) = P\sigma(\tilde{L})$.

3. Grâce au résultat précédent, on a:

$$\sigma(T_t|_{X_1}) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(\tilde{L}|_{X_1})}$$

Or $\sigma(\tilde{L}|_{X_1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$, d'où $\sigma(T_t|_{X_1}) \setminus \{0\} \subset B(0, 1)$, soit:

$$\sigma(T_t|_{X_1}) \subset B(0, 1)$$

Lemme 12.4.5. Le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable sur X_1 : il existe deux constantes $M, \eta > 0$ telles que:

$$\|T_t|_{X_1}\| \leq Me^{-\eta t}$$

Preuve 12.4.5. Soit $t > 0$. On sait que: $\sigma(T_t|_{X_1}) \subset B(0, 1)$. Or cet ensemble est fermé. Il existe donc une constante $1 > r > 0$ telle que: $\sigma(T_t|_{X_1}) \subset B(0, r)$ et l'on a donc $r(T_t|_{X_1}) \leq r$.

Par la formule de Gelfand $r(T_t|_{X_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_t^n|_{X_1}\|^{\frac{1}{n}}$, et de plus $T_t^n|_{X_1} = T_{nt}|_{X_1}$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe donc N tel que:

$$\|T_N t|_{X_1}\| \leq r^N (1 + \epsilon)^N$$

En prenant ϵ tel que $\eta := r(1 + \epsilon) < 1$ on a alors:

$$\|T_N t|_{X_1}\| < 1$$

En posant $Nt = t_0$, pour tout $s > 0$ on a:

$$T_s = T_{t_0}^{\lfloor \frac{s}{t_0} \rfloor} T_s - t_0 \lfloor \frac{s}{t_0} \rfloor$$

En posant $M = \max_{[0, t_0]} \|T_s\|$ on obtient alors le résultat (voir annexe pour plus de détail sur la borne de croissance d'un sous-groupe).

Ce dernier résultat permet de prouver la convergence pour les temps longs:

Lemme 12.4.6. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, on pose $m = \int_{\Omega} u_0$. Alors:

$$u(t) = T_t(u_0) \rightarrow mu_{stat}$$

dans $L^2(\Omega)$.

Preuve 12.4.6. On pose $u_0 = v + w$ avec $v = mu_{stat} \in X_0$ et $w = u_0 - v \in X_1$. Alors pour tout t ,

$$u(t) = v + T_t|_{X_1}(w)$$

et l'on a établi:

$$T_t|_{X_1}(w) \leq M e^{-\eta t} \|w\|$$

ce qui permet de conclure.

Faisons un rapide bilan de cette partie. Nous avons réussi à montrer la conservation de la masse et de la positivité par approximation par des solutions lisses. Cette technique est applicable pour de nombreux problèmes. Elle a un côté "intuitif" puisqu'elle renvoie à la vision locale d'une équation aux dérivées partielles (utilisation de la notion classique de dérivée). Le principal problème est la longueur des calculs.

Pour montrer la convergence pour les temps longs il nous a fallu des outils plus sophistiqués. L'idée principale est l'analogie avec le cas de la dimension finie. En effet, l'équation $u' = Au$ où A est une matrice possède l'origine comme état exponentiellement stable si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative (condition de stabilité de Lyapunov). Le cas de la dimension infinie est un peu plus difficile, car les liens entre un semi-groupe fortement continu et son générateur sont beaucoup moins forts. En revanche, nous avons vu que la compacité est une très bonne propriété pour relier les spectres de ces deux objets.

12.4.2 utilisation de méthodes d'entropie

Ce paragraphe est consacré à l'utilisation de diverses entropies. Le point fort de cette méthode est la rapidité. Une fois les inégalités d'entropies montrées, de nombreux résultats (convergence, conservation de la positivité) vont tomber simplement. En revanche, une bonne compréhension des phénomènes à l'œuvre est un peu plus délicate. En cela elle est un peu moins "intuitive" que la précédente. Les résultats de cette partie sont issues d'idées développées dans [?]

Pour effectuer nos calculs, nous avons besoin de fonctions vérifiant de "bonnes propriétés". Ces bonnes propriétés sont données par la résolution du problème dual, objet de la prochaine définition.

Définition 12.4.1. *Le problème dual est:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v &= -\phi \cdot \nabla(v) - \Delta v, \text{ sur } \Omega \\ \nabla v \cdot \vec{n} &= 0, \text{ sur } \partial\Omega\end{aligned}$$

On y associe comme avant les notions de solutions faibles et classiques.

Remarque 12.4.2. *Le problème dual n'admet pas forcément de solution pour toute condition initiale, à cause de l'inversion du signe pour la diffusion. Néanmoins, les fonctions constantes sont solutions de ce problème (et cela nous suffira par la suite).*

Avec un état stationnaire du problème principal, et une solution du problème dual, on peut définir une entropie pour le système, et étudier son évolution le long des trajectoires.

Définition 12.4.2. *On appelle entropie relative la donnée d'un quadruplet (E, H, u_{stat}, v) où:*

- H est une fonction convexe sur \mathbb{R} , de croissance au plus quadratique au voisinage de l'infini.
- u_{stat} est un état stationnaire du problème principal, strictement positif sur Ω .
- v est une solution forte du problème dual définie sur un intervalle $[0, T]$.
- E est une fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega) \times [0, T]$ par:

$$E(u, t) = \int_{\Omega} v(t) u_{stat} H\left(\frac{u(t)}{u_{stat}}\right)$$

Dans la suite, on identifiera une entropie relative à sa fonctionnelle.

Remarque 12.4.3. *Les propriétés de croissances assurent que E est bien définie sur $L^2(\Omega)$.*

Le lemme suivant montre qu'avec les propriétés vérifiées par v , l'entropie relative se comporte bien le long des trajectoires. En effet, la dissipation d'entropie admet une expression simple.

Lemme 12.4.7. *On suppose que H est deux fois dérivable. Soit u une solution du problème principal. Alors $E(u)$ est dérivable immédiatement après $t = 0$ et l'on a:*

$$-I(u) := \frac{d}{dt}E(u) = - \int_{\Omega} v u_{stat} H''\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) \left| \nabla\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) \right|^2$$

Preuve 12.4.7. 1. Montrons que pour tout x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}})) &= -\nabla \cdot (\phi vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) + \nabla(v^2(\nabla(\frac{u_{stat}}{v}H(\frac{u}{u_{stat}})))) \\ &\quad -vu_{stat}H''(\frac{u}{u_{stat}}) \left| \nabla(\frac{u}{u_{stat}}) \right|^2 \end{aligned}$$

Pour tout temps $t > 0$, u est dérivable sur $H^1(\Omega)$. Alors on peut effectuer le calcul suivant pour presque tout x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}})) &= u_{stat} \frac{dv}{dt} H(\frac{u}{u_{stat}}) + v \frac{du}{dt} H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\ &= u_{stat}(-\phi \cdot \nabla(v) - \Delta(v))H(\frac{u}{u_{stat}}) + v(-\nabla \cdot (\phi u) + \Delta(u))H'(\frac{u}{u_{stat}}) \end{aligned}$$

Faisons apparaître le premier terme:

$$\begin{aligned} &= -\nabla(\phi vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}})) + \nabla(\phi u_{stat})vH(\frac{u}{u_{stat}}) + \phi vu_{stat} \nabla(H(\frac{u}{u_{stat}})) - u_{stat} \Delta(v)H(\frac{u}{u_{stat}}) \\ &\quad + v(-\nabla(\phi u) + \Delta u)H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\ &= -\nabla(\phi vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}})) \\ &\quad + \Delta u_{stat}vH(\frac{u}{u_{stat}}) - \frac{\phi vu}{u_{stat}} \nabla(u_{stat})H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\ &\quad - u_{stat} \Delta v H(\frac{u}{u_{stat}}) + v(-\nabla(\phi)u + \Delta u)H'(\frac{u}{u_{stat}}) \end{aligned}$$

Maintenant développons l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\nabla(v^2(\nabla(\frac{u_{stat}}{v}H(\frac{u}{u_{stat}})))) &= \nabla(v\nabla u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) - \nabla v.u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) + vu_{stat}\nabla(H(\frac{u}{u_{stat}}))) \\
&= \nabla(v\nabla u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) - \nabla v.u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) + v\nabla uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&= v\Delta u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) + v\nabla u_{stat}\cdot\nabla(H(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&\quad - \Delta vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) - \nabla vu_{stat}\cdot\nabla(H(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&\quad + \nabla v\nabla uH'(\frac{u}{u_{stat}}) + v\Delta uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \nabla v\nabla u_{stat}\frac{u}{u_{stat}}H'(\frac{u}{u_{stat}}) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u\nabla u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + \frac{vu}{u_{stat}^2}(\nabla u_{stat})^2H'(\frac{u}{u_{stat}}) - \frac{vu}{u_{stat}}\Delta u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\nabla u\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&= v\Delta u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \frac{vu}{u_{stat}^2}(\nabla u_{stat})^2H'(\frac{u}{u_{stat}}) + \frac{v}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\cdot\nabla uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \Delta vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \nabla v\cdot\nabla uH'(\frac{u}{u_{stat}}) + \frac{u}{u_{stat}}\nabla v\cdot\nabla u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + \nabla v\nabla uH'(\frac{u}{u_{stat}}) + v\Delta uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \nabla v\nabla u_{stat}\frac{u}{u_{stat}}H'(\frac{u}{u_{stat}}) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u\nabla u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + \frac{vu}{u_{stat}^2}(\nabla u_{stat})^2H'(\frac{u}{u_{stat}}) - \frac{vu}{u_{stat}}\Delta u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\nabla u\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&= v\Delta u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \Delta vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\Delta uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \frac{vu}{u_{stat}}\Delta u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\nabla u\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) \\
&= v\Delta u_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \Delta vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\Delta uH'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad - \frac{u}{u_{stat}}\phi\cdot\nabla u_{stat}H'(\frac{u}{u_{stat}}) - vu\nabla\cdot(\phi)H'(\frac{u}{u_{stat}}) \\
&\quad + v\nabla u\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}}))
\end{aligned}$$

Or ce que l'on a laissé de côté vérifie:

$$v\nabla u\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) - \frac{vu}{u_{stat}}\nabla u_{stat}\nabla(H'(\frac{u}{u_{stat}})) = vu_{stat}H''(\frac{u}{u_{stat}})\left|\nabla(\frac{u}{u_{stat}})\right|^2$$

d'où la relation énoncée.

2. On va intégrer la relation obtenue sur Ω .

Comme:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} -\nabla\cdot(\phi vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}}) + \nabla(v^2(\nabla(\frac{u_{stat}}{v}H(\frac{u}{u_{stat}})))) \\
&= \int_{\partial\Omega} -\phi vu_{stat}H(\frac{u}{u_{stat}})\cdot\vec{n} + v^2(\nabla(\frac{u_{stat}}{v}H(\frac{u}{u_{stat}})))\cdot\vec{n}
\end{aligned}$$

Or avec les conditions aux frontières on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}(\frac{u}{u_{stat}}) &= \frac{1}{u_{stat}^2}(\frac{\partial}{\partial n}uu_{stat} - (\frac{\partial}{\partial n}u_{stat}u)) \\
&= \frac{1}{u_{stat}^2}(-\phi\cdot\vec{n}uu_{stat} + \phi\cdot\vec{n}u_{stat}u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Et:

$$-\phi v u_{stat} H\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) \cdot \vec{n} + v \frac{\partial}{\partial n} u_{stat} H\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) = 0$$

D'où

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (\phi v u_{stat} H\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) + \nabla (v^2 (\nabla \left(\frac{u_{stat}}{v} H\left(\frac{u}{u_{stat}}\right)))) = 0$$

Ce qui permet de conclure.

On peut alors prouver d'une autre manière les résultats obtenus dans la partie précédente, à chaque fois en considérant une entropie relative adaptée.

Lemme 12.4.8. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ positive presque partout, la positivité est conservée.

Preuve 12.4.8. On prend comme solution du problème dual une fonction constante positive sur Ω . On choisit $H(r) = [r]^- = \max\{0, -r\}$. Comme H n'est pas deux fois dérivable, on va raisonner par approximation à l'aide d'une suite de fonctions H^n convexes et lisses convergeant vers H .

Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ positive. Alors:

$$\frac{d}{dt} E_n(u) = - \int_{\Omega} v u_{stat} H_n''\left(\frac{u}{u_{stat}}\right) \left| \nabla \left(\frac{u}{u_{stat}}\right) \right|^2 \leq 0$$

Donc $E_n(u) \leq E_n(u_0)$. En passant à la limite il vient:

$$\int_{\Omega} v u_{stat} \left[\frac{u}{u_{stat}}\right]^- \leq \int_{\Omega} v u_{stat} \left[\frac{u_0}{u_{stat}}\right]^- = 0$$

Donc u est positive.

Lemme 12.4.9. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solution du problème d'évolution converge vers la solution du problème stationnaire de même masse dans $L^2(\Omega)$.

Preuve 12.4.9. On considère pour v la fonction constante égale à 1. On prend $H(r) = \frac{r^2}{2}$. Alors on a:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{stat} \left| \frac{u}{u_{stat}} \right|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} u_{stat} \left| \nabla \left(\frac{u}{u_{stat}} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{stat} \left| \frac{u_0}{u_{stat}} \right|^2$$

En particulier, on en déduit que $\int_0^{\infty} \int_{\Omega} u_{stat} \left| \nabla \left(\frac{u}{u_{stat}} \right) \right|^2 < \infty$. On en déduit alors que pour toute suite $t_n \rightarrow \infty$ et $T > 0$:

$$\int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Omega} u_{stat} \left| \nabla \left(\frac{u}{u_{stat}} \right) \right|^2 \rightarrow 0$$

En développant cette quantité, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Omega} u_{stat} \left| \nabla \left(\frac{u}{u_{stat}} \right) \right|^2 &= \int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Omega} u_{stat} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u_{stat}^2} - 2 \frac{u}{u_{stat}^3} \nabla u_{stat} \cdot \nabla u \right)^2 \\ &= \int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Omega} u_{stat} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u_{stat}^2} - 2 \frac{u}{u_{stat}^3} \nabla u_{stat} \cdot \nabla u \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{u_{stat}^4} |\nabla u_{stat}|^2 \right) \end{aligned}$$

Le premier terme est équivalent à la norme $L^2(\Omega)$ du gradient, en effet $u_{stat} > a > 0$ sur Ω . De plus, tous les autres termes peuvent être contrôlés par la norme $L^2(\Omega)$ de u ou de son gradient:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u}{u_{stat}^2} \nabla u_{stat} \cdot \nabla(u) &\leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \\ \int_{\Omega} \frac{u^2}{u_{stat}^3} |\nabla u_{stat}|^2 &\leq C\|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la bornitude de u_{stat} et de ses dérivées et l'inégalité de Cauchy.

On sait que la fonction u est bornée dans L^2 grâce aux estimations d'énergie. On déduit alors de l'égalité précédente que ∇u est borné dans $L^2(t_n, t_n + T; L^2(\Omega))$.

On a donc montré que la séquence de fonctions u_n définie par $u_n(t) = u(t_n + t)$ pour $t \in [0, T]$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. A partir du fait que u est solution du problème principal, on déduit aisément également que u'_n est bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. On peut donc appliquer le lemme d'Aubin-Lions: il existe une fonction $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que $u_n \rightarrow v$ de manière forte dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Mais alors en extrayant une sous-suite on peut supposer que ∇u_n converge faiblement dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, et sa limite faible est alors le gradient de la limite forte.

A la limite on a:

$$\int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Omega} -2 \frac{u}{u_{stat}^3} \nabla u_{stat} \cdot \nabla(u) + \frac{u^2}{u_{stat}^4} |\nabla u_{stat}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} -2 \frac{v}{u_{stat}^3} \nabla u_{stat} \cdot \nabla(v) + \frac{v^2}{u_{stat}^4} |\nabla u_{stat}|^2$$

où l'on a utilisé les convergences fortes et faibles de u_n et ∇u_n , ainsi que le fait que ∇u_n soit bornée dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. De plus, comme la norme $L^2(\Omega)$ est équivalent à la norme donnée par:

$$\|w\|_{L^2(d_{\frac{1}{u_{stat}}})} = \int_{\Omega} \frac{u^2}{u_{stat}}$$

la convergence faible est également vraie pour cette norme (car elles définissent la même topologie). En particulier la relation suivante est vérifiée:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u_{stat}} \leq \liminf \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{u_{stat}}$$

On en déduit alors que:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_{stat} |\nabla(\frac{u}{u_{stat}})|^2 \leq \liminf \int_0^T \int_{\Omega} u_{stat} |\nabla(\frac{u_n}{u_{stat}})|^2 = 0$$

d'où $\nabla(\frac{u}{u_{stat}}) = 0$. Associé à la conservation de la masse, cela signifie $v = mu_{stat}$.

Comme cette valeur d'adhérence est unique, on en déduit qu'elle est la seule possible pour toute séquence de temps $(t_n)_{n \geq 0}$ et $T > 0$. Nous venons donc de montrer la convergence dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pour les temps longs.

Pour en déduire la convergence dans $L^2(\Omega)$, on remarque que pour $t > 0$, la dérivée en temps de u est bien définie et est bornée dans $L^2(\Omega)$. Si la convergence dans $L^2(\Omega)$ n'était pas vérifiée, il existerait donc une séquence t_n et un temps T tels que u_n ne convergerait pas dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ce qui est absurde.

Nous avons donc pu voir que des entropies relatives adaptées donnent de bons renseignements le long des trajectoires. On peut extraire plus de résultats encore que les deux présentés ici. Nous renvoyons à l'annexe pour une étude plus générale du concept. On remarque cependant que certains calculs ne semblent pas évidents a priori: la décomposition pour calculer la dissipation d'entropie n'était pas intuitive.

Chapter 13

Annexe

13.1 théorèmes de point fixe utilisés

Deux théorèmes de point fixe sont utilisés dans ce document: celui de Brouwer et celui de Schaefer (qui peut être vu comme une conséquence du premier, via le théorème de point fixe de Schauder). Nous donnons ici simplement les énoncés. Des démonstrations simples existent, mais la manière la plus élégante et instructive de les démontrer est à mon goût l'utilisation du degré, qui serait trop longue à écrire ici.

Théorème 13.1.1. *Théorème de point fixe de Brouwer:*

Soit f une application continue de la boule unité fermé de \mathbb{R}^n dans elle-même: $f : \overline{B}(0, 1) \rightarrow \overline{B}(0, 1)$.

Alors f admet au moins un point fixe, il existe $x \in \overline{B}(0, 1)$, $f(x) = x$.

Théorème 13.1.2. *Théorème de point fixe de Schaefer:*

Soit X un espace de Banach. Soit f une application compacte de X dans lui-même: $f : X \rightarrow X$. On suppose de plus que l'ensemble:

$$S := \{x \in X, x = \lambda f(x), \lambda \in [0, 1]\}$$

est borné.

Alors f admet un point fixe, il existe $x \in X$, $f(x) = x$.

13.2 théorème de Krein-Rutman

Cette section est consacrée au théorème de Krein-Rutman [?], à sa démonstration et au corollaire utilisé pour prouver l'existence et l'unicité d'une distribution de probabilité positive et stationnaire.

X désigne un espace de Banach, réel ou complexe, de norme $\| \cdot \|$. Les résultats sont valides pour des espaces de Banach réels, mais les preuves font intervenir des espaces de Banach complexes. Nous travaillerons donc sur le complexifié de X si celui-ci est un espace de Banach réel. Les résultats pour les

opérateurs complexifiés sont en effet valides pour les opérateurs de départ.

On note $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des endomorphismes continus sur X , et X' l'ensemble des formes linéaires continues sur X . $\sigma(T)$ désigne le spectre d'un opérateur T . $\lambda \in \sigma(T)$ est une valeur propre si il existe $v \in X \setminus \{0\}$ tel que $T(v) = \lambda v$. v est alors appelé vecteur propre. On note T^* l'adjoint d'un opérateur T .

Définition 13.2.1. *On appelle cône tout ensemble $C \subset X$ fermé, convexe, tel que $\alpha C \subset C$ pour tout $\alpha > 0$, et $C \cap \{-C\} = \{0\}$. Le cône est dit:*

- total si $C - C := \{x \in X, x = c_1 - c_2, \text{ pour } c_1, c_2 \in C\}$ est dense dans X .
- reproducteur si $C - C = X$.
- solide si son intérieur est non vide: $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$.

Remarque 13.2.1. (i) *Tout cône solide est reproducteur. En effet, soit $x \in X$ et soit $c_1 \in \overset{\circ}{C}$. Alors $c_2 := c_1 - tx \in C$ pour t assez petit. D'où $x = \frac{1}{t}c_1 - \frac{1}{t}c_2 \in C - C$.*

(ii) *Un cône induit un ordre partiel sur X . Il est défini par $u \leq v$ si $v - u \in C$.*

(iii) *Un élément de C est dit positif. Cet adjectif est issu de l'exemple classique de cône: \mathbb{R}_+^n vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^n .*

Définition 13.2.2. • *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est positif s'il préserve le cône: $T(C) \subset C$.*

- *On dit qu'il est strictement positif s'il envoie le cône dans son intérieur: $T(C) \subset \overset{\circ}{C}$.*

Définition 13.2.3. *Si C désigne un cône, on défini le cône dual de C par:*

$$C^* := \{f \in X', f(c) \geq 0 \forall c \in C\}$$

Remarque 13.2.2. • *Attention, C^* est effectivement un cône si et seulement si C est total. Cet aspect est essentiel pour que $C^* \cap -C^* = \{0\}$. En effet, si $f \in C^* \cap -C^*$ alors $f(x) = 0 \forall x \in C$, d'où $f = 0$ par densité de $C - C$. Inversement, si $C - C$ n'est pas dense, alors il existe une forme linéaire non nulle s'annulant sur $\overline{C - C}$ (via le théorème d'Hahn-Banach). On a alors $f \in C^* \cap -C^*$.*

- *Si T est un opérateur positif et C est total, alors T^* est un opérateur positif pour le cône C^* .*

Nous pouvons donc maintenant énoncer le théorème de Krein-Rutman, ainsi qu'un de ses corollaires

Théorème 13.2.1. *Soit C un cône total. Soit T un opérateur linéaire, compact, et positif: $K(C) \subset C$. On suppose que le rayon spectral de T est strictement positif, $r(T) > 0$.*

Alors $r(T)$ est une valeur propre de T , et est associé à un vecteur propre dans le cône: il existe $v \in C$, $T(v) = r(T)v$. De plus, $r(T) = r(T^)$ est également une valeur propre pour T^* , associée à un vecteur propre dans C^* .*

Remarque 13.2.3. • *Ce théorème est un exemple de théorème utilisant une structure d'ordre pour prouver des propriétés sur les valeurs propres d'un opérateur. Son avantage est le côté "intuitif", un opérateur préservant un ordre étant facile à repérer.*

- *Un corollaire très connu de ce théorème est le théorème de Perron-Frobenius: son application au cas d'une matrice préservant \mathbb{R}_+^n .*

Preuve 13.2.1. *Commençons par donner un plan de la preuve. Comme T est un opérateur compact, on a une bonne connaissance de son spectre, et cela permet de décomposer X en deux espaces plus simples. On réduira donc ce problème au cas de la dimension finie, où il se résout aisément à l'aide du théorème de point fixe de Brouwer. Le résultat pour T^* s'obtient en remarquant que C^* est total.*

1. La décomposition de X :

T est un opérateur compact, on a ainsi une connaissance de son spectre à l'aide du théorème de Riesz:

$\sigma(T) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ pour une suite $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tendant vers 0. De plus, si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre, le sous espace propre associé $E_\lambda = \{u \in X, T(u) = \lambda u\}$ est de dimension finie, et de même l'espace $V_\lambda = \{u \in X, (T - \lambda)^n(u) = 0, \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\}$ est de dimension finie.

En particulier, il existe un nombre fini de valeurs propres de module $r(T)$, que l'on nommera $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$. Pour toute autre valeur propre λ , on a $|\lambda| < q < r(T)$ pour un $q < r(T)$.

Cela permet de définir une décomposition spectrale: $X = X_0 \oplus X_1$ pour deux sous-espaces vectoriels fermés X_1 et X_2 , invariants sous l'action de T . On notera P_0 la projection sur l'espace X_0 associée à cette décomposition. Les deux opérateurs $T_0 = T|_{X_0}$ et $T_1 = T|_{X_1}$ ont comme spectre: $\sigma(T_0) = \cup_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_i\}$ et $\sigma(T_1) = \sigma(T) \setminus \sigma(T_0)$. De plus, $X_0 = \cup_{1 \leq i \leq N} V_{\lambda_i}$ est de dimension finie. Étant donné le spectre de T_0 , cet opérateur est inversible, et l'on a $\sigma(T_0^{-1}) = \cup_{1 \leq i \leq N} \{\frac{1}{\lambda_i}\}$.

2. Réduction du problème sur un espace de dimension finie:

On pose $K = C \cap X_0$. Nous allons montrer que cet espace n'est pas réduit au vecteur nul.

Tout d'abord, comme C est total, il existe $v \in C$ tel que $P_0(v) \neq 0$. On pose $v = v_0 + v_1$, pour $v_0 \in X_0$ et $v_1 \in X_1$.

On se rappelle alors de la position dans le plan complexe des deux opérateurs T_0 et T_1 : $\sigma(T_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = r(T)\}$ et $\sigma(T_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < q\}$. Soient q_1 et q_2 tels que $q < q_1 < q_2 < r(T)$. Comme d'après la formule de Gelfand $r(T_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_1^n\|^{\frac{1}{n}}$ (et de même pour T_0^{-1}), on obtient alors pour n assez grand:

$$\|T_1^n\| \leq q_1^n, \|T_0^{-n}\| \leq q_2^{-n}$$

On considère donc la suite $(T^n(v))_{n \in \mathbb{N}} = (T_0^n(v_0) + T_1^n(v_1))_{n \in \mathbb{N}}$. L'estimation précédente nous indique donc qu'asymptotiquement, $T_1^n(v_1)$, en norme, sera négligeable devant $T_0^n(v_0)$, car:

$$\begin{aligned} \|v_0\| &\leq \|T_0^{-n}\| \|T_0^n(v_0)\| \\ \|v_0\| q_2^n &\leq \|T_0^n(v_0)\| \\ \text{donc } \frac{\|T_1^n(v_1)\|}{\|T_0^n(v_0)\|} &\leq \frac{q_1^n \|v_1\|}{\|v_0\| q_2^n} \end{aligned}$$

Ainsi, on a, car X_0 est de dimension finie: $\frac{T^n(v)}{\|T_0^n(v_0)\|} \rightarrow w \in X_0$ avec w de norme 1. De plus, comme C est un convexe fermé, invariant par T , on a $w \in C$. Nous avons donc montré que K contient des éléments non nuls.

3. Existence d'un vecteur propre sur K :

K est une partie fermée non vide, convexe, et fermée de X_0 . On note $B(0, 1)$ la boule unité fermée de X_0 . On pose $K_0 = K \cap B(0, 1)$. Soit y un élément non nul de K_0 . On considère alors l'application suivante:

$$F : K_0 \rightarrow K_0 \\ x \mapsto \frac{\|x\|T(x) + (1 - \|x\|)y}{\|\|x\|T(x) + (1 - \|x\|)y\|}$$

La fonction F est bien définie car le dénominateur ne s'annule jamais (K étant un convexe invariant par T et y étant non nul). En outre, pour tout $x \in K_0$, $\|F(x)\| = 1$. F est donc une application de K_0 dans lui-même, et admet ainsi un point fixe $x \in K_0$ d'après le théorème de Brouwer.

Ce point fixe vérifie $\|x\| = 1$ d'où $\|T(x)\| = T(x)$. x est donc associée à une valeur propre réelle et positive. Or d'après les propriétés du spectre de T sur X_0 , on a $\|T(x)\| = r(T)$. Ce qui termine la preuve.

Corolaire 13.2.1. Soit C un cône solide. Soit T un opérateur linéaire compact, strictement positif, c'est-à-dire envoyant C dans son intérieur $T(C \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{C}$. Alors:

- (i) Le rayon spectral de T est strictement positif: $r(T) > 0$.
- (ii) $r(T)$ est une valeur propre simple de l'opérateur T , associée à un vecteur propre dans le cône C . Il n'y a pas d'autres valeurs propres associées à un vecteur propre dans C .
- (iii) Toutes les autres valeurs propres λ vérifient $|\lambda| < r(T)$.

Preuve 13.2.2. (i) Nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} > 0$, ce qui permettra de conclure (étant donné que cette limite est égale au rayon spectral de T , c'est la formule de Gelfand).

Soit $u \in \overset{\circ}{C}$. Alors il existe une boule centrée en u contenue dans C , que l'on notera $B(u, d)$. On a alors, pour tout $w \in X$: $u - \frac{d}{\|w\|}w \in C$, soit $\frac{d}{\|w\|}w \leq u$. De plus, comme T envoie C dans son intérieur, on a $u \leq \alpha T(u)$ pour une constante $\alpha > 0$.

On note $S := \alpha T$. Alors $u \leq S(u)$, et comme S préserve aussi le cône, on a $S^n(u) \leq S^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit l'encadrement: $u \leq S^n(u) \leq \frac{\|S^n(u)\|}{d}u$, d'où:

$$u \leq S^n(u) \leq \frac{\|S^n(u)\|}{d}u \\ \text{donc} \quad 1 \leq \frac{\|S^n(u)\|}{d} \\ \text{soit} \quad \frac{d}{\alpha^n \|u\|} \leq \|T^n\|$$

On obtient alors:

$$\frac{1}{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{\alpha^n \|u\|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Ce qui termine la preuve du premier point.

- (ii) D'après le théorème précédent, nous avons l'existence d'un vecteur propre $v \in C$ associé à la valeur propre $r(T)$. Nous allons commencer par montrer que $r(T)$ est une valeur propre simple, puis nous montrerons qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres associées à un vecteur propre dans le cône.

Pour montrer le premier point, nous allons prouver que $\ker((r(T)I - T)^2) = \ker(r(T)I - T) =$

$Vec(\{v\})$.

Soit w un autre vecteur propre associé à la valeur propre $r(T)$. On considère l'application $f : t \mapsto v + tw$. Alors f "sort" du cône. En effet, si l'on suppose par l'absurde que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in C$, on obtient $\frac{v}{|t|} + \text{sgn}(t)w \in C$ pour tout t . En passant à la limite, comme C est fermé, on a $w \in C$ et $-w \in C$, ce qui est une contradiction. Il existe donc $t_0 \neq 0$ tel que $f(t_0) \in \partial C$. Par stabilité de C par multiplication par un scalaire positif, on a $\partial C = \alpha \partial C$ pour tout $\alpha > 0$, en particulier $T(f(t_0)) = r(T)f(t_0) \in \partial C$. Ceci est une contradiction car $T(C) \subset \overset{\circ}{C}$ par hypothèse. On a ainsi montré: $\ker(T - r(t)I) = Vec(\{v\})$.

Pour montrer la seconde égalité, on procède encore par l'absurde. On suppose qu'il existe $w \in X$ tel que $(T - r(T)I)(w) = av$ pour un a non nul. On peut alors supposer a strictement négatif, et l'on notera $a := -b$, quitte à remplacer w par $-w$. On a alors $T(w) = r(T)w - bv$. Comme $T(v + tw) = r(T)(v + tw) - bv$ on en déduit que $v + tw = \frac{1}{r(t)}(T(v + tw) + bv)$. On a alors $v + tw \in C$ pour tout $t > 0$. On sait que cela est vérifié pour de petites valeurs de t . Si par l'absurde il existait $t_1 > 0$ tel que $v + t_1w \in \partial C$, on aurait $\frac{1}{r(t_1)}(T(v + t_1w) + bv) \in \partial C$, ce qui est impossible car $T(v + t_1w) + bv \in C$ et T envoie C dans son intérieur. Cela donne $w \in C$, et comme $w = \frac{1}{r(T)}(T(w) + bv)$ on a même $w \in \overset{\circ}{C}$. Ainsi de même pour $t > 0$ assez petit, $w - tv \in C$, mais ceci n'est pas vérifié pour tout t (car sinon $-v \in C$). Donc il existe $t_0 > 0$ tel que $w - t_0v \in \partial C$. Or $T(w - t_0v) = r(T)w - r(T)t_0v - bv$, ce qui donne $w - t_0v = \frac{1}{r(T)}(T(w - t_0v) + bv) \in \overset{\circ}{C}$ ce qui est absurde. D'où $\ker((r(T)I - T)^2) = \ker(r(T)I - T)$.

Nous allons d'abord montrer (iii), ce qui permettra d'établir l'inexistence d'autres vecteurs propres dans le cône.

- (iii) On suppose par l'absurde que ce n'est pas vérifié pour une valeur propre $\lambda \neq r(T)$. Par définition de $r(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$ une égalité ne peut être obtenue que pour $\lambda = a + ib$ avec $b \neq 0$. Soit w un vecteur propre associé à λ .

On a $Vec(\{w\}) \cap C = \{0\}$. Supposons le contraire, il existe $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ tel que $zw \in C$. On a alors $\lambda zw \in C$. Comme $Re(\lambda) \neq 0$, on a $\{r_1zw + r_2\lambda zw, r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = Vec(\{w\})$. Mais alors $Vec(\{w\}) \cap C = \{0\}$ est un cône total pour $Vec(\{w\})$. $r(T)$ y est alors une valeur propre d'après le théorème de Krein-Rutman, ce qui est absurde.

D'après le paragraphe précédent, $\{z \in \mathbb{C}, v + zw \in C\}$ est borné (sinon, il existe une suite $\frac{v}{|z_n|} + \frac{1}{z_n}w$ dans C , avec $|z_n| \rightarrow \infty$, et en passant à la limite, via extraction d'une valeur d'adhérence on aurait $z'w \in C$ pour un $z' \neq 0$). Soit $M := \max_{z, v+zw \in C} |z|$ est fini, strictement positif (car $v \in \overset{\circ}{C}$), et fermé car C l'est. Ce maximum est donc atteint pour une valeur z_0 . On a alors $T(v + z_0w) = r(T)v + \lambda z_0w \in \overset{\circ}{C}$, donc $v + \left(\frac{\lambda}{r(T)}\right)z_0 \in \overset{\circ}{C}$. Ainsi, $v + (1 + \epsilon)\frac{\lambda}{r(T)}z_0w \in C$ pour ϵ petit. Or $|(1 + \epsilon)\frac{\lambda}{r(T)}z_0| = (1 + \epsilon)M > M$ ce qui est une contradiction.

retour au (ii) Montrons qu'il n'existe pas d'autre vecteur propre positif:

Soit w associé à une valeur propre $\lambda < r(T)$. Quitte à remplacer w par λw , on peut supposer que $w \in \dot{C}$. Alors $w - tv \in C$ pour $t > 0$ assez petit. Mais alors $T^n(w - tv) = \lambda^n w - tr(T)^n v \in C$ pour tout n , soit $\frac{\lambda^n}{r(T)^n} w - tv \in C$ pour tout n , et en passant à la limite on a $-v \in C$, ce qui est absurde.

13.3 Dérivée faible sur un espace de Banach

Dans les problèmes d'évolution, on a souvent recourt aux espaces $L^p(0, T; X)$ (où X est un espace de Banach). De plus, les dérivées en temps n'existent pas toujours sous un sens classique, et l'on a donc envie de donner un sens à une dérivée faible. Cette partie de l'annexe sert donc à donner les notions de bases utilisées dans ce document. Cependant, nous ne reviendrons pas sur l'intégration des fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Cette section est une adaptation de la partie consacrée à cette thématique dans [?]

Soit donc X un espace de Banach, muni d'une norme $\|\cdot\|$, et soit $T > 0$.

Définition 13.3.1. $L^p(0, T; X)$ est l'espace de toutes les fonctions fortement mesurables $u : [0, T] \rightarrow X$ qui vérifient:

$$\begin{aligned} \text{pour } 1 \leq p < \infty \quad \|u\|_{L^p(0, T; X)} &:= \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \\ \text{pour } p = \infty \quad \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} &:= \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty \end{aligned}$$

Ces espaces sont encore des espaces de Banach. En particulier, l'espace $L^2(0, T; H)$ où H est un espace de Hilbert est encore un espace de Hilbert pour le produit scalaire donné par:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_H dt$$

Pour de nombreux problèmes, le cadre $C^1(0, T; X)$ ne suffit pas. C'est en particulier le cas de l'équation étudiée dans ce document: la solution est immédiatement régulière ($H^1(\Omega)$) après 0, alors que la donnée initiale n'est que L^2 . En conséquence, on aimerait affaiblir l'espace $C^1(0, T; X)$ en un espace plus grand et plus pratique à utiliser.

Définition 13.3.2. Soient $X_1 \hookrightarrow X_2$ deux espaces de Banach. Soient $u \in L^1(0, T; X_1)$ et $v \in L^1(0, T; X_2)$. On dit que v est la dérivée faible de u , notée $u' = v$, si pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty[0, T[$ l'on a:

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(t)v(t) &\in X_1 \\ \text{et } \int_0^T \psi'(t)u(t) &= - \int_0^T \psi(t)v(t) \end{aligned}$$

Remarque 13.3.1. La condition $X_1 \hookrightarrow X_2$ peut sembler étrange. Mais prenons le cas du problème d'évolution étudié dans ce document. Une solution faible u a une régularité $H^1(\Omega)$ alors que la dérivée faible, donnée par $L(u)$ n'existe à priori pas en temps que fonction " $H^1(\Omega)$ " mais seulement en temps que distribution, et l'espace le plus "petit" dans lequel on peut la situer est $H^{1'}(\Omega)$ (en effet, Δv pour $v \in H^1(\Omega)$ a un sens dans $H^{1'}(\Omega)$ via intégration par partie). Cependant en intégrant des données non régulières, celles-ci peuvent gagner de la régularité (par exemple, si $f \in C(\mathbb{R})$ alors la fonction $g(x) = \int_{x-1}^x f(s)ds$ est C^1). C'est ce phénomène qui est à l'œuvre.

Dans le cas des espaces de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^n , l'existence de dérivées faibles pour une fonction lui apporte un gain de régularité (ce sont les inclusions généralisées de Sobolev). La proposition suivante établit l'équivalent pour des dérivées faibles en temps.

Proposition 13.3.1. *On suppose que $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ avec $u' \in L^2(0, T; H^{1'}(\Omega))$. Alors:*

1. $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ (après une possible redéfinition de u sur un ensemble de mesure nulle).
2. la fonction $t \mapsto \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ est absolument continue et vérifie:

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle u', u \rangle$$

3. Cela donne donc les estimations suivantes:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0, T; H^{1'}(\Omega))})$$

Preuve 13.3.1. 1. *On souhaite procéder par approximation. On étend en premier u sur l'intervalle $[-a, T + a]$ par la valeur 0 en dehors de $[0, T]$. Soit ρ_ϵ une approximation de l'unité sur \mathbb{R} . On pose $u_\epsilon = \rho_{\epsilonpsilon} * u$. Alors:*

$$u_\epsilon \rightarrow u, \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ u_\epsilon \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$$

On va montrer que la suite u_{\epsilonpsilon} est de Cauchy dans $[0, T]$. Soit t un instant pour lequel $u_\epsilon(t) \rightarrow u(t)$. Pour tout $s \in [0, T]$, ϵ_1 et ϵ_2 :

$$\frac{d}{dt} \|u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle u'_{\epsilon_1} - u'_{\epsilon_2}, u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2} \rangle$$

Donc en intégrant on déduit:

$$\|u_{\epsilon_1}(t) - u_{\epsilon_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_{\epsilon_1}(s) - u_{\epsilon_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t 2\langle u'_{\epsilon_1} - u'_{\epsilon_2}, u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2} \rangle$$

D'où:

$$\lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^T \|u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ + \|u'_{\epsilon_1} - u'_{\epsilon_2}\|_{H^{1'}(\Omega)}^2 \\ = 0$$

On en déduit ainsi que $u_\epsilon \rightarrow v \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Et ainsi $v = u$ presque partout.

2. *Pour la dérivabilité on prend la relation:*

$$\|u_{\epsilon_1}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_{\epsilon_1}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t 2\langle u'_{\epsilon_1}, u_{\epsilon_1} \rangle$$

En passant à la limite, il vient:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t 2\langle u', u \rangle$$

d'où le résultat.

3. L'estimation s'obtient en reprenant les deux relations précédemment montrées et en effectuant des calculs basiques.

Le même résultat est encore valable pour des espaces avec plus de régularité. Nous ne montrerons pas ce résultat (la preuve utilisant les mêmes idées).

Proposition 13.3.2. *On suppose que $u \in L^2(0, T; H^n(\Omega))$ avec $u' \in L^2(0, T; H^{n-2}(\Omega))$. Alors:*

1. $u \in C(0, T; H^{n-1}(\Omega))$ (après une possible redéfinition de u sur un ensemble de mesure nulle).
2. On a l'estimation suivante:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{H^{n-1}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0, T; H^{n+2}(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0, T; H^n(\Omega))})$$

13.4 quelques notions sur les semi-groupes

A réorganiser

Définition 13.4.1. *Une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur un espace de Banach X est appelé un semi-groupe fortement continu (a un paramètre) si elle satisfait l'équation fonctionnelle:*

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \text{ pour tout } t, s \geq 0, \\ T(0) = I \end{cases}$$

et si elle est fortement continue dans le sens suivant. Pour tout $x \in X$ l'orbite :

$$\xi_x : t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x$$

est continue de \mathbb{R}_+ dans X .

Définition 13.4.2. *Le générateur $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ d'un semi-groupe fortement continu est l'opérateur défini par :*

$$D(A) := \{x \in X, \xi_x \text{ est différentiable}\} \quad Ax := \dot{\xi}_x(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

Nous allons maintenant donner des propriétés pour $D(A)$ ainsi que des propriétés pour les orbites des points de $D(A)$.

Lemme 13.4.1. *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- (i) A est un opérateur linéaire.

(ii) Si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout t et l'on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

(iii) Pour tout $t \geq 0$ et $x \in X$ on a :

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

(iv) Pour tout $t \geq 0$ et $x \in X$ on a :

$$\begin{aligned} T(t) - x &= A \int_0^t T(s)x ds \text{ si } x \in X \\ &= \int_0^t T(s)A x ds \text{ si } x \in D(A) \end{aligned}$$

A l'aide de ce lemme, nous pouvons montrer que le générateur A possède de bonnes propriétés.

Théorème 13.4.1. *Le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach est un opérateur fermé et défini de manière dense qui détermine le semi-groupe de manière unique.*

13.4.1 théorie spectrale pour les opérateurs fermés

Dans toute cette partie, A désignera un opérateur fermé.

Proposition 13.4.1. (a) *Soit A un opérateur fermé. Si $\lambda - A$ est bijectif, alors sa réciproque est un opérateur borné (dû au théorème de graphe fermé).*

(b) *Équation de la résolvante: Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$ on a :*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

A partir de cette équation de la résolvante, et parce la résolvante est toujours un opérateur borné si l'opérateur de départ est fermé, on peut alors en déduire son analyticité.

Proposition 13.4.2. (a) *L'ensemble résolvant de A est ouvert dans \mathbb{C} et on a le développement local en série entière suivant: Pour $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$ l'on a :*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

(b) *La fonction résolvante: $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ admet donc comme dérivées :*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$$

(c) *Explosion au voisinage du spectre: Soit $\lambda_n \in \rho(A)$ avec $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Alors $\lambda_0 \in \sigma(A)$ si et seulement si :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$$

On cite également la formule d'Hadamard pour le rayon spectral, utile par son aspect asymptotique:

Proposition 13.4.3. *Pour un opérateur borné sur un espace de Banach, le spectre est non-vide et le rayon spectral satisfait:*

$$r(A) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Cependant, pour mieux comprendre ce que signifie le spectre, nous allons raffiner sa description.

Définition 13.4.3. *Le point spectrum de A est défini comme suit:*

$$P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ n'est pas injectif}\}$$

Il rend compte des valeurs complexes pour lesquelles il existe des vecteurs propres, appelée valeur propres.

Mais en dimension infinie, l'existence de vecteurs "approximant" un vecteur propre empêche la surjectivité ou l'injectivité également, cette sous partie plus grande du spectre est l'objet de la définition suivante:

Définition 13.4.4. *L'approximate point spectrum est l'ensemble:*

$$A\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ n'est pas injectif ou } \text{rg}(\lambda - A) \text{ n'est pas ferm dans } X\}$$

Proposition 13.4.4. *On a $\lambda \in A\sigma(A)$ si et seulement si il existe une suite de vecteurs propres approximatifs x_n de norme $\|x_n\| = 1$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$*

On vient donc de caractériser le défaut de surjectivité par le caractère non fermé de l'image. L'équivalence précédente permet alors de montrer que l'on sait positionner une partie de ce sous-ensemble du spectre, selon le sens suivant:

Proposition 13.4.5. *La frontière du spectre d'un opérateur fermé est contenue dans son approximate point spectrum.*

Le reste du spectre est contenu dans la définition suivante:

Définition 13.4.5. *On appelle spectre résiduel de A l'ensemble:*

$$R\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{rg}(\lambda - A) \text{ n'est pas dense dans } X\}$$

Le spectre résiduel peut recouper l'approximate point spectrum. Mais l'on vient effectivement de découper en trois parties le spectre de A car au vu des définitions:

$$\sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A)$$

On peut caractériser le spectre résiduel par dualité:

Proposition 13.4.6. *Pour un opérateur fermé défini de manière dense, le spectre résiduel coïncide avec le point spectrum de son adjoint.*

Pour faire un lien entre les résultats spectraux des opérateurs bornés et non bornés, nous allons expliciter le rapport entre le spectre de A et celui de sa résolvante $(\lambda - A)^{-1}$.

Proposition 13.4.7. *On suppose que $\rho(A)$ est non vide. Alors*

$$(a) \sigma(R(\lambda, A)) \setminus 0 = (\lambda - \sigma(A))^{-1}$$

(b) Les mêmes résultats sont vrais pour le point spectre, l'approximate point spectrum et le spectre résiduel.

On en déduit donc une estimation sur la distance au spectre:

Corolaire 13.4.1. Pour $\lambda_0 \in \rho(A)$ l'on a: $dist(\lambda_0, \sigma(A)) = \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \leq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$

Cette relation entre les spectres, conjuguée à l'étude sur les opérateurs compact (théorie de Riesz-Schauder et alternative de Fredholm), permette d'identifier le spectre d'un opérateur compact ou à résolvante compacte:

Corolaire 13.4.2. Si l'opérateur est compact ou a une résolvante compacte, alors:

$$\sigma(A) = P\sigma(A)$$

Nous allons maintenant nous attaquer aux décompositions spectrales. Soit T un opérateur borné. On suppose que le spectre de T admet une décomposition:

$$\sigma(T) = \sigma_c \cup \sigma_u$$

où σ_c et σ_u sont fermés et disjoints. Du calcul fonctionnel on obtient l'expression de la projection spectrale associée:

$$P := P_c := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, T) d\lambda$$

où γ est une courbe de Jordan dans le complément de σ_u entourant σ_c . Cette projection commute avec T et amène à la décomposition spectrale:

$$X = X_c \oplus X_u$$

avec $X_c := rgP$, et $X_u = kerP$. Cette propriété caractérise ces espaces de manière unique.

Il s'agit maintenant d'appliquer cette théorie pour nos générateurs. Cependant, ces derniers sont non bornés, et la décomposition précédente ne peut pas forcément s'appliquer. Dans le cas où l'un des deux ensembles est compact, à l'aide du lien entre le spectre d'un opérateur et celui de sa résolvante, on peut avoir cette décomposition. Nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires avant d'y arriver.

Lemme 13.4.2. Soit Y un espace de Banach qui s'injecte continûment dans X . Si pour une valeur $\lambda \in \rho(A)$ on a: $R(\lambda, A)Y \subset Y$, alors on a: $\lambda \in \rho(A|_Y)$ et $R(\lambda, A|_Y) = R(\lambda, A)|_Y$

Proposition 13.4.8. Soit A un opérateur fermé tel que son spectre puisse être décomposé en l'union de de sous-espaces fermés disjoints:

$$\sigma(A) = \sigma_c \cup \sigma_u$$

Si σ_c est compact, alors il existe une unique décomposition spectrale $X = X_c \oplus X_u$ pour A dans le sens suivant:

- (a) X_c et X_u sont A -invariants.
- (b) La restriction $A_c := A|_{X_c}$ est bornée sur l'espace de Banach X_c .
- (c) $X_1^A = X_c \oplus (X_u)_1^{A_u}$, où $A_u := A|_{X_u}$ (et X_1^A est le premier espace de Sobolev vis à vis de A).
- (d) $A = A_c \oplus A_u$
- (e) $\sigma(A_c) = \sigma_c$ et $\sigma(A_u) = \sigma_u$
- (f) Si $X = X_1 \oplus X_2$ pour deux espaces fermés A -invariants X_1 et X_2 de X tel que $A|_{X_1}$ est borné, $\sigma(A|_{X_1}) = \sigma_c$ et $\sigma(A|_{X_2}) = \sigma_u$ alors: $X_1 = X_c$ et $X_2 = X_u$.

13.4.2 théorie spectrale pour les générateurs

Nous avons vu que les générateurs de semi-groupes fortement continus sont une classe d'opérateurs fermés spéciale. Leur spectre est en effet contenu dans un demi-plan gauche, on a des estimations sur les résolvantes, ils sont définis de manière dense... Ces propriétés vont nous permettre de faire le lien entre le spectre du générateur d'un semi-groupe et les celui de chaque élément du semi-groupe. La notion de rayon spectral pour un opérateur borné se transpose pour un opérateur fermé:

Définition 13.4.6. Soit A un opérateur fermé. Alors:

$$s(A) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

est appelé la borne spectrale de A .

Remarque 13.4.1. $s(A)$ peut être n'importe quel nombre réel, et également $= \infty$ ou $-\infty$.

Nous avons vu les liens entre la borne de croissance d'un semi-groupe et la résolvante associée au générateur. Cela permet d'avoir les premières estimations suivantes:

Proposition 13.4.9. Pour le générateur d'un semi-groupe fortement continu, on a les estimations suivantes:

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0$$

et on peut également exprimer ω_0 de la manière suivante:

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \log r(T(t_0)) < \infty$$

Dans le cas d'un semi-groupe nilpotent, les propriétés suivantes découlent du résultat précédent:

Corolaire 13.4.3. Pour le générateur d'un semi-groupe nilpotent ($\omega_0 = -\infty$) on a les propriétés suivantes:

$$r(T(t)) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad \sigma(A) = \emptyset$$

13.4.3 Spectral mapping theorems pour les semi-groupes fortement continus

Nous avons vu qu'un semi-groupe uniformément continu, (resp. un semi-groupe fortement continu) est donné par l'exponentielle de son générateur (resp. une "approximation" de cette exponentielle). L'idée intuitive est donc la suivante:

$$\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$$

Cette relation n'est pas tout à fait vraie, mais nous allons voir que les spectral mapping theorems, reliant le spectre d'un générateur au semi-groupe, en sont très proches.

Nous allons donc d'abord donner quelques définitions pour voir d'où les problèmes pourraient provenir:

Définition 13.4.7. On dit que le "spectral mapping theorem" (SMT) est vérifié si la condition suivante l'est:

$$\sigma(T(t)) \setminus 0 = e^{t\sigma(A)}$$

On dit que le "weak spectral mapping theorem" (WSMT) est vérifiée si la condition suivante l'est:

$$\sigma(T(t)) \setminus 0 = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus 0$$

Ces deux cas sont assez sympathiques, les problèmes surviennent surtout lorsque l'on a rupture de la condition "spectral bound = growth bound":

$$s(A) = \omega_0$$

On a les implications:

$$(SMT) \implies (WSMT) \implies (SBeGB)$$

Une des inclusions de (SMT) est cependant vraie. En effet, en passant "à l'exponentielle", les problèmes de bijectivité de $\lambda - A$ restent vrais, ce sont de "nouveaux problèmes" qui se créent.

Proposition 13.4.10. *Pour le générateur d'un semi-groupe fortement continu on a toujours les inclusions suivantes:*

$$e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$$

Plus précisément:

$$\begin{aligned} e^{tP\sigma(A)} &\subset P\sigma(T(t)) \\ e^{tA\sigma(A)} &\subset A\sigma(T(t)) \\ e^{tR\sigma(A)} &\subset R\sigma(T(t)) \end{aligned}$$

De plus, la partie du spectre à poser problème est l'approximate point spectrum. En effet nous avons la propriété suivante:

Proposition 13.4.11. *Pour le générateur d'un semi-groupe fortement continu on a toujours les inclusions suivantes:*

$$\begin{aligned} e^{tP\sigma(A)} &= P\sigma(T(t)) \setminus \{0\} \\ e^{tR\sigma(A)} &= R\sigma(T(t)) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant voir les classes de semi-groupes pour lesquels les différents spectral mapping theorems sont vérifiés.

Proposition 13.4.12. *Si le semi-groupe est finalement continu en norme, alors (SMT) ainsi que (SBeGB) sont vérifiés.*

Comme l'on sait que certains semi-groupes sont finalement continus en norme, on peut préciser le résultat précédent:

Corolaire 13.4.4. *(SMT) et (SBeGB) sont vérifiés pour les classes de semi-groupes suivantes:*

- les semi-groupes finalement compacts
- les semi-groupes finalement différentiables
- les semi-groupes analytiques
- les semi-groupes uniformément continus

Le fait important est que, sur un espace de Hilbert, les semi-groupes d'opérateurs normaux sont toujours isomorphes à un semi-groupe de multiplication sur un espace L^2 , et comme (WSMT) est vérifié pour les semi-groupes de multiplication, alors (WSMT) est vérifié.

Corolaire 13.4.5. *Pour un semi-groupe fortement continu d'opérateurs normaux sur un espace de Hilbert, (WSMT) est vérifié (dans une version plus forte):*

$$\sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(A)}}$$

En particulier, (SBeGB) est vérifié.

13.4.4 stabilité et hyperbolicité des semi-groupes

Une question très importante est celle du comportement asymptotique des trajectoires pour un semi-groupe fortement continu. En effet, ces trajectoires représentent le comportement des "mild solutions" du problème de Cauchy associé à leur générateur. Évidemment, en dimension infinie, différents types de convergence sont possibles.

On commence par étudier la stabilité des semi-groupes, ie la convergence de leur trajectoire vers 0. Pour cela, nous énonçons différents types de convergence:

Définition 13.4.8. *Un semi-groupe fortement continu est appelé:*

(a) *uniformément exponentiellement stable s'il existe $\epsilon > 0$ tel que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\epsilon t} \|T(t)\| = 0$$

(b) *uniformément stable si:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$$

(c) *fortement stable si:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0$$

(d) *faiblement stable si:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T(t)x, x' \rangle = 0$$

Certaines de ces notions sont équivalentes. En effet:

Proposition 13.4.13. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *le semi-groupe est uniformément exponentiellement stable.*

(b) *le semi-groupe est uniformément stable.*

(c) *il existe $\epsilon > 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\epsilon t} \|T(t)x\| = 0 \forall x \in X$*

Nous allons maintenant tenter de caractériser la stabilité uniforme exponentielle.

Proposition 13.4.14. *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\omega_0 < 0$; *ie le semi-groupe est uniformément exponentiellement stable*

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$

(c) $\|T(t_0)\| < 1$ *pour un $t_0 > 0$*

(d) $r(T(t_1)) < 1$ *pour un $t_1 > 0$*

Cependant, ces critères impliquent, pour être vérifiés, une connaissance du semi-groupe. Bien souvent, on ne connaît que son générateur. En adaptant le critère de stabilité dans le cas fini-dimensionnel dû à Liapunov, on espère qu'un critère sera une variante de $s(A) < 0$.

Dans le cas où (SBeGB) est vérifié, ce critère est alors équivalent à une stabilité asymptotique exponentielle. Or l'on sait que cette condition est vérifiée si (SMT) ou (WSMT) sont vérifiés. On a donc le résultat suivant:

Théoreme 13.4.2. *Un semi-groupe finalement continu en norme est uniformément exponentiellement stable si et seulement si $s(A) < 0$.*

Là encore une connaissance du semi-groupe est nécessaire. On a cependant un critère pour les espaces de Hilbert qui ne demande aucun renseignement sur le semi-groupe:

Théoreme 13.4.3. *Ce théorème est dû à Gearhart, Prüss et Greiner dans les années 1970-1980. Un semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le demi-plan gauche $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ est contenu dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ et on a l'estimation suivante sur la résolvante:*

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty$$

Nous allons maintenant voir les décompositions hyperboliques, qui permettent d'étudier les comportements asymptotiques des trajectoires en étudiant le comportement du semi-groupe sur chacun des sous-ensemble de la décomposition.

Définition 13.4.9. *Un semi-groupe est appelé hyperbolique si X peut être écrit sous la forme d'une somme directe: $X = X_s \oplus X_u$ pour deux sous-espaces fermés invariants sous l'action du semi-groupe, et tels que les restrictions du semi-groupe satisfont les conditions suivantes:*

- (i) *Le semi-groupe $(T_s(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable sur X_s .*
- (ii) *Les opérateurs $T_u(t)$ sont inversibles sur X_u et $(T_u(t)^{-1})_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.*

On vérifie assez facilement que cela revient à dire qu'il existe une projection P , commutant avec $T(t)$ et tel que $T(t)\ker P = \ker P$ et deux constantes $M, \epsilon > 0$ avec:

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &\leq M e^{-\epsilon t} \|x\| \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \operatorname{rg} P \\ \|T(t)x\| &\geq \frac{1}{M} e^{\epsilon t} \|x\| \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \ker P \end{aligned}$$

On cherche alors une caractérisation de l'hyperbolicité en fonction du spectre des éléments du semi-groupe. On a le résultat suivant:

Proposition 13.4.15. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *le semi-groupe est hyperbolique.*
- (b) *$\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ pour un/tout $t > 0$.*

Évidemment, les conditions (SMT) ou (WSPT) permettraient de conclure sur l'hyperbolicité d'un semi-groupe. Mais on peut encore affaiblir cette condition:

Définition 13.4.10. *On dit que le semi-groupe vérifie la condition de circular spectral mapping theorem (CSMT) si la condition suivante est vérifiée:*

$$\Gamma \cdot \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \Gamma \cdot e^{t\sigma(A)}$$

pour un/tout $t > 0$.

On a alors la caractérisation de l'hyperbolicité suivante:

Théoreme 13.4.4. *Si (CSMP) est vérifié, alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *le semi-groupe est hyperbolique*
- (b) $\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ *pour un/tout $t > 0$*
- (c) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$

Pour finir, nous allons étudier la stabilité des équilibres pour la dynamique. On serait tenté d'étudier une convergence vers l'équilibre donnée par une convergence faible. Cependant, peu de résultats sont connus pour caractériser les semi-groupes faiblement stables. Nous allons donc nous focaliser sur le cas d'une convergence uniforme vers l'équilibre.

Définition 13.4.11. *On suppose que la limite:*

$$P := \|\cdot\| - \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) \neq 0$$

existe. Alors 0 est une valeur propre dominante: $Re\lambda \leq \epsilon < 0$ pour tout $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$. De plus, cette valeur propre est un pôle simple de la résolvante.

Proposition 13.4.16. *Soit $(T(t))_{t \leq 0}$ un semi-groupe fortement continu tel que (SMT) soit vérifié pour toutes les restrictions de ce semi-groupe à un sous-espace fermé et invariant. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $P := \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ *existe pour la norme d'opérateur et est non nulle.*
- (b) 0 *est une valeur propre dominante de A et un pôle de premier ordre pour $R(\cdot, A)$.*

Part IV

Mémoire de M1: L'évolution supprime-t-elle les comportements irrationnels?

13.5 Introduction et notations

Introduction:

On considère un jeu dans lequel une population joue contre elle-même. A chaque instant, tous les individus qui la composent choisissent une stratégie (l'ensemble des stratégies pouvant être jouées étant fini). On peut alors s'intéresser à la proportion de la population qui joue chaque stratégie. A une répartition des stratégies fixée, pour chaque stratégie i un gain (positif ou négatif) est donné aux joueurs ayant joué cette stratégie i . Les joueurs vont ensuite changer de stratégie, pour par exemple essayer d'optimiser leurs gains. Ces changements sont ainsi à l'origine d'une dynamique sur la répartition des stratégies au sein de la population.

Plusieurs types de dynamiques peuvent alors modéliser le comportement de la population. Si les joueurs avaient une connaissance parfaite du jeu, et donc des paiements, ainsi que de la répartition des stratégies dans la population, il semble normal d'exiger que ceux-ci jouent toujours les stratégies qui rapportent le plus. Pourtant, les joueurs peuvent également ne pas avoir assez d'information et choisir des stratégies qui, à un instant donné, rapportent plus que leurs stratégies actuelles, mais qui ne soient pas un choix optimal. Il existe de nombreuses dynamiques étudiées en économie et en biologie (les réplicateurs, la dynamique de Brown-von Neumann-Nash et la dynamique de Smith apparaîtront dans cette étude). Chacune possède ses atouts et ses faiblesses quant à la modélisation du comportement réel d'une population. Aussi, les résultats contenus dans cet exposé concerneront plutôt des classes de dynamiques, définies à l'aide de certaines propriétés générales, que des cas particuliers.

Que peut-on attendre du comportement global de la population? Un postulat de rationalité de base serait le suivant: si dans tous les cas, une stratégie i gagne moins qu'une stratégie j , alors il vaut mieux ne jamais jouer j . Ce sera l'objet de notre étude. Nous essaierons de voir quelles dynamiques raisonnables sont aptes à éliminer de telles stratégies (dites strictement dominées) et quelles ne le sont pas toujours. Nous constaterons que les deux cas se présentent pour des dynamiques utilisées en économie et en biologie.

Nous commencerons par introduire les notations nécessaires. Ensuite, nous nous intéresserons à une certaine classe de dynamiques faisant disparaître ces stratégies "irrationnelles". Après cela, nous étudierons d'autres dynamiques qui, au contraire, autorisent la survie de ces comportements. La dernière partie sera consacrée aux résultats dont nous aurons eu besoin dans les deux sections précédentes. Les notions mathématiques abordées seront issues de la théorie des jeux ainsi que des systèmes dynamiques.

Notations:

On notera S l'ensemble des stratégies (assimilé à $\{1, \dots, n\}$). Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, x_i représente la proportion de la population qui joue la stratégie i .

Lors d'un jeu à deux joueurs, on peut voir x_i comme la probabilité que le joueur 1 joue la stratégie i . Dans ce cas on parle de stratégie pure s'il n'y a qu'un i tel que $x_i = 1$, et donc que tous les autres sont nuls. Dans le cas général on parlera de stratégies mixtes.

La somme des proportions fait 1 i.e $\sum_{i \in S} x_i = 1$: on introduit donc $X = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i \in S} x_i = 1\}$.

La fonction de gain sera notée $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. $F_i(x)$ représente ce que gagne un joueur adoptant la stratégie i pour la répartition de toutes les stratégies x . La fonction F est lipschitzienne: la continuité de F est naturelle, car lors d'un jeu les gains suivent des règles; si peu de joueurs changent de stratégies, il est normal que les gains varient peu. On introduit alors $\bar{F}(x) = \sum_{i \in S} x_i F_i(x)$ le gain moyen de la population. On introduit aussi $B^{\bar{F}}(x) = \{y \in X \mid {}^t y F(x) \text{ soit maximal}\}$ l'ensemble des meilleures réponses à x . On dit qu'une stratégie i est strictement dominée si il existe une stratégie mixte $y \in X$ telle que pour toute répartition des stratégie dans la population $x \in X$ on ait $F_i(x) < \langle y, F(x) \rangle$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel. Cela signifie qu'il existe une stratégie y qui gagne toujours strictement plus que la stratégie i . Supposons que T soit l'ensemble des stratégies strictement dominées dans S . Alors, si personne parmi la population ne joue de stratégie appartenant à T , on peut considérer que la population joue à un nouveau jeu où l'ensemble des stratégies est $S - T$. De nouvelles stratégies strictement dominées peuvent alors apparaître ! On peut donc les supprimer du jeu et effectuer à nouveau le même raisonnement. En itérant, on obtient un ensemble de stratégie pures Z qui ne soient pas strictement dominées. On dit alors qu'une stratégie est strictement dominée de manière itérée si elle ne survit pas à ce processus d'élimination.

Exemple de gain:

Lors d'un jeu à 2 joueurs, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ en prenant comme fonction de gain $F(x) = Ax$, A_{ij} représente le gain du joueur 1 lorsqu'il joue i et que le joueur 2 joue j . On peut alors considérer qu'un joueur dans la population est amené à chaque instant à jouer contre un autre membre de la population choisi au hasard et considérer l'espérance de gain qu'il reçoit.

Evolution de la répartition des stratégies:

La répartition des stratégies suit la dynamique suivante: $\dot{x} = V^F(x)$ où $V^F : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dépendant des gains et de l'état actuel de la population. F sera prise lipschitzienne pour avoir existence et unicité de l'état de la population au cours du temps, pour toute répartition initiale des stratégies $x_0 \in X$. Ce résultat, ainsi que d'autres propriétés simples du flot généré par une dynamique, sont regroupés au début de la section "outils". On notera $\phi(t, x_0)$ l'état de la population à l'instant t en partant de l'état x_0 pour $t = 0$.

Exemples:

fonction d'accroissement:

Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$u_i(\pi, x)$ représente l'augmentation de la proportion de gens qui jouent i étant connus la répartition et le gain actuels (x et π).

On impose:

$-\sum_{i \in S} u_i(\pi, x) = 0$ (la population totale restant constante, l'ensemble des variations se compensent)

$-x_i = 0 \Rightarrow u_i(\pi, x) = 0$ (si personne ne joue i , on ne peut pas avoir de joueurs qui arrêtent de jouer i)

On prend alors $V^F(x) = g(F(x), x)$

protocole de révision:

$\rho : \mathbb{R}^n \times X \rightarrow M_n(\mathbb{R}^+)$

Etant connu le gain π et la répartition des stratégies x , on a une matrice $\rho(\pi, x)$ que nous noterons simplement ρ avec ρ_{ij} qui représente "l'envie" pour un joueur jouant i de passer à la stratégie j .

On considère donc que la proportion de joueurs quittant la stratégie i pour la j est $x_i \rho_{ij}$

Alors la proportion de joueurs qui arrêtent de jouer i est $\sum_{j \in S} x_i \rho_{ij}$ et celle des joueurs commençant à jouer i est $\sum_{j \in S} x_j \rho_{ji}$ d'où $\dot{x}_i = \sum_{j \in S} x_j \rho_{ji} - \sum_{j \in S} x_i \rho_{ij}$

Exemples de protocoles:

—

Réplicateur: $\rho_{ij} = x_j [F_j - F_i]_+$. Pour passer de la stratégie i à la j on s'intéresse à deux facteurs; est ce que beaucoup de gens jouent j ? (premier terme du produit) et est ce que j rapporte plus que ce que je joue (deuxième terme du produit)

$\dot{x}_i = \sum_{j \in S} x_j x_i [F_i - F_j]_+ - x_i \sum_{j \in S} x_j [F_j - F_i]_+$

$$\begin{aligned}
&= x_i \sum_{j \in S} ([F_i - F_j]_+ - [F_j - F_i]_+) \\
&= x_i \sum_{j \in S} x_j (F_i - F_j) = x_i (F_i - \bar{F})
\end{aligned}$$

—

BNN (Brown, Von Neumann et Nash): $\rho_{ij} = [F_j - \bar{F}]_+$. Pour passer de la stratégie i à la stratégie j on regarde si la stratégie j rapporte plus que la moyenne.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \sum_{j \in S} x_j [F_i - \bar{F}]_+ - x_i \sum_{j \in S} [F_j - \bar{F}]_+ \\
&= [F_i - \bar{F}]_+ - x_i \sum_{j \in S} [F_j - \bar{F}]_+
\end{aligned}$$

13.6 Elimination de stratégies strictement dominées

Quelles sont les sortes de dynamiques d'évolution qui permettent une élimination des stratégies strictement dominées, et, plus fort encore, des stratégies strictement dominées par itérations ? Nous ne présenterons pas ici une caractérisation de telles dynamiques, mais montrerons que cette propriété est vraie pour une large classe de dynamiques évolutives, contenant notamment la dynamique des répliqueurs. Nous prévenons le lecteur que les preuves de cette partie seront pour l'essentiel calculatoires.

Définition:

On dit que la dynamique est convexe monotone si:

Le taux d'accroissement d'une stratégie i est proportionnel à la proportion de la population qui la joue : $V_i^F(x) = x_i g_i^F(x)$ où g^F est telle que V^F soit lipschitzienne et $\sum_1^n V_i^F(x) = 0$.
pour toute stratégie mixte z et pour toute stratégie pure e_i l'on a :
 $\langle z, F(x) \rangle > F_i(x) \Rightarrow \langle z, g^F(x) \rangle > g_i^F(x)$.

Remarque:

Pourquoi prendre des dynamiques de la forme $V_i^F = x_i g_i^F(x)$? En fait, étant donné une dynamique standard V^F , la condition pour qu'elle s'écrive sous la forme précédente est simplement le fait que la fonction $\frac{V_i^F(x)}{x_i}$ puisse être prolongée par continuité jusqu'au bord. En d'autres termes, que la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{V_i^F(x)}{x_i}$ existe pour tout point x_0 tel que $x_{0,i} = 0$ et soit continue sur la face $\{x_i = 0\}$. Cela impose donc notamment que $V_i^F(x) = 0$ dès que $x_i = 0$. Cela est important car signifie que les joueurs ne peuvent pas innover avec ce type de dynamiques, de nouvelles stratégies n'apparaissent jamais.

Que représente g^F ? Considérons l'exemple donné par la dynamique des répliqueurs. $g_i^F(x) = F_i(x) - \bar{F}(x)$ représente la forme (le "fitness") des joueurs jouant la stratégie i , vis à vis de la moyenne. Dans la suite de cette partie, nous noterons g pour plus de simplicité, mais il ne faut pas oublier que $g(x) = g(F(x), (x))$ dépend du paiement, c'est-à-dire du jeu auquel on joue.

La seconde condition signifie que si une stratégie mixte gagne plus qu'une stratégie pure, son "fitness" est plus important. En prenant $z = e_j$, cela veut dire que la stratégie j "se répand" plus vite que la stratégie i . Par exemple la stratégie j représente des cellules de type j qui se reproduisent plus vite que celles de type i .

Il y a plusieurs motivations à étudier de telles dynamiques. Tout d'abord, elles ne sont pas absurdes, car utilisées en modélisation en économie et en biologie (la dynamique des répliqueurs notamment). En effet, les deux conditions qu'elles remplissent peuvent paraître naturelles pour modéliser certaines évolutions de population. De plus, elles vont permettre d'éliminer les stratégies strictement dominées de manière itérée, comme le montre le théorème suivant :

Théorème:

Soit j une stratégie strictement dominée de manière itérée. Alors, sous toute dynamique convexe monotone, pour tout état initial x^0 du système qui soit dans l'intérieur de X (c'est-à-dire $x_i^0 > 0 \forall i$), on a :
 $\phi(t, x^0)_j \rightarrow 0$ (la j -ième stratégie s'éteint).

Preuve:

Nous allons en premier prouver que toute stratégie strictement dominée (dans l'ensemble des stratégies initiales S) va s'éteindre de manière exponentielle. L'uniformité de la vitesse d'extinction permettra en second lieu de montrer que toute stratégie strictement dominée de manière itérée est amenée à disparaître.

On suppose que la stratégie j est strictement dominée par une stratégie mixte h . Le but est de majorer $\phi(t, x^0)_j$ par une fonction tendant vers 0. On considère donc la fonction suivante :

$$f(x) = x_j \prod_1^n x_i^{h_i}$$

On simplifie les notations pour faciliter la compréhension du calcul. On ne marquera plus la dépendance en les variables des fonctions, et on prendra $x = \phi(t, x^0)$.

La dérivée de f le long d'une trajectoire est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f(\phi(t, x_0)))}{\partial t} &= \langle \nabla f(\phi(t, x_0)), \dot{\phi}(t, x_0) \rangle \\ &= - \sum_{i, i \neq h} \dot{x}_i x_j h_i x_i^{-h_i-1} \prod_{k \neq i} x_k^{-y_k} + (1 - h_j) \dot{x}_j x_j^{-h_j} \prod_{k \neq j} x_k^{-y_k} \\ &= x_j \prod_1^n x_i^{-h_i(\sum_{i=1, i \neq j} h_i g_i + (1-h_j)g_j)} \\ &= f(x) \langle (e_j - h), g(x) \rangle \end{aligned}$$

(il se peut très bien que pour un i , $h_i = 0$ auquel cas le calcul effectué plus haut n'est plus valide, mais le résultat final reste vrai.

Or $\langle (e_j - h), g(x) \rangle < 0$ et par continuité, il existe $\delta_j > 0$ tel que, $\forall x \in X$, $\langle (e_j - h), g(x) \rangle < -\delta_j$. D'où $f(x) \leq f(x_0)e^{-\delta_j t}$. De plus, f est continue, donc atteint son maximum sur le compact X . Il existe donc $C_j > 0$ tel que : $\forall x_0 \in X$, $f(x) \leq C_j e^{-\delta_j t}$.

De plus, $x_j = f(x) \prod x_k^{h_k}$, avec le terme de droite plus petit que 1. D'où $x_j(t) \leq f(x) \leq C_j e^{-\delta_j t}$ On a donc $x_j \rightarrow 0$ de manière exponentielle.

Généralisons maintenant ce résultat. Soit T l'ensemble des stratégies strictement dominées dans S . T est fini, donc en prenant pour δ la plus petite valeur des δ_j où j est strictement dominée, et pour C la plus grande des C_j on obtient:
 $\forall j \in T, x_j \leq Ce^{-\delta t}$.

Soit maintenant $S' = S \setminus T$ l'ensemble des stratégies survivantes. Soit T' l'ensemble des stratégies strictement dominées dans ce nouveau jeu. On va essayer de montrer le même résultat pour les stratégies $j' \in T'$. Soit $j' \in T'$ dominée strictement par une stratégie h' dans ce nouveau jeu. On sait que $\langle e_{j'-h'}, g(x) \rangle < 0$ sur X' l'enveloppe convexe de S' (X' étant le nouvel ensemble des états possibles dans le jeu où seules les stratégies de S' sont autorisées). Par continuité de g , il existe donc un voisinage $V_{j'}$ de X' tel que, $\forall x \in V_{j'} \langle e_{j'-h'}, g(x) \rangle < \delta_{j'}$. On a donc par les mêmes arguments que précédemment, $x_{j'}(t) \leq C_{j'} e^{-\delta_{j'} t}$ pour toutes les trajectoires partant de $x'_0 \in V_{j'} \setminus \partial X$.
De même, en choisissant δ' comme la plus petite des constantes $\delta_{j'}$ et C' comme la plus grande des constantes $C_{j'}$, et en posant $V' = \bigcap V_{j'}$, on a :

$$\forall j' \in T', x_{j'} \leq C' e^{-\delta' t} \text{ pour l'ensemble des trajectoires partant de } V' \setminus \partial X.$$

La démonstration est presque terminée, il suffit de montrer qu'en partant de l'intérieur de X , on ne peut arriver en temps fini sur le bord. Soit $i \in S$. V^F est lipschitzienne et $V_i^F(x) = 0$ si $x_i = 0$ (on rappelle que pour les dynamiques considérées, V_i^F est proportionnelle à x_i). Il s'en suit donc qu'il existe une constante K strictement positive telle que : $\dot{x}_i = V_i^F(x) \geq -Kx_i$ d'où $x_i \geq x_{0,i} e^{-Kt}$. On ne peut atteindre le bord car l'extinction d'une stratégie est au plus exponentielle. Cet argument reviendra dans la deuxième section.

Comme l'extinction des stratégies strictement dominées dans S était exponentielle, il existe donc un temps T tel que, pour toute trajectoire partant d'un point x_0 à l'intérieur de X , l'on ait : $\phi(T, x_0) \in V' \setminus \partial X$.

On raisonne par itérations pour prouver que ce résultat est vrai pour n'importe quelle stratégie strictement dominée de manière itérée (qui sont en nombre fini).

Peut-on exhiber des dynamiques convexes monotones selon des critères simples? Nous allons donner un exemple de la forme que peuvent prendre de telles dynamiques. Cet exemple est motivé par le fait que ce type de dynamiques est une variation de l'équation des réplicateurs.

La tangente en x à la trajectoire issue même point est donnée par le vecteur vitesse $V^F(x)$. Le taux d'accroissement d'une stratégie i est alors donné par : $\dot{x}_i = V_i^F(x)$. V_i^F peut prendre des formes diverses, mais l'on peut décider de simplifier l'étude en séparant les deux dépendances, et en le gain $F_i(x)$ d'un joueur jouant la stratégie i , et en l'état actuel x . On conservera le fait que \dot{x}_i soit proportionnel à x_i , c'est-à-dire de la forme $\dot{x}_i = x_i g_i(x)$. On peut donc étudier des dynamiques données sous la forme explicite dans la définition suivante :

Définition:

On dit que la dynamique est sous forme séparée si pour tout jeu, on a pour tout $x \in X$:
 $V_i^F(x) = x_i g_i(x)$
 $g_i(x) = \lambda^F(x) f(F_i(x)) + \mu^F(x)$ pour tout $i \in [1, n]$

où les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda^F : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\mu^F : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont telles que V^F soit lipschitzienne.

Remarque:

Ce type de dynamiques peut paraître dur à se représenter au départ. Mais il contient de nombreuses dynamiques d'imitation, comme celle par exemple des répliqueurs ($V_i^F(x) = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ où \bar{F} représente le gain moyen). Nous verrons plus tard que si la dynamique satisfait certaines propriétés assez simples, elle peut alors être mise sous cette forme.

On notera λ pour λ^F et μ pour μ^F dans la suite, pour simplifier les notations.

En fait, la fonction μ est entièrement déterminée par le fait que $\sum_1^n \dot{x}_i = 0$.

Le terme "forme séparée" n'est pas un terme utilisé dans la littérature, il est simplement utilisé ici pour nommer ce genre de dynamique et les distinguer d'autres types de dynamiques.

La proposition suivante caractérise les dynamiques de cette forme qui sont convexes monotones.

Proposition:

Une dynamique sous forme séparée est convexe monotone si et seulement si f est convexe et strictement croissante.

Preuve:

⇐

On suppose que f est strictement croissante et convexe. On considère une stratégie pure i , une stratégie h et un état x tel que : $\langle h, F(x) \rangle > F_i(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle h, g(x) \rangle - g_i(x) &= \lambda(x) (\sum h_j f(F_j(x)) - f(F_i(x))) \\ &\geq \lambda(x) (f(\sum h_j F_j(x)) - f(F_i(x))) \\ &= \lambda(x) (f(\langle h, F(x) \rangle) - f(F_i(x))) > 0 \end{aligned}$$

La première inégalité est une inégalité de convexité. L'inégalité stricte de la fin provient de la stricte croissance de f . La dynamique est donc convexe monotone.

⇒

Soit maintenant une dynamique sous forme séparée convexe monotone. Nous montrerons d'abord que f est strictement croissante, puis que f est convexe.

Soit $a < b$. On peut construire un jeu où $F_1(x) = a$, $F_2(x) = b$ on a alors : $g_1(x) < g_2(x)$ soit $\lambda(x)f(a) + \mu(x) < \lambda(x)f(b) + \mu(x)$ soit $f(a) < f(b)$. f est donc strictement croissante.

On suppose maintenant par l'absurde que f n'est pas convexe. Il existe alors $b \neq c$ tels que $f(\frac{b+c}{2}) > \frac{f(b)+f(c)}{2}$. Par continuité de f , il existe alors $a < \frac{b+c}{2}$ tel que $f(a) > \frac{f(b)+f(c)}{2}$. On construit alors un jeu où les 3 stratégies 1, 2 et 3 gagnent respectivement a , b et c contre un état quelconque x . En comparant la stratégie mixte h pour laquelle la moitié du temps l'on joue la stratégie 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et la stratégie 3 avec probabilité $\frac{1}{2}$, et la stratégie pure e_1 on obtient : $F_1(x) = a < \langle h, F(x) \rangle = \frac{b+c}{2}$ et pourtant

$\langle h, g(x) \rangle = \lambda(x)f(\frac{b+c}{2}) + \mu(x) < \lambda(x)f(a) + \mu(x) = g_1(x)$ La dynamique n'est donc pas convexe monotone, d'où la contradiction.

Remarque:

On a été obligé d'envisager des jeux de dimension supérieure ou égale à 3 dans la preuve. Pourtant, la dimension de l'espace est fixée par les fonctions λ et μ , ce qui peut paraître étrange. En fait, un jeu en dimension 1 est sans intérêt (une seule stratégie possible). Pour un jeu en dimension 2, mettre une dynamique évolutive revient à résoudre une équation $\dot{x} = V^F(x)$ sur le segment $[0, 1]$, ce qui n'a pas non plus grand intérêt pour les résultats que nous voulons montrer. Si la dimension est supérieure à 2 ou à 3, il suffit d'ajouter d'autres stratégies pour que les étapes de la preuve soient vraies.

Nous avons donc trouvé jusqu'ici un exemple de type de dynamiques concret pour lesquelles on sait identifier rapidement si oui ou non elles éliminent les stratégies strictement dominées de manière itérée. Nous allons maintenant voir que, si une dynamique répond à un certain critère, la monotonie généralisée, alors elle peut être mise sous la forme précédente (du moins un cas particulier qui est une variante de l'équation des répliqueurs).

Définition:

On rappelle que la dynamique des réplicateurs, pour n'importe quel jeu, est la dynamique de la forme : $V_i^F(x) = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ où $\bar{F}(x)$ représente le gain moyen : $\bar{F}(x) = \sum_1^n x_k F_k(x)$. Une dynamique est dite suivre la monotonie généralisée si pour deux stratégies mixtes h et $h' : \langle h, F(x) \rangle > \langle h', F(x) \rangle \Leftrightarrow \langle h, g(x) \rangle > \langle h', g(x) \rangle$.

Remarque:

Là encore on considère des dynamiques pour lesquelles \dot{x}_i est proportionnel à x_i . La condition de monotonie généralisée ressemble à la condition de "dynamique convexe monotone" vue précédemment. En fait, elle est bien plus forte, car les exigences portent sur toute paire de stratégies mixtes, alors qu'elles ne concernent seulement qu'une stratégie mixte et une stratégie pure pour la "convexité monotone". De plus, ce n'est plus une implication mais une équivalence. On remarque également que la dynamique des réplicateurs respecte la monotonie généralisée.

Proposition:

Si une dynamique est respecte la monotonie généralisée, alors pour tout jeu, il existe une fonction $\lambda^F : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :
 $g_i(x) = \lambda^F(x) \times x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$
(on notera simplement λ pour λ^F)

Remarque:

Les dynamiques suivant la monotonie généralisée sont donc des cas très particuliers de dynamiques séparées convexes monotones, avec $f = Id$. De plus, comme $\lambda > 0$, cela signifie que les dynamiques à monotonie généralisée sont égales à la dynamique des réplicateurs "à changement de temps près". Cette dernière notion exige quelques conditions supplémentaires sur λ . Si λ est continue, on peut alors résoudre l'équation différentielle $\dot{\psi}(t) = \lambda(\phi(t, x))$ pour x une condition initiale quelconque, en imposant $\psi(0) = 0$. ψ est donc un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R}_+ sur son image $[0, +\infty]$ (elle ne peut être égale à un segment car par continuité de λ , il existe $\delta > 0$, $\dot{\psi}(t) > \delta$). On peut alors étudier la trajectoire donnée par : $\chi(t) = \phi(\psi^{-1}(t), x)$ et l'on constate que $\dot{\chi}(t)_i = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ est l'équation des réplicateurs, avec égalité des conditions initiales. Les trajectoires issues de x en suivant la dynamique des réplicateurs où celle suivant la monotonie généralisée sont donc les mêmes.

Preuve:

On considère une dynamique respectant la monotonie généralisée. Soit $x \in X$. On distinguera deux cas, selon que $F(x)$ soit colinéaire au vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ ou non.

Premier cas. On suppose que $F(x)$ n'est pas colinéaire au vecteur $(1, 1, \dots, 1)$. Soit h et h' deux straté-

gies mixtes ayant le même gain. Alors, par monotonie généralisée :

$$\langle h, g(x) \rangle = \langle h', g(x) \rangle$$

$$\text{d'où } \langle h - h', g(x) \rangle = 0.$$

On s'intéresse alors à l'espace vectoriel

$E = \text{Vect}\{h - h', h, h' \in X, \langle h, F(x) \rangle = \langle h', F(x) \rangle\}$ (E est l'espace vectoriel engendré par les différences entre deux stratégies ayant le même gain pour l'état x). On a alors : $\forall v \in E, \langle v, (1, 1, \dots, 1) \rangle = 0$ et $\langle v, F(x) \rangle = 0$. En fait, on a même $E^\perp = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1), F(x))$ (car $\text{Vect}\{h - h', h, h' \in X\} = (1, 1, \dots, 1)^\perp$). Comme pour tout v dans E on a : $\langle v, g(x) \rangle = 0$ On en déduit donc que $g(x) \in E^\perp$, il existe $\lambda(x)$ et $a(x)$ tels que : $g(x) = \lambda(x)F(x) + a(x)(1, 1, \dots, 1)$.

Montrons que $\lambda(x)$ est strictement positif. Comme $F(x)$ n'est pas colinéaire au vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ on peut trouver deux stratégies mixtes h et h' telles que: $\langle h, F(x) \rangle > \langle h', F(x) \rangle$ soit $\langle h - h', F(x) \rangle > 0$. Alors avec la monotonie généralisée: $\lambda(x)\langle h - h', F(x) \rangle = \langle h - h', g(x) \rangle > 0$ Donc $\lambda(x) > 0$.

Il reste à expliciter $a(x)$. Pour cela, on constate que :

$$0 = \sum_1^n x_i g_i(x)$$

$$= \sum_1^n x_i (\lambda(x)F_i(x) + a(x))$$

$$= \lambda(x)\langle x, F(x) \rangle + a(x)$$

$$\text{d'où } a(x) = -\lambda(x)\bar{F}(x) \text{ et l'on a alors : } g_i(x) = \lambda(x)(F_i(x) - \bar{F}(x)).$$

Si $F(x)$ est colinéaire à $(1, 1, \dots, 1)$, alors par stricte monotonie on obtient : $g_i(x) = g_j(x)$ pour toute stratégie i et j . Ainsi, le fait que $\sum x_i g_i(x) = 0$ implique que $g(x) = 0$. Comme en outre $F_i(x) - \bar{F}(x) = 0$ on peut en fait choisir $\lambda(x)$ comme on veut (et donc le prendre strictement positif)

13.7 Survie de stratégies strictement dominées

Théorème:

- Soit un protocole ρ de la forme $\rho_{ij} = f(F_j - \bar{F})$ ou de la forme $\rho_{ij} = f(F_j - F_i)$ avec f qui vérifie:
- f lipschitzienne (1)
 - $f \geq 0$, $f(u) = 0$ si $u \leq 0$ (2)
 - $f'(0^+) > 0$ (3)

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un jeu pour lequel, en partant de conditions initiales en dehors d'un sous-ensemble de mesure ϵ , une stratégie strictement dominée par une autre stratégie pure survie. C'est-à-dire dont la proportion de la population la jouant ne tend pas vers 0, et même soit jouée à une proportion supérieure à $\frac{1}{6}$: $\forall t \geq 0, \exists t' \geq t \mid x_i(t') \geq \frac{1}{6}$

Remarque:

(1) est l'hypothèse habituelle de continuité des fonctions mis en jeu, (2) explique que si la stratégie j gagne moins que la i (ou moins que la moyenne) on a moins envie de passer de i vers j . Enfin (3) implique que f croit localement à droite de 0: il y a des migrations de i vers j dès que l'écart de gain est strictement positif (on n'attend pas de dépasser un certain seuil)

preuve:

La démonstration est très similaire à celle du théorème beaucoup plus général que nous allons énoncer dans peu de temps. La seule différence est qu'ici l'on puisse quantifier à quel point la stratégie strictement dominée survie.

Définition:

On dit que x_0 est un équilibre de Nash de F si $\forall x \in X, \langle x, F(x_0) \rangle \leq \langle x_0, F(x_0) \rangle$. Cela signifie qu'un joueur de la population n'est pas tenté par le fait de changer de stratégie car il y gagnerait moins, d'où le terme "équilibre". On note $NE(F)$ l'ensemble des équilibres de Nash de F .

Théorème:

Soit u une fonction d'accroissement pour un jeu à 4 stratégies. On suppose que pour toute fonction de gain F on a:

- u lipschitzienne (C)
- $u(F(x), x) \neq 0 \Rightarrow \langle u(F(x), x), F(x) \rangle > 0$ ie $\sum_{i \in S} \dot{x}_i F(x_i) > 0$ (PC)
- $u(F(x), x) = 0 \Rightarrow x \in NE(F)$ (NS)
- $x \notin NE(F), x_i = 0$ et $e_i \in B^F(x) \Rightarrow u_i(F(x), x) > 0$ ie $\dot{x}_i > 0$ (IN)

Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction de gain F , définissant ainsi un jeu à 4 stratégies tel que, sous u , une stratégie strictement dominée i survie en partant de toute condition initiale en dehors d'un

sous-ensemble V de mesure δ . C'est-à-dire $\phi(t_n, x_0)_i > \epsilon$ pour $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de temps tendant vers $+\infty$ (dépendant de x_0), $\epsilon > 0$ et $x_0 \in X - V$.

Remarque:

—

- (C) est l'hypothèse habituelle de continuité
- (PC) est la corrélation positive: il serait trop simpliste de dire qu'on augmente les x_i | $F(x_i) > 0$ et qu'on diminue les x_i | $F(x_i) \leq 0$, cependant en moyenne on veut que les variations apportent un meilleur gain
- (NS) est la stationnarité de Nash: si on ne bouge pas c'est qu'on est sur un équilibre de Nash (la réciproque étant toujours vraie)
- (IN) est l'innovation: lorsque la stratégie i n'est pas jouée, et qu'elle représente une meilleure réponse à l'état x de la population, alors quelques joueurs se mettent à jouer i

Là encore, des dynamiques utilisées en économie et en biologie répondent aux critères de ce théorème. C'est le cas de la dynamique BNN donnée en exemple au début, mais également de la dynamique de Smith.

Pourquoi la dimension 4? La preuve de ce théorème utilise le théorème de Poincaré-Bendixson. Cependant, augmenter la dimension empêcherait l'utilisation de ce théorème. De plus, la visualisation en dimension 3 est plus facile. Néanmoins, les systèmes dynamiques ayant des comportements de plus en plus complexes avec l'augmentation de la dimension, la survie de stratégies strictement dominées doit être valable pour des dimensions plus grandes.

Idée de la preuve:

Pour $n=3$, on va construire une fonction de gain telle que $x(t)$ tende vers un cycle qui passe dans les zones de prédominances de chaque stratégie, ie que les stratégies sont à tours de rôle les meilleures réponses à l'état actuel de la population.

On duplique ensuite la stratégie 3, c.a.d qu'on crée une stratégie 4 telle que le gain en jouant 3 ou en jouant 4 est identique et ne dépende que de $x_3 + x_4$. On montre alors (grâce à l'innovation) que des gens vont jouer cette stratégie une infinité de fois avec une proportion $\geq \epsilon$. On modifie alors légèrement le gain pour que la stratégie 4 devienne strictement dominée. Par continuité on aura des gens qui joueront la stratégie 4 une infinité de fois avec une proportion $\geq \frac{\epsilon}{2}$

Outils préliminaires:

Représentation graphique:

Tout point à l'intérieur d'un triangle ABC s'écrit de manière unique $x_1A + x_2B + x_3C$ avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Pour $n=3$ on identifie donc X à un triangle pour avoir une représentation graphique du problème.

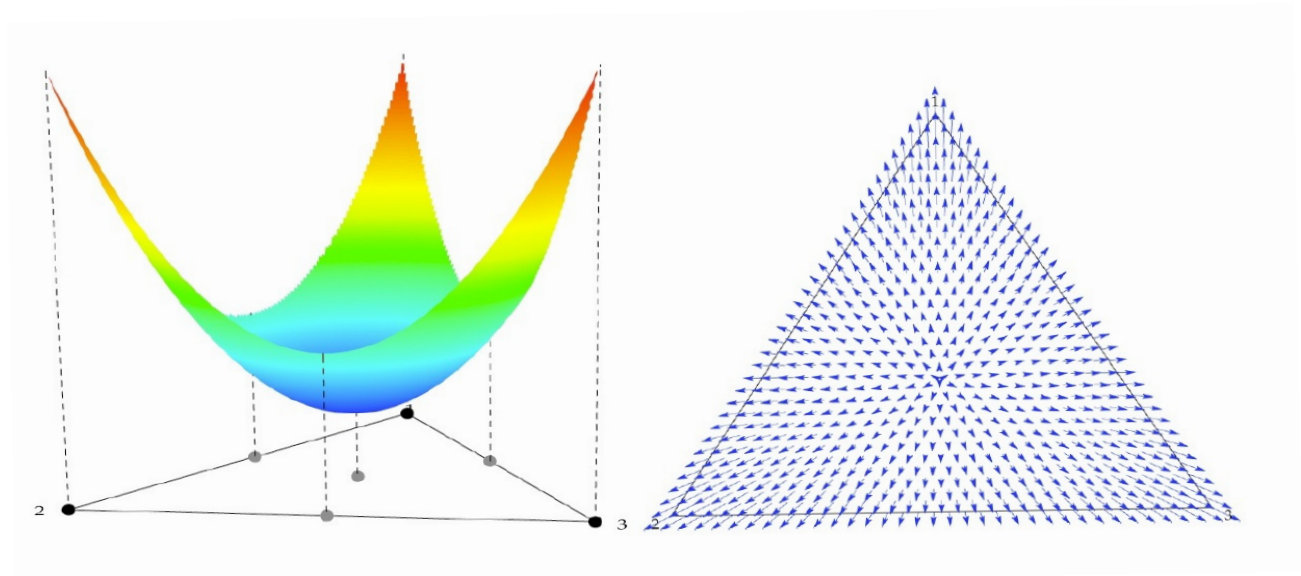
Pour $n=4$ on identifie X à une pyramide à base triangulaire.

Jeu à potentiel:

On considère une fonction de gain de la forme $F(x) = \nabla f(x) \circ f \in C^1(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$.
 Alors $\frac{df(x_t)}{dt} = \sum_{i \in S} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \times \dot{x}_i(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$
 $= \langle F(x(t)), g(F(x(t)), x(t)) \rangle \geq 0$ d'après (PC) avec égalité ssi $x(t) \in NE(F)$ d'après (NS)
 Graphiquement en regardant $\{f(x), x \in X\}$, $f(x(t))$ va aller vers le haut de cette surface. On peut simplement considérer la projection du gradient de f sur le triangle représentant le jeu; pour avoir une idée de la trajectoire il suffit de suivre les flèches.
 Si on considère une fonction de gain F qui n'est pas issue d'un jeu à potentiel et qu'on projette les vecteurs $F(x)$ sur le triangle l'idée précédente reste intuitivement valable.

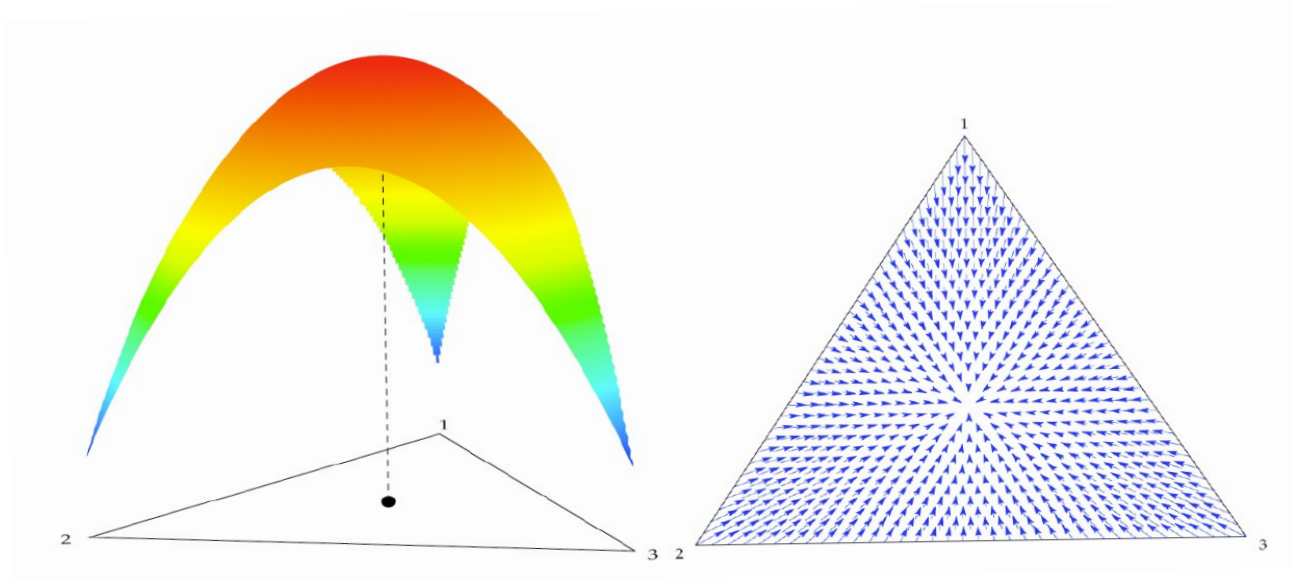
Exemples:

On considère la fonction $f_0(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}$ alors on obtient les graphes suivants:



fonction à potentiel f_0 et projection des vecteurs
 (figure extraite de l'article)

La trajectoire va vers un coin. Si on considère $-f_0$ la trajectoire va vers le centre:



fonction à potentiel $-f_0$ et projection des vecteurs
(figure extraite de l'article)

Revenons à la démonstration
 On cherche un jeu pour avoir une projection des vecteurs de la forme suivante:

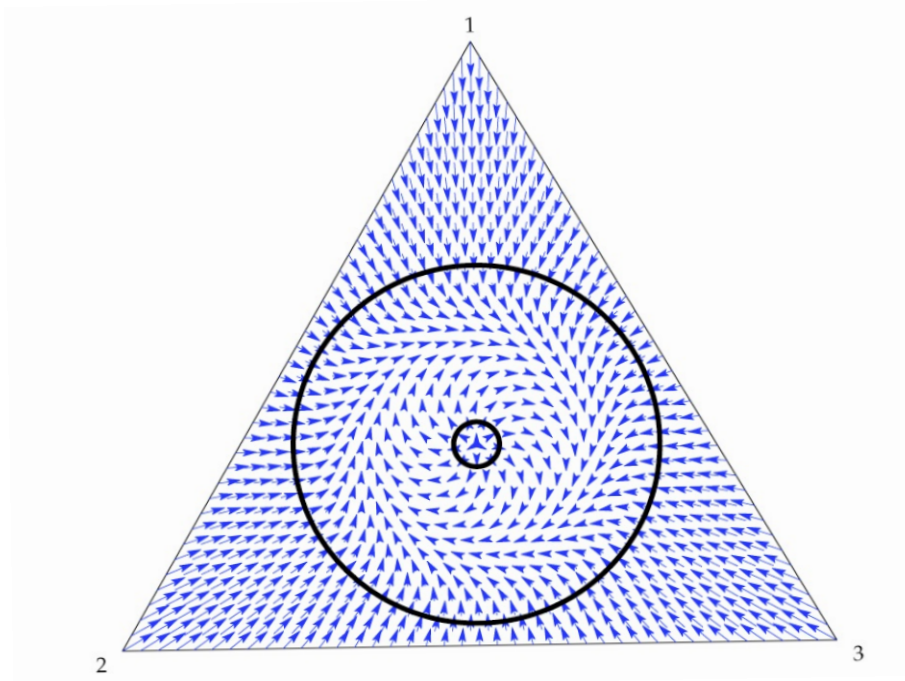


figure extraite de l'article

On considère la fonction de gain

$$H(x) = \cos(\theta(x)) \times \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3} \\ x_3 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta(x)) \times \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta(x)$ vaut 0 à l'intérieur du petit cercle, π à l'extérieur du grand cercle et linéaire entre

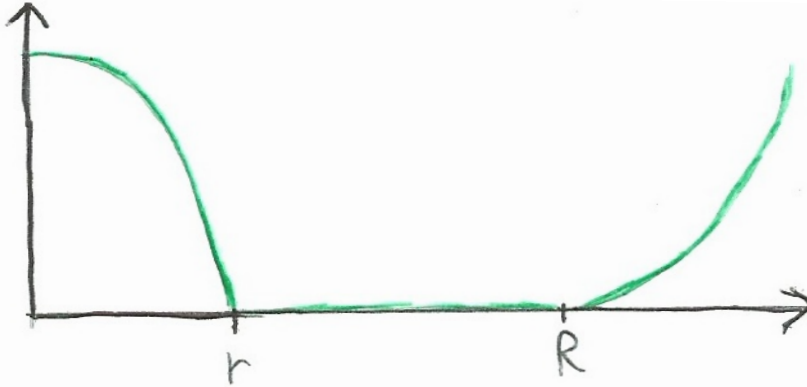
Alors H est un jeu qui convient. Son unique équilibre de Nash est $x^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour tout point x à l'extérieur de la couronne, au bout d'un certain temps t_0 on aura $\phi(t, x)$ à l'intérieur de la couronne pour tout $t \geq t_0$.

La justification exacte de ce phénomène se fait avec la caractérisation de la stabilité asymptotique par une fonction de Liapunov (la couronne étant ce que nous appelons un attracteur faible). Les détails sont

donnés dans la section outil. En effet, la fonction $\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f_0(x) + \frac{R^2}{2} & \text{si } \|x - x^*\| \geq R \\ f_0(x) - \frac{r^2}{2} & \text{si } \|x - x^*\| \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est le gradient d'une fonction décroissant strictement le long des trajectoires (par la condition (PC)). Elle définit effectivement un jeu à potentiel dont la projection des gradients a la forme voulue en dehors de la couronne et que le graphe de $-\tilde{f}(\| \cdot \|)$ est:



De plus à l'intérieur de la couronne il n'y a pas de points stationnaires, notamment parce qu'on évite l'équilibre de Nash.

On fabrique alors le double de la stratégie 3 en considérant la fonction de gain F vérifiant:

$$-F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = H_i(x_1, x_2, x_3 + x_4) \text{ pour } i \leq 3$$

$$-F_4(x) = F_3(x)$$

Alors $NE(F)$ est la droite $\{x \mid x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 + x_4 = \frac{1}{3}\}$.

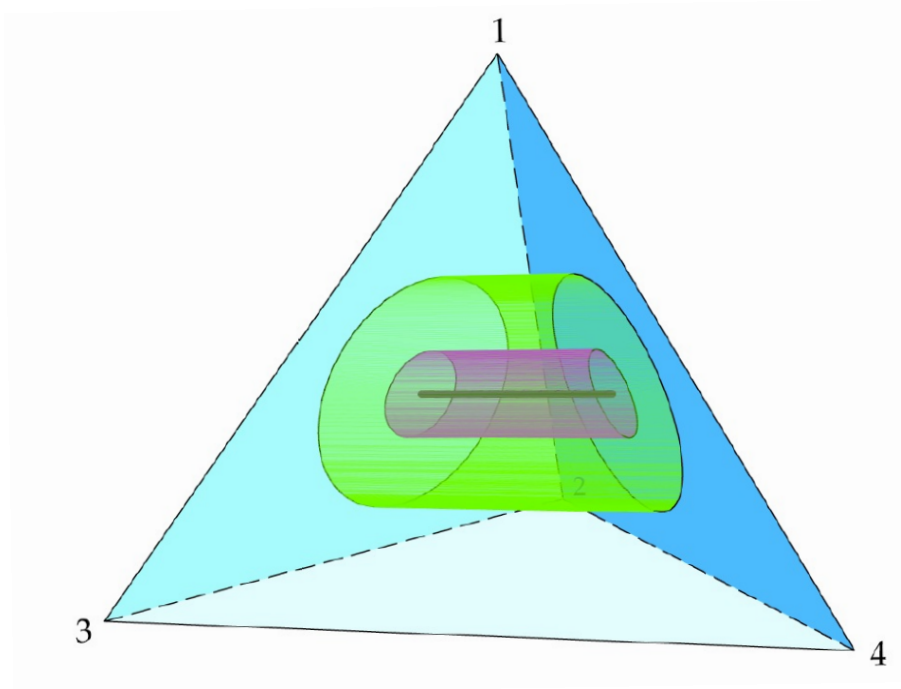


figure extraite de l'article

Dans le dessin ci dessus d'après ce qui précède si on est à l'extérieur du gros tube ou à l'intérieur du petit tube, au bout d'un certain temps on arrive entre les deux tubes et on y reste.

Comme la zone entre les deux tubes est un attracteur faible, on sait alors (cf appendice) qu'il existe un attracteur fort A contenu dans cette zone. A contiendra donc l'ensemble des valeurs d'adhérence des trajectoires partant d'en dehors de $NE(F)$. En montrant que A est disjoint du plan $Z = \{x_4 = 0\}$ on prouvera ainsi que, partant d'une condition initiale $x \in X - NE(F)$, la stratégie 4 sera jouée une infinité de fois avec une proportion ϵ où $\epsilon = \frac{d(A,Z)}{2}$

Par l'absurde soit $z \in A \cap Z$. On considère alors la dynamique où on va en marche arrière en partant de z , ie la courbe $C = \{\phi_t(z), t \leq 0\}$. Alors la courbe C est incluse dans $x \in A \cap Z$. En effet on sait déjà que A est invariant (cf appendice). Montrons que $Z \cap A$ est invariant pour la marche arrière, c'est à dire que si on est dans $Z \cap A$ à un instant, on y est depuis le début.

Montrons qu'on ne peut atteindre Z en un temps fini si l'on y est pas déjà, ce qui permettra de conclure grâce à l'invariance de A . Posons $z(t) = \phi_t(z)$. On a par la condition de Lipschitz:

$$|\dot{z}_4(t) - \dot{z}_4(0)| \leq K |z_4(t) - z_4(0)|$$

Comme $z(0) = z \in Z$, $z_4(0) = 0$ donc $\dot{z}_4(0) \geq 0$ (s'il n'y a personne qui joue 4 il ne peut y en avoir moins qui joue 4). De plus $z_4(t) \geq 0$

Alors l'inégalité précédente devient:

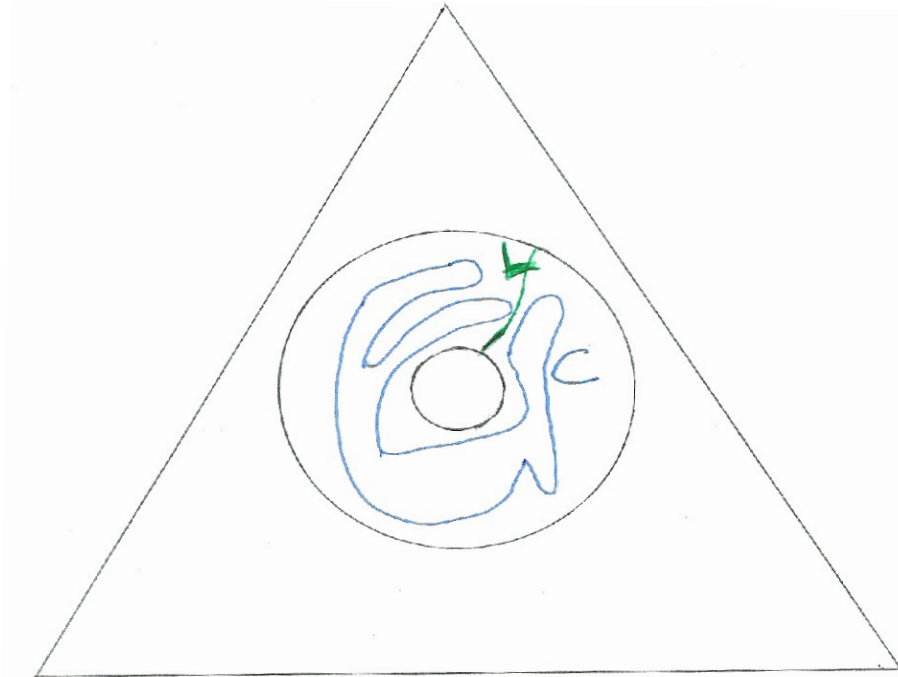
$$|\dot{z}_4(t) - \dot{z}_4(0)| \leq K z_4(t)$$

$$\Rightarrow \dot{z}_4(t) \geq -K z_4(t) + \dot{z}_4(0)$$

$\Rightarrow \dot{z}_4(t) \geq -Kz_4(t)$
 $\Rightarrow \forall t_0, \forall t \geq t_0 \quad z_4(t) \geq z_4(t_0)e^{-K(t-t_0)}$
 Donc il ne peut y avoir de $t_0 < 0 \mid z_4(t_0) > 0$ car $z_4(0) = z_4 = 0$

On peut alors s'intéresser à $\omega_-(z)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire issue de z pour la dynamique inverse (donnée par $-V^F$). Cette trajectoire est contenue dans $A \cap Z$. Par des propriétés élémentaires sur les attracteurs (elles aussi dans la partie "outils"), on a : $\omega_-(z) \subseteq A \cap Z$. Comme V^F ne s'annule pas sur $A \cap Z$ par construction, la dynamique inverse n'y admet pas de points stationnaires. On a donc, par le théorème de Poincaré Bendixson : $\omega_-(z)$ est une courbe périodique (pour la dynamique inverse et donc pour la dynamique initiale également). D'où $A \cap Z$ contient une trajectoire périodique, nous appellerons cette courbe C . Montrons que C passe par chaque zone de prédominance des stratégies de 1 à 3.

Par l'absurde si C n'entoure pas le cercle intérieur, alors il existe une courbe L qui va du cercle intérieur au cercle extérieur sans intersecter C . On considère alors l'ouvert $\{x \mid r < \|x\| < R\} - L$ qui est simplement connexe et qui contient C . La restriction de H à cet ouvert admet donc une primitive. Or cette primitive doit croître strictement le long de C ce qui est impossible car C est périodique.



Lorsque $z(t)$ est dans la zone 1, 3 et 4 sont des meilleures réponses, et comme par définition de Z , 4 n'est pas jouée, par innovation des gens vont se mettre à jouer 4 donc on va sortir de Z contradiction.

Ainsi $A \cap Z = \emptyset$ donc $\epsilon = d(A, Z) > 0$ On considère la fonction de gain \tilde{F} définie par $\tilde{F}_i(x) = F_i(x)$ pour $i \leq 3$ et $\tilde{F}_4 = F_4(x) - \eta$ avec η choisi assez petit pour que le nouvel attracteur \tilde{A} vérifie $d(\tilde{A}, Z) > \frac{\epsilon}{2}$ (c'est possible par continuité cf appendice). Alors comme la trajectoire passe une infinité de fois à une distance $\leq \frac{\epsilon}{4}$ de A elle passe une infinité de fois à une distance $\geq \frac{\epsilon}{4}$ de Z .

13.8 Outils

Dans cette section sont regroupés tous les outils, ainsi que leur démonstration, qui auront été utilisés dans la preuve des résultats précédents. Elle constitue une introduction aux concepts de base des systèmes dynamiques. Nous étudierons en premier lieu le flot que définit une dynamique. Ensuite nous montrerons quelques propriétés de base sur les attracteurs, notamment leur stabilité en lien avec les fonctions de Liapunov. Nous finirons par une démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson.

13.8.1 Théorie générale

On peut se demander en premier lieu : "le problème est-il bien posé ?". C'est-à-dire, en imposant le champ des vitesses sur X (en imposant les paiements $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ainsi que la dynamique $g : \mathbb{R}^n \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, a-t-on l'existence et l'unicité des trajectoires issues de tout point x_0 ? De plus, de telles solutions définissent un flot sur X à savoir : $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $\phi(t, x_0)$ représentant la position au temps t du point dont la trajectoire est issue de $\phi(0, x_0) = x_0$. On peut alors se demander si ce flot est continu en x_0 et en t . Ces questions feront l'objet des deux propositions suivantes, dont les démonstrations seront quelque peu succinctes.

La proposition 1 est relative aux problèmes d'existence et d'unicité.

Proposition 1 :

Si $V^F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne, alors pour tout $x_0 \in X$ il existe une unique solution $\phi(\cdot, x_0)$ définie sur \mathbb{R}_+ et telle que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \dot{\phi}(t, x_0) = V^F(\phi(t, x_0))$

Preuve :

Lorsque X est ouvert et V^F est lipschitzienne, l'unicité et l'existence d'une solution définie sur un intervalle ouvert maximal contenant 0 et tel que $\phi(0, x_0) = x_0$ sont des propriétés bien connues. Ici, X est un fermé d'intérieur vide. Mais V^F peut être prolongée en une fonction toujours lipschitzienne sur un voisinage U de X (prendre par exemple $\tilde{V}^F(y) = V^F(x)$ où $x \in X$ est tel que $d(y, x) = d(y, X)$). Il reste à voir que les solutions pour \tilde{V}^F partant de X restent dans X . Ce sont les conditions aux bords $V_i^F(x) \geq 0$ si $x_i = 0$, et la condition d'invariance $\sum_{i \in S} V_i^F = 0$ qui l'assurent. L'intervalle de définition peut alors être pris égal à \mathbb{R}_+ . On remarque qu'il se peut cependant que X ne soit pas invariant pour les $t < 0$.

La proposition 2 porte sur les propriétés fondamentales du flot.

Proposition 2 :

Pour tous $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x \in X$, $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$.
 $\phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ est continue.

Preuve :

La première assertion provient de l'unicité des solutions (voir proposition 1 précédente).

Pour prouver la continuité, on va chercher à majorer la différence. Pour cela, on remarque que, pour $x_0 \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\phi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t V^F(\phi(t, x_0)) dt.$$

Pour $(x_1, x_2) \in X^2$ et $(t, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \|\phi(t+h, x_2) - \phi(t, x_1)\| &= \left\| x_2 - x_1 + \int_0^t (V^F(\phi(t, x_2)) - V^F(\phi(t, x_1))) dt + \int_t^{t+h} V^F(\phi(t, x_2)) dt \right\| \\ &\leq \|\phi(0, x_2) - \phi(0, x_1)\| + \int_0^t K \|\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)\| + |h| \|V^F\|_\infty \end{aligned}$$

où K est la constante de lipschitz de V^F et $\|V^F\|_\infty$ sa norme infinie. On rappelle alors le lemme de Gronwall :

Soit $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle qu'il existe deux constantes positives C et K avec : $f(t) \leq C + \int_0^t K u(s) ds$.

Alors pour tout $u \in [0, t]$, $f(u) \leq C e^{Ku}$

On a ainsi : $\|\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| e^{Kt}$, ce qui prouve la continuité en x et en t de ϕ vis à vis de la majoration précédente.

Dans les preuves précédentes, la notion d'attracteur a été fréquemment utilisée. La continuité des attracteurs a joué un rôle essentiel pour montrer qu'en affaiblissant le double, celui-ci continuait pourtant à être joué. Nous commencerons cette partie par les définitions adéquates. Ensuite quelques propriétés fondamentales seront énoncées. Pour finir, nous nous attarderons sur les effets d'une perturbation sur un attracteurs.

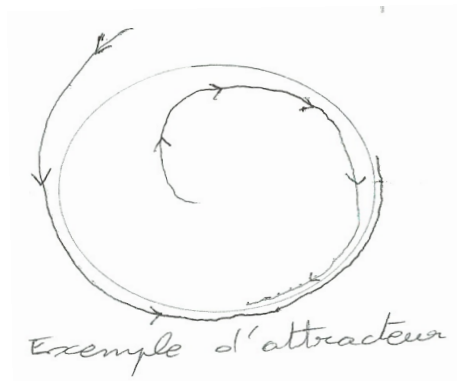
13.8.2 Attracteurs

Définition et nouvelle notation:

Soit $P \subseteq \mathbb{R}$, et $A \subseteq X$
On définit alors $\phi_P(A) = \{\phi(t, x), t \in P, x \in A\}$

On définit également $\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_{[t; \infty[}(A)}$
 $\omega(A)$ représente l'ensemble des valeurs d'adhérence asymptotique de la partie A pour le flot ϕ .

On dit qu'un ensemble A est attracteur si il existe un voisinage U de A tel que $\omega(U) = A$



Propriété:

Si A est un attracteur alors $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_t(A) = A$

Remarque:

Pour $t \geq 0$ la propriété précédente coïncide avec l'idée intuition que l'on se fait d'un attracteur: si on part de l'ensemble, comme il nous attire, on y reste.

Pour $t \leq 0$ cela signifie que si l'on est arrivé dans l'attracteur, on y était depuis le début; en partant d'en dehors de l'attracteur on s'en approche mais l'on y arrive jamais en un temps fini.

preuve:

On conserve les notations précédentes.

\subseteq :

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $b \in \phi_s(A)$, $b = \phi_s(a)$. Montrons que $b \in A = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_{[t; \infty[}(U)}$

Soit $r > 0$ et $t \geq 0$. Par continuité de ϕ_s , $\exists \eta > 0 \mid \phi_s(B(a, \eta)) \subseteq B(b, r)$. Comme $a = \omega(U)$, $\exists t' \geq (t - s)$, $u \in U$ tel que $\phi_{t'}(u) \in B(a, \eta)$. Alors $s + t' \geq t$ et $\phi_{s+t'}(u) = \phi_s(\phi_{t'}(u)) \in B(b, r)$ d'où le résultat annoncé.

\supseteq :

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $a \in A$.

Comme $A = \omega(U)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists t_k \in \mathbb{R}_+$, $\exists u_k \in U$ tel que $\phi_{k+t_k}(u_k) \in B(a, \frac{1}{k})$. Soit $z_k = \phi_{k+t_k-t}$, de sorte que $\phi_t(z_k) \rightarrow a$. Montrons qu'à une extraction près $z_k \rightarrow z \in A$ et on aura alors $a = \phi_t(z) \in \phi_t(A)$

Soit $V_n = \{x, d(x, A) < \frac{1}{n}\}$. Montrons qu'il existe $T_n \in \mathbb{R}_+$ tel que

$\forall s \geq 0$, $\phi_{T_n+s}(U) \subseteq V_n$ (*)

Soit $x \in V_n^c$. En particulier $x \notin A = \omega(U)$, donc $\exists t_x$ tel que $x \notin \overline{\phi_{[t_x; \infty[}(U)}$ c.a.d $\exists t_x, \exists r_x$ tels que $\forall s \geq 0$, $\phi_{s+t_x}(U) \cap B(x, r_x) = \emptyset$. Or V_n^c est compact (fermé dans un compact), donc $\exists p_n$ tel que $V_n^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i, r_{x_i})$. Alors avec $T = \max t_{x_i}$ on a $\forall s \geq 0$, $\phi_{T+s}(U) \cap V_n^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n} (\phi_{T+s}(U) \cap B(x_i, r_{x_i})) = \emptyset$ d'où $T_n = T$ convient.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \mid k - t \geq T_n$ donc $z_k \in V_n$. Soit $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}, v_k \in V_n\}$ Soit $w_n = z_{k_n}$ et φ tel que $w_{\varphi(n)} \rightarrow w$ Alors x (car A compact et $d(A, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{\varphi(n)}$). D'où le résultat.

Remarque:

On sait qu'en partant d'un point de U , on est proche de A au bout d'un certain temps; dans (*) on montre que ce temps ne dépend pas du point choisi.

Proposition:

Si il existe t tel que $\phi_t(\bar{U}) \subseteq U$ alors $\omega(U)$ est attracteur et U est un voisinage d'attraction de $\omega(U)$

preuve:

Il suffit de montrer que U est un voisinage de $\omega(U)$ car on a évidemment $\omega(U) = \omega(U)$. Comme U est ouvert il suffit de montrer que $\omega(U) \subseteq U$

Soit $\delta = d(\phi_t(\bar{U}), \delta U) > 0$ (car $\phi_t(\bar{U})$ est un compact de U).

$K = \phi_t(\bar{U}) \times [0; 1]$ est compact et $(u, s) \rightarrow \phi_s(u)$ est continue donc uniformément continue sur K donc

$\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x, y \in \phi_t(\bar{U}), \forall s, s' \in [0; 1], \|x - y\| \leq \epsilon$ et
 $|s - s'| \leq \epsilon$ implique que $\|\phi_s(x) - \phi_{s'}(y)\| \leq \frac{\delta}{2}$ en particulier $\forall s \in [0; \epsilon], \forall x \in \phi_t(\bar{U}),$
 $\|\phi_s(x) - \phi_s(0)\| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall s \in [0; \epsilon] \phi_{s+t}(\bar{U}) \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ (car $\forall y \in \phi_{s+t}(\bar{U}) d(y, \phi_t(\bar{U})) \leq \frac{\delta}{2}$).

On montre ensuite par récurrence en itérant la fonction ϕ_{s+t} que $\forall n \in \mathbb{N} \phi_{n*(s+t)}(\bar{U}) \subseteq V$ puis en prenant l'union sur tous les s possibles que

$\forall n \in \mathbb{N} \phi_{[n*t; n*t+n*\epsilon]}(\bar{U}) \subseteq V$ en particulier $\forall n \in \mathbb{N} \phi_{[n*t; n*t+n*\epsilon]}(U) \subseteq V$

Alors avec N assez grand pour que $N * \epsilon > 1$ on a $\forall n \geq N \phi_{[n*t; n*t+1]}(U) \subseteq V$ en prenant l'union sur tous n possibles on a $\phi_{[N*t; +\infty]}(U) \subseteq V$

$\Rightarrow \overline{\phi_{[N*t; +\infty]}(U)} \subseteq \bar{V} \Rightarrow \omega(U) \subseteq U$.

A présent, on peut se demander : "qu'advient-il de l'attracteur si l'on change la dynamique". La réponse est que, si la dynamique change continument, alors il en est de même pour l'attracteur. Ceci fait l'objet de la proposition suivante. Mais avant, nous avons besoin de définir l'ensemble des points "attirés" par l'attracteur.

Définition:

Le bassin d'attraction d'un attracteur $A \subseteq X$ est l'ensemble $\{x \in X, \omega(x) \subseteq A\}$

Proposition:

On considère une famille de fonctions $(V_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$, telle que $x \rightarrow V_\epsilon(x)$ soit lipschitzienne (pour garantir l'existence et l'unicité des solutions), et que $\Theta : \epsilon \rightarrow V_\epsilon$ soit continue (vis à vis de la norme infinie).

Soit A un attracteur de bassin $B(A)$ pour la dynamique V_0 .

Alors la fonction : $\epsilon \rightarrow A_\epsilon$ est semi-continue supérieurement en 0, et $\epsilon \rightarrow B(A_\epsilon)$ est semi-continue inférieurement en 0.

Remarque:

Cela signifie qu'un attracteur ne peut pas exploser; toutefois, cela n'exclue pas que celui-ci implose. Nous allons voir dans la preuve que le bassin d'attraction lui, tend à remplir tout l'espace contenu dans $B(A)$.

Preuve:

Tout d'abord la fonction $(x, t, \epsilon) \rightarrow \phi_\epsilon(t, x)$ est continue. La preuve est similaire à celle de la continuité du flot vue précédemment.

On prouve d'abord la première assertion. Soit U un ouvert tel que $A \subset U$. Sans pertes de généralité on peut supposer que $\bar{U} \subset B(A)$. En effet, $B(A)$ est un ouvert contenant A ($B(A)$ contient A par invariance de A). Pour voir que $B(A)$ est ouvert, il suffit de remarquer que pour $x \in B(A)$, il existe t, r tels que $\forall y \in B(x, r), \phi_0(t, y) \in V$ où V est un ouvert tel que $\omega(V) = A$. Il s'en suit alors que $\forall y \in B(x, r), \omega_0(y) \subset A$

On a vu lors des preuves précédentes qu'il existe donc T tel que $\phi_0(T, \cdot)(\bar{U}) \subset U$. Par compacité de \bar{U} et par continuité de ϕ il existe $\eta > 0$ tel que $\phi_\epsilon(T, \cdot)(\bar{U}) \subset U$ pour tout $\epsilon \leq \eta$. D'après une des proposition précédente, on a alors : $\omega_\epsilon(U) \subset U$ est un attracteur pour la dynamique V_ϵ .

Il reste à étudier la semi-continuité inférieure d'un tel attracteur. On constate d'abord que pour tout V ouvert tel que $A \subset U \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq B(A)$ (où U reste l'ouvert précédent), il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall \epsilon \leq \eta$, on ait l'existence de l'attracteur $A_\epsilon \subseteq U$ avec $V \subseteq B(A_\epsilon)$. En effet, il suffit de reprendre la démarche utilisée dans le paragraphe précédent avec T tel que $\phi_0(T, \cdot)(\bar{V}) \subset U$. La semi-continuité inférieure en découle instantanément.

13.8.3 Stabilité asymptotique et fonctions de Liapunov

Dans la partie précédente, nous avons étudié certaines propriétés des attracteurs. Cependant, comment peut-on en reconnaître un? Une caractérisation utile est celle donnée par les fonctions de Liapunov. Le principe est simple : trouver une fonction qui est monotone le long des trajectoires. Ainsi, en connaissant les variations de la fonction, on en apprend plus sur la direction des trajectoires. Nous avons besoin donc de nouvelles définitions. Ensuite, nous énoncerons les théorèmes.

Dans la preuve du théorème principal précédemment énoncé, cette méthode aura été utilisée pour montrer que l'extérieur de la couronne était répulsif (équilibres de Nash instables mis à part), ie pour montrer que la couronne était asymptotiquement stable, et donc qu'elle contenait un attracteur.

Définition :

Soit $B \subseteq X$ une partie compacte. On dit que B est stable si pour tout voisinage U de B il existe un ouvert $V \subseteq U$ positivement invariant (c'est-à-dire $\phi(\mathbb{R}_+ \times V) \subseteq V$)

On dit que B est un attracteur faible si $\{x, \omega(x) \subseteq B\}$ est un voisinage de B (cette notion est moins forte que celle d'attracteur (X est toujours un attracteur faible !), mais derrière un attracteur faible se cache toujours un attracteur car, pour un ouvert U tel que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq \{x, \omega(x) \subseteq B\}$, on a vu que $\omega(U) \subseteq B$ est attracteur et U est un voisinage attiré par $\omega(U)$).

B est asymptotiquement stable si B est un attracteur faible et si B est stable.

Le bassin d'attraction d'un attracteur faible B est défini comme celui d'un attracteur : $\{x \in X, \omega(x) \subseteq B\}$.

Théorème:

Une partie compacte $B \subseteq X$ est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction f continue positive définie sur un voisinage V de B telle que :

(1) $f(x) = 0$ si $x \in B$ et $f(x) > 0$ sinon

(2) $f(\phi(t, x)) < f(x)$ si $x \notin B, t > 0$ et $\phi(s, x) \in V, \forall s \in [0, t]$

Remarque:

Ce théorème ne dit pas quel est le rapport entre l'ouvert sur lequel cette fonction est définie et le bassin d'attraction, ce sera l'objet de la proposition suivante. Il convient de remarquer que c'est une condition nécessaire et suffisante, nous venons donc d'énoncer une caractérisation.

Preuve:

←

On garde les notations introduites dans l'énoncé du théorème. Nous prouverons d'abord la stabilité, puis l'attraction faible.

Soit U un ouvert contenant B . Sans pertes de généralités, on peut supposer que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$. On note alors $\alpha = \inf_{x \in \partial U} f(x) > 0$. On pose alors $U^* = \{x \in U, f(x) < \alpha\} \subseteq U$. Montrons que U^* est positivement invariant. Par l'absurde, si U ne l'était pas, il existerait $x_0 \in U$ et t tels que $\phi(t, x) \notin U^*$. La trajectoire intersecte donc ∂U^* : il existe $s \in [0, t]$, $\phi(s, x) \in \partial U^*$. Or sur ∂U^* , on a $f \geq \alpha$. D'où la contradiction avec la deuxième hypothèse sur f . B est donc stable.

Il reste à montrer l'attraction. Soit toujours U tel que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$. Alors pour tout $x \in U$, on a : $\omega(x) \subset \bar{U}$, donc $\omega(x) \subset V$. On suppose par l'absurde que $\omega(x) \not\subseteq B$, alors il existe $y \in V \setminus B$ tel que la trajectoire issue de x s'approche infiniment près de y . Or il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(\phi(t, y)) < f(y)$. Par continuité de f , de ϕ , il existe donc un voisinage O de y tel que : $\forall z \in O, f(\phi(t, z)) < f(y)$. Comme il existe t' tel que $\phi(t', x) \in O$, il existe donc $T \in \mathbb{R}_+$ tel que, $f(\phi(T, x)) < f(y)$, contredisant le fait que y soit une valeur d'adhérence de la trajectoire à cause de la deuxième condition sur f .

On suppose maintenant que B est asymptotiquement stable, de bassin $B(B)$. Nous allons construire une fonction de Liapunov adéquate sur $B(B)$.

On pose $g : B(B) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par : $g(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} d(\phi(t, x), B)$ où d désigne la distance usuelle. g ainsi définie est continue. En effet, soit $x \in B(B)$. Si $x \notin B$, comme A est un attracteur, il existe un voisinage K compact de x tel que $d(\phi(t, y), B) \leq c < d(x, B), \forall y \in K, t \geq T$ (les arguments pour ce résultat ont été vu lors des premières propriétés des attracteurs). D'où $g(x) = \sup_{t \in [0, T]} d(\phi(t, x), B)$, et par continuité de $\phi(T, \cdot)$ la formule reste valable pour un voisinage compact K' de x . Comme $[0, T] \times K$ est compact, on en déduit que ϕ est uniformément continue sur cet ensemble. Il en résulte donc facilement que g est continue en x . Si $x \in B$ un raisonnement sensiblement pareil peut être mené pour montrer la continuité en x .

Il est clair que g est décroissante le long des trajectoires, mais elle ne l'est pas forcément strictement. On pose alors $f(x) = \int_0^\infty g(\phi(t, x))e^{-t} dt$. f est bien continue (en appliquant le théorème de convergence dominée par exemple), décroissante le long des trajectoires. Supposons par l'absurde qu'elle ne vérifie pas la seconde condition du théorème. Alors, il existe $x \notin B, t > 0$ tels que $f(x) = f(\phi(t, x))$. Cela implique en particulier que $g(\phi(s, x)) = g(\phi(s + t, x)), \forall s \in \mathbb{R}_+$. On en déduit alors que $g(x) = g(\phi(t, x)) = g(\phi(2t, x)) = \dots = g(\phi(kt, x))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ce qui est absurde car $g(\phi(t, x)) \rightarrow 0$. f est donc de la forme recherchée.

On peut dorénavant s'intéresser à la question : "a-t-on $V \subseteq B(B)$ ou $B(B) \subseteq V$ dans la réciproque? La réponse est que, sans imposer plus de condition sur la fonction de Liapunov, on ne peut rien dire de la sorte. Des contre exemples existent (dans le Bhatia Szegö par exemple) pour les deux situations. Le prochain théorème nous renseigne sur la question lorsque f est uniformément non bornée. Nous ne donnerons pas de preuve de ce théorème, elle serait du même type que la précédente.

Définition:

Une fonction f définie sur un ensemble V est dite uniformément non bornée si, pour tout $C > 0$ il existe un sous-ensemble compact $K_C \subseteq V$, $K_C \neq V$ tel que pour tout $x \in V \setminus K_C$, $f(x) \geq C$.

Proposition:

Si une partie compacte $B \subseteq X$ est asymptotiquement stable, alors il existe une fonction f continue positive uniformément non bornée, définie sur $B(B)$ vérifiant les propriétés (1) et (2).

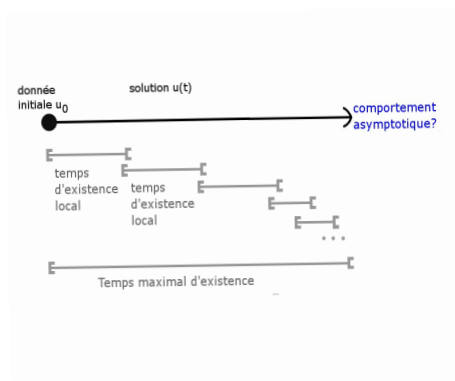
Réciproquement, si il existe une fonction continue positive uniformément non bornée, définie sur un voisinage ouvert V de B , vérifiant (1) et (2), alors A est asymptotiquement stable et l'on a $V \subseteq B(B)$.

13.8.4 Théorème de Poincaré-Bendixon

Le but de cette partie est d'expliquer le théorème de Poincaré-Bendixon. Ce théorème permet de décrire l'aspect d'un attracteur (pour une trajectoire) dans le plan, soit, ici, pour une dynamique d'évolution à 3 stratégies. Sa démonstration, assez amusante, repose sur une construction impossible à réaliser lorsque l'on dessine sur une feuille, comme il sera expliqué plus loin. Pour simplifier la compréhension et les démonstrations, l'ensemble de départ X sera dorénavant considéré comme étant un ouvert de \mathbb{R}^n . Comprendre comment appliquer ce théorème à une trajectoire plane pour un jeu en dimension 3 ne posera pas de problèmes.

Théorème (Poincaré-Bendixon):

Soit un flot Φ de classe C^1 défini sur un ouvert U du plan. Soit $x \in U$. Si $\omega(x)$ est compact et n'admet pas de point stationnaire, alors il existe $y \in U$ tel que la trajectoire de y soit périodique (c'est-à-dire qu'il existe $t > 0$ tel que $\phi(t, y) = y$) et tel que $\omega(x) = \phi(\mathbb{R} \times \{y\}) = \omega(y)$.



Remarque:

Ici, le théorème est donné sous une forme plus générale que celle requise pour la démonstration du théorème précédent. Comme X est compact, la condition de compacité de $\omega(x)$ est toujours remplie. Pour pouvoir appliquer ce théorème dans notre cas, il faut considérer à nouveau la dynamique définie sur un voisinage de X (pour répondre à la condition d'ouverture) et utiliser l'invariance de X sous cette dynamique pour s'assurer qu'à aucun moment on n'en est sorti. De plus, le théorème reste valable si l'on considère $\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \phi_{]-\infty; t]}(A)$ pour la dynamique inverse, qui est le résultat que nous avons en pratique utilisé. La preuve du théorème sera donnée à la fin de cette section.

La première étape est de se faire une idée de la forme du flot, localement, autour d'un point non stationnaire. On rappelle que pour tout $x \in X$, $\dot{\phi}(0, x) = V^F(x)$

Définition:

Une section locale en $x \in \dot{X}$ est la donnée d'une partie S d'un hyperplan H de \mathbb{R}^n telle que $\{x\} + S \subset X$ soit un ouvert de $(\{x\} + H)$ pour la topologie induite, qui a la propriété suivante : $\forall y \in \{x\} + S, V^F(x) \notin H$. Cela signifie que le flot "traverse" S .

Ce qui va être intéressant maintenant, c'est que l'on va pouvoir décrire entièrement le comportement du flot au voisinage de ce point par la donnée du point d'intersection avec cette section et du temps t de cette intersection. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition:

Soit S une section au point x . On garde les notations de la proposition précédente. Il existe alors un ouvert de la forme $[-t_0, t_0] \times S'$ de $\mathbb{R} \times H$ tel que la fonction $\Theta : [-t_0, t_0] \times S' \rightarrow X$ définie par $\Theta(t, s) = \phi(t, x + s)$ soit un difféomorphisme sur son image.

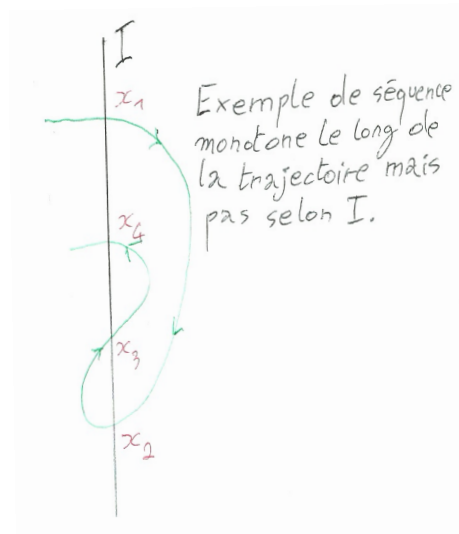
Preuve:

Soit θ définie comme dans la proposition. Alors $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0, 0) = V^F(x)$ d'une part, et comme $\theta(0, s) = x + s$, $\frac{\partial \theta}{\partial s_i}(0, 0) = e_i$ ($(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ étant une base de H). Cela signifie que la différentielle de θ au point $(0, 0)$ restreinte à H est l'identité. Or $V^F(x) \notin H$. On en conclut donc que la différentielle de θ est inversible en $(0, 0)$. On applique ensuite le théorème d'inversion locale pour obtenir le résultat souhaité.

On se place maintenant dans le plan. Si l'on se donne une trajectoire issue d'un point x , le but est d'étudier comment cette courbe coupe les sections qu'elle traverse. Ceci est l'objet de la proposition suivante.

Définition:

Soit $(x_n = \phi(t_n, x))_n$ une suite de points, on dit que la séquence est monotone le long de la trajectoire si $t_n \leq t_{n+1}$. On suppose que pour tout n , $x_n \in I$ où I est une droite affine dans \mathbb{R}^2 . Elle est alors monotone selon I si $x_{n+1} - x_n = \lambda_n(x_1 - x_0)$, $\lambda_n \geq 0$.



Proposition:

Soit $S = I$ une section locale pour le flot, et $(x_n = \phi(t_n, x))_n$ une suite de points appartenant à la trajectoire issue d'un même point x telle que $x_n \in x + S$ pour tout n . Alors si la séquence est monotone le long de la trajectoire, elle l'est aussi selon I .

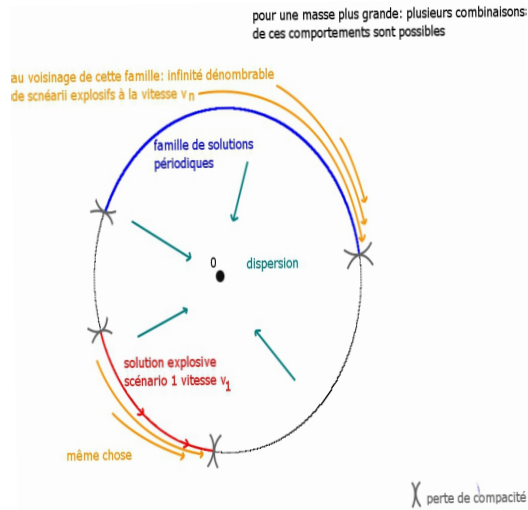
Preuve:

On suppose que $t_n \leq t_{n+1}$. Si l'on arrive à montrer le résultat pour x_1, x_2 et x_3 Alors en itérant on obtiendra le résultat annoncé.

Soit S une section. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $S = \{0\} \times]0, 3[\subset \mathbb{R}^2$, que le premier point d'intersection est le point $(0, 1)$ et que le second est le point $(0, 2)$ (en effet, les transformations utilisées ne sont que des rotations, translations, symétries et homothéties et donc permettent de généraliser le résultat). On notera (e_1, e_2) la base usuelle du plan. Sur S , on doit avoir : $V^F(x) \notin \text{Vect}(e_2)$ D'où $\langle V^F(x), e_1 \rangle \neq 0$. Par continuité cela impose qu'on l'on peut choisir, par exemple (l'autre cas étant similaire), que $\langle V^F(x), e_1 \rangle > 0$ sur S .

A quoi ressemble alors la courbe décrite par $\phi(\cdot, x_1)$ entre le moment où elle passe par x_1 et celui où elle atteint x_2 ? En fait, on vérifie aisément à la main la propriété en essayant de faire le dessin avec un crayon. Pourtant, une justification claire nécessite un argument plus évolué, le théorème de Jordan.

On considère maintenant le lacet γ suivant : partant de x_1 , on suit la courbe $\phi(t, x_1)$ jusqu'à atteindre x_2 , puis on redescend de x_2 à x_1 en suivant S (ce lacet peut être facilement paramétré mais nous ne le ferons pas). Ce lacet est donc injectif, car la courbe entre x_1 et x_2 l'est, et car par définition de x_1 et x_2 la courbe entre x_1 et x_2 ne coupe pas le segment $[x_1, x_2]$. On peut donc lui appliquer le théorème de Jordan : ce lacet sépare le plan en 2 composantes connexes, l'une bornée, l'autre non, dont il est la frontière.



On peut donc supposer (l'autre cas étant symétrique) qu'à gauche de $]x_1, x_2[$ on soit dans la composante connexe non bornée, et qu'à droite l'on soit dans la composante connexe bornée. (ici, à gauche signifie, pour $y = x - \delta e_1$ avec $x \in]x_1, x_2[$ pour δ assez petit dépendant de x).

Comme $\langle V^F(x_2), e_1 \rangle > 0$, on a que pour t assez petit, $\phi(t, x_2)$ est dans la composante connexe bornée (car pour t et ϵ assez petits on a $\gamma \cap B(x_2, \epsilon) = \phi([-t, 0] \times \{x\}) \cup [x_2, x_2 - \epsilon e_1]$).

On suppose maintenant par l'absurde que $x_3 \in]x_1, x_2[$. Alors $\langle V^F(x_3), e_1 \rangle > 0$. D'où, de même, pour t assez petit, $\phi(-t, x_3)$ appartient à la composante connexe non bornée. On a donc montré que la courbe de x_2 à x_3 relie deux points dans les deux composantes connexes distinctes, sans couper γ , ce qui est absurde.

Montrons maintenant que x_3 ne peut pas non plus être en dessous de x_1 . Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Considérons alors la dynamique opposé à V^F telle que les trajectoires soient suivies à l'envers. S reste alors toujours une section. La courbe issue de x_3 passe par x_2 , puis par x_1 , ce qui est absurde, car $x_1 \in [x_3, x_2]$ et d'après le résultat précédent.

Nous venons donc de montrer le résultat !

Proposition:

Soit $x \in X$, soit $y \in \omega(x)$, alors la trajectoire issue de y ne peut pas couper une section en plus d'un point.

Preuve:

On suppose par l'absurde que la trajectoire issue de y coupe une section S en 2 points distincts z_1 et z_2 . Alors, par le même argument que dans les preuves précédentes, il existe deux voisinages distincts V_1 et V_2 de z_1 et z_2 tels que, pour tout $x \in V_i$ il existe un temps $t \in [-t_i, t_i]$ tel que $\phi(t, x) \in V_i \cap S$. Or la trajectoire issue de x passe une infinité de fois dans chaque voisinage V_i car $z_i \in \omega(x)$. Donc d'après le premier point il va exister une suite de temps t_n strictement croissante telle que : $\phi(t_{2n}, x) \in V_1 \cap S$, $\phi(t_{2n+1}, x) \in V_2 \cap S$. Ce qui est absurde, vis à vis de la proposition précédente.

Preuve du théorème de Poincaré-Bendixson:

Nous allons d'abord montrer que si $y \in \omega(x)$ alors y appartient à une trajectoire périodique. On a : $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ (ce fait n'est pas difficile à voir en revenant aux définitions). De plus, comme y appartient au compact invariant $\omega(x)$, alors $\omega(y)$ est non vide. Soit donc $z \in \omega(y)$. Comme $\omega(x)$ ne contient pas de points stationnaires, $V^F(z) \neq 0$. Cela signifie que l'on peut exhiber une section S concernant le point z . On note V l'ouvert de X , $z \in V$ tel qu'il existe un C^1 difféomorphisme θ entre $[-t_0, t_0] \times S$ et V (cf proposition concernant les sections). Comme $z \in \omega(y)$, il existe t_1 et t_2 distincts tels que $\phi(t_1, y), \phi(t_2, y) \in V$. Mais alors il existe $s_1, s_2 \in S$ et $t'_1, t'_2 \in [-t_0, t_0]$ tels que $\theta(t'_1, s_1) = \phi(t_1, y)$, et $\theta(t'_2, s_2) = \phi(t_2, y)$. D'où $\phi(t_1 - t'_1) = z + s_1$, et $\phi(t_2 - t'_2) = z + s_2$ (on peut de plus imposer que $t_i - t'_i \geq 0$ car on peut prendre t_i aussi grand que l'on veut et que t'_i est borné). Or d'après la proposition précédente, la courbe issue de y ne doit couper la section $\{x\} + S$ qu'en un point. D'où $\phi(t_1 - t'_1) = \phi(t_2 - t'_2)$. De plus, on peut s'assurer que $t_1 - t'_1 - t_2 > t_0$ ce qui garantit que $t_1 - t'_1 \neq t_2 - t'_2$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tels que $\phi(y, t) = \phi(y, t + T)$ La trajectoire de y est donc périodique et l'on a : $\phi(\mathbb{R} \times \{y\}) = \omega(y) \subseteq \omega(x)$

On veut maintenant montrer l'inclusion réciproque. Comme $V^F(y) \neq 0$, on peut exhiber une section S , un intervalle $[-t_0, t_0]$ (on prendra $t_0 < T$), un voisinage ouvert V de y et un difféomorphisme θ comme dans la proposition précédente. De plus, ϕ est continue sur le compact $[-T - t_0, T + t_0] \times \bar{V}$ donc uniformément continue. En particulier, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une boule $B(y, r_\epsilon) \subset V$ telle que : $\forall (t, z) \in [-T - t_0, T + t_0] \times B(y, r_\epsilon)$, $d(\phi(t, x), \phi(t, z)) < \epsilon$.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe t_1 tel que $\phi(t_1, x) \in B(y, r_\epsilon)$. Comme $B(y, r_\epsilon) \subset V$, il existe $t'_1 \in [-t_0, t_0]$ tel que $\phi(t_1 + t'_1, x) \in \{y\} + S$. On peut de plus imposer que $\phi(t_1 + t'_1, x) \in B(y, r_\epsilon)$. On a donc : $\forall t \in [-T, T]$, $d(\phi(t, y), \phi(t_1 + t'_1 + t, x)) < \epsilon$, on peut imposer en outre que $B(y, \epsilon) \subset V$. D'où en particulier $\phi(t_1 + t'_1 + T, x) \in V$, donc il existe $t'_2 \in [-t_0, t_0]$ tel que $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2, x) \in S$. De même on peut imposer (en modifiant les ϵ et par continuité) que $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2, x) \in B(y, r_\epsilon)$. On peut donc construire un troisième point dans S , $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2 + T + t'_3, x)$ Or la séquence des points d'intersection entre la courbe issue de x et la section en y doit être monotone, et tendre vers y . Par conséquent on a donc forcément $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2 + T + t'_3, x) \in S \cap B(y, r_\epsilon)$, idem pour le quatrième point et ainsi de suite. Par récurrence pour tout n , le point $\phi(t_1 + t'_1 + T + \dots + T + t'_n, x)$ est dans la boule $B(y, r_\epsilon)$. Comme $T > t_0$, la suite des temps considérés tend vers $+\infty$, et entre chaque temps $t_n = t_1 + t'_1 + T + \dots + T + t'_n$ et $t_{n+1} = t_1 + t'_1 + T + \dots + T + t'_n + T + t'_{n+1}$, on a $d(\phi(t_n + t, x), \omega(y)) < \epsilon$ par choix de $B(y, r_\epsilon)$. Ainsi, pour tout $t \geq t_1$ on a : $d(\phi(t, x), \omega(y)) < \epsilon$. D'où $d(\phi(t, x), \omega(y)) \rightarrow 0$. On vient de montrer que $\omega(x) \subseteq \omega(y)$.

13.9 Conclusion

Nous avons montré dans cet exposé comment essayer d'étudier un critère simple de rationalité: l'élimination des stratégies strictement dominées. Certaines dynamiques les éliminent, en particulier les variantes de celle des réplicateurs. Pour d'autres, on peut créer un jeu où de telles stratégies survivent. Dans le premier cas, la population, même si chaque individu agit sans avoir une parfaite connaissance du jeu, va asymptotiquement se comporter comme "rationnelle". Ceci est intéressant, car c'est une nouvelle sorte de rationalité, touchant une population et non forcément ses individus. Dans l'autre cas, dans un jeu avec des gains très changeants, avec une grande instabilité des trajectoires, trouver des stratégies optimales, ou du moins ne pas jouer celles strictement dominées, est beaucoup plus dur. Un exemple de dynamique du deuxième type est la dynamique BNN.

En plus de l'introduction aux dynamiques d'évolution, cet exposé aura permis d'étudier également certaines propriétés des systèmes dynamiques. La partie "outil" peut sembler importante face aux parties précédentes, mais c'est une conséquence de l'attrait de certains résultats, notamment le théorème de Poincaré-Bendixson.

Bibliography

- [1] Amari. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields. *Biological cybernetics*, 1977.
- [2] J. M. Ball. Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, pages 473–486, 1977.
- [3] Carrillo, Cordier, and Mancini. A decision-making fokker-planck model in computational neurosciences. *J. Math. Biol.*, décembre 2011.
- [4] Lions Cazenave. Orbital stability of standing waves for some nonlinear schrödinger equations. *Communications in Mathematical Physics*, pages 549–561, 1982.
- [5] Keel M. Staffilani G. Takaoka H. Tao T. Colliander, J. Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear schrödinger equation. *Inventiones mathematicae*, 2010.
- [6] R. Côte. Instability of nonconstant harmonic maps for the (1+2)-dimensional equivariant wave map system. *Int. Math. Res. Not.*, page 3525–3549, 2005.
- [7] Raphael P. Danchin, R. Analyse nonlineaire, sur la stabilite des ondes solitaires. *Ecole Polytechnique*, 2011.
- [8] Kenig C. Merle F. Duyckaerts, T. Profiles of bounded radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. *Geometric and Functional Analysis*, 2012.
- [9] Engel and Nagel. *A short course on operators semigroups*. Springer, 2010.
- [10] Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [11] Faugeras and Faye. Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2010.
- [12] C. Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. *The millennium prize problems*, 2000.
- [13] Papanicolaou G. Fibich, G. Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear schrödinger equation in critical dimension. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1999.
- [14] Freidlin and Wentzcell. *Random perturbations of dynamical systems*. Springer, 1998.
- [15] H. Fujita. On the blowing up of solutions of the cauchy problem for $u_t = u + u^{(1 + \gamma)}$. *J.Fac.Sci.Univ.TokyoSect.*, pages 13 – –109, 1966.

- [16] R.T. Glassey. On the blowing up of solutions to the cauchy problem for nonlinear schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, page 1794–1797, 1977.
- [17] R.T. Glassey. On the blowing up of solutions to the cauchy problem for nonlinear schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, page 1794–1797, 1977.
- [18] J. F. Grotowski. Finite time blow-up for the harmonic map heat flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, pages 231–236, 1993.
- [19] Gustafson S. Tsai T. P. Guan, M. Global existence and blow-up for harmonic map heat flow. *Journal of Differential Equations*, pages 1–20, 2009.
- [20] M. Guan. Global questions for evolution equations landau-lifshitz flow and dirac equation. *University of British Columbia*, 2010.
- [21] Nakanishi K. Tsai T. P. Gustafson, S. Asymptotic stability, concentration, and oscillation in harmonic map heat-flow, landau-lifshitz, and schrödinger maps on \mathbb{R}^2 . *Communications in Mathematical Physics*, pages 205 – 242, 2010.
- [22] Hansel and Sompolinsky. Modeling feature selectivity in local cortical circuits. *Methods in Neuronal modeling*, 1998.
- [23] Hodgkin and Huxley. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of loligo. *Journal of Physiology*, 1952.
- [24] Hubel and Wiesel. Receptive fields of single neurones in the cat’s striate cortex. *The Journal of physiology*, 1959.
- [25] G. Velo J. Ginibre. n a class of nonlinear schrödinger equations. i. the cauchy problem, general case. *Journal of Functional Analysis*, page 1–32, 1979.
- [26] Krein and Rutman. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*. American Mathematical Society, 1950.
- [27] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissent l’espace. *Acta Math.*, 1934.
- [28] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, page 109–145, 1984.
- [29] Merle F. Raphael P. Martel, Y. Blow up for the critical gkdv equation i: dynamics near the soliton. *preprint*, 2012.
- [30] Merle F. Raphael P. Martel, Y. Blow up for the critical gkdv equation i: dynamics near the soliton. *preprint*, 2012.
- [31] Merle F. Raphael P. Martel, Y. Blow up for the critical gkdv equation ii: minimal mass blow up. *preprint*, 2012.
- [32] P. Martel, Y. et Rahael. Sur la dynamique des solitons: stabilité, collision et explosion. *Gaz. Math*, 2009.
- [33] F. Merle. Construction of solutions with exactly k blow-up points for the schrödinger equation with critical nonlinearity. *Communications in mathematical physics*, 1990.

- [34] Zaag Merle, F. Existence and universality of the blow-up profile for the semilinear wave equation in one space dimension. *Journal of Functional Analysis*, pages 43–121, 2007.
- [35] Zaag H. Merle, F. Ode type behavior of blow-up solutions of nonlinear heat equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, pages 435–450, 2002.
- [36] Zaag H. Merle, F. Ode type behavior of blow-up solutions of nonlinear heat equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, pages 435–450, 2002.
- [37] Michel, Mischler, and Perthame. General relative entropy inequality: an illustration on growth models. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2005.
- [38] Růžička M. Šverák V. Nečas, J. On leray’s self-similar solutions of the navier-stokes equations. *Acta Mathematica*, 1996.
- [39] Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2002.
- [40] P. Raphaël. Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for an l^2 -supercritical nonlinear schrödinger equation. *Duke Mathematical Journal*.
- [41] Schweyer Raphaël, P. Stable blow up dynamics for the 1-corotational heat flow. *Commun. Pure App. Math.(to appear)*, 2011.
- [42] Schweyer Raphaël, P. Quantized slow blow up dynamics for the corotational energy critical harmonic heat flow. *arXiv preprint arXiv:1301.1859*, 2013.
- [43] Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1996.
- [44] Roxin and Montbrió. How effective delays shape oscillatory dynamics in neuronal networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2011.
- [45] R. Schweyer. Type ii blow-up for the four dimensional energy critical semi linear heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 2012.
- [46] W. A. Strauss. Nonlinear scattering theory at low energy. *Journal of functional analysis*, pages 110–133, 1981.
- [47] W. A. Strauss. Nonlinear scattering theory at low energy: sequel. *Journal of functional analysis*, pages 281–293, 1981.
- [48] Struwe. On the evolution of harmonic mappings of riemannian surfaces. *Comment. Math. Helv.* 60, page 558–581, 1985.
- [49] T. Tao. Nonlinear dispersive equations. local and global analysis. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 106, 2006.
- [50] T. Tao. Nonlinear dispersive equations. local and global analysis. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 106, 2006.
- [51] Veltz and Faugeras. Local/global analysis of the stationary solutions of some neural field equations. 2009.
- [52] Wilson and Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 1972.