

# Passage micro-macro pour les modèles de trafic

Mémoire de L3 de François Desquilbet et Lucas Teyssier  
encadré par Bertrand Maury

## 1 Introduction

On étudie le lien entre les solutions macroscopique et microscopique de l'équation de transport. Pour cela, on s'intéresse au mouvement d'un ensemble de particules. Ces particules peuvent se déplacer selon un axe fixe, et on modélise leur évolution de deux manières différentes :

- Point de vue microscopique : on distingue les particules et on définit des relations explicites entre elles.
- Point de vue macroscopique : on définit une densité ainsi qu'un flux de particules en chaque point.

Ces deux points de vue permettent de modéliser l'évolution temporelle du système considéré à partir d'une situation initiale donnée. Le but de ce mémoire est de montrer dans quelles mesures le point de vue microscopique converge vers le point de vue macroscopique lorsque le nombre de particules considérées tend vers l'infini à masse totale constante, pour un ensemble de particules qui suit une équation de transport.

### 1.1 Présentation du modèle macroscopique

Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  variable temporelle et  $x \in \mathbb{R}$  variable spatiale, on définit la densité macroscopique  $\rho(t, x) \in [0, 1]$  comme une estimation du nombre de particules au voisinage de  $x$  à  $t$ . Une densité de 1 correspond à une situation de bouchon où les particules sont au contact les unes avec les autres, tandis qu'une densité de 0 correspond à une absence de particule au voisinage de ce point.

On définit la vitesse  $v$  des particules en fonction de la densité particulaire :  $v : [0, 1] \rightarrow [0, V]$ , avec  $V > 0$  la vitesse maximale. La vitesse  $v$  sera prise  $C^1$ , décroissante, avec  $v(0) = V$  et  $v(1) = 0$  : les particules avancent d'autant plus vite que la densité de particules est faible, avec une vitesse maximale  $V$  pour des particules infiniment éloignées les unes des autres (i.e.  $\rho = 0$ ), et une vitesse nulle dans une situation de bouchon (i.e.  $\rho = 1$ ).

On définit enfin le flux particulaire  $f$  à l'instant  $t$  et au point  $x$  comme étant :

$$f(\rho) = \rho v(\rho).$$

Le flux est une quantité algébrique qui représente le nombre de particules en

mouvement dans le sens des  $x$  croissants. Ici, le flux est positif, ce qui indique un mouvement des particules dans le sens des  $x$  croissants. Le flux est nul lorsqu'il n'y a pas de particules (i.e.  $\rho = 0$ ), ou lorsque les particules n'avancent pas (i.e.  $v = 0$ ).

La variation en temps de la densité  $\rho$  est liée à la variation en espace du flux  $f$ . Il s'agit de l'équation de transport, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0 \\ \rho(0, x) = \tilde{\rho}(x). \end{cases} \quad (1)$$

## 1.2 Présentation du modèle microscopique

Pour le modèle microscopique, on distingue les particules et on suppose que la vitesse de chaque particule dépend uniquement de sa distance à la particule devant elle. Il s'agit d'un exemple de modèle du type "Follow the Leader". On peut interpréter les particules comme des voitures qui se suivent sur une route.

On considère un ensemble de  $n + 1$  voitures. On note  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+1}$  le vecteur des positions des voitures. On impose que  $p_{i+1} - p_i \geq l$  pour  $i = 1 \dots n$ , où  $l$  est la longueur d'une voiture : cela signifie que les véhicules ne s'intersectent pas, i.e. qu'il n'y a pas d'accident.

On définit la vitesse  $w$  d'un véhicule, qui dépend uniquement de sa distance au véhicule devant lui :  $w : [l, +\infty[ \rightarrow [0, V]$ , avec  $V > 0$  la vitesse maximale. La vitesse  $w$  sera prise croissante, avec  $w(l) = 0$  et  $w$  tendant vers  $V$  en  $+\infty$  : une voiture avance d'autant plus vite qu'elle est loin de la voiture devant elle, avec une vitesse nulle lorsqu'elle est au contact de la voiture devant elle, et une vitesse  $V$  lorsqu'il n'y a personne devant.

$\mathbf{p}$  vérifie alors l'équation :

$$\begin{cases} \dot{p}_i = w(p_{i+1} - p_i) & i = 1 \dots n \\ \dot{p}_{n+1} = V \\ p_i(0) = \tilde{p}_i. \end{cases} \quad (2)$$

## 1.3 Lien entre les deux modèles

Pour faire un lien entre les modèles macroscopique et microscopique, il faut lier les constantes des deux modèles. Soit  $n$  le nombre de voitures du modèle microscopique. Il faut avoir  $l = \frac{m}{n}$ , avec  $l$  la longueur d'une voiture dans le modèle microscopique, et  $m = \int \rho$  la masse totale des véhicules (constante au cours du temps). On suppose de plus que  $w(\delta) = v(l/\delta)$  pour toute distance  $\delta > 0$ . La trajectoire d'une voiture est alors régie par l'équation :

$$\dot{p} = v(\rho(t, p(t))).$$

## 2 Enoncé des résultats

### 2.1 Notations

Dans la suite,  $n$  est un entier naturel non nul et  $m > 0$  est la masse totale des  $n + 1$  véhicules. On pose  $l_n = \frac{m}{n}$  la longueur moyenne d'un véhicule. Les véhicules étant identiques,  $l_n$  est la longueur de n'importe quel véhicule.

On présente maintenant les deux espaces de fonctions importants dans lesquels on va travailler, qui sont définis pour tous  $m$  et  $n$ . Premièrement, l'espace des densités (pour le modèle macroscopique) :

$$R_m = \left\{ \rho \in L^1(\mathbb{R}, [0; 1]) \text{ à support compact; } \int \rho = m \right\}.$$

Deuxièmement, l'espace des positions (pour le modèle microscopique) :

$$P_n = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; p_{i+1} - p_i \geq l_n, \quad i = 1 \dots n \right\}.$$

On définit aussi des opérateurs entre ces espaces. La fonction  $E_n$  associe à une densité de  $R_m$  un ensemble de positions dans  $P_n$ . Elle est définie pour  $\rho \in R_m$  par :

$$E_n(\rho) = p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{n+1} = \max(\text{spt}(\rho)) \\ p_i = \max \left\{ p \in \mathbb{R}; \int_p^{p_{i+1}} \rho = l_n \quad i = 1 \dots n \right\} \end{cases}.$$

La fonction  $C_n$  fait le trajet inverse : elle associe à un ensemble de positions de  $P_n$  une densité constante par morceaux de  $R_m$ . Elle est définie pour  $\mathbf{p} \in P_n$  par :

$$C_n(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{p_{i+1} - p_i} \mathbf{1}_{[p_i; p_{i+1}[}.$$

$E_n$  et  $C_n$  permettent de passer entre représentation macroscopique et représentation microscopique.

Avec  $E_n$ , en considérant une densité  $\rho \in R_m$  : on place la voiture de tête au point d'abscisse le plus grand pour lequel  $\rho$  est non nul. Ensuite, à partir de ce point, on place les autres voitures au fur et à mesure, avec une voiture placée dès que la masse (qui est l'intégrale de la densité) entre un point et la voiture placée précédemment vaut  $l_n$ , masse d'une voiture.

Pour  $C_n$ , en considérant  $p \in P_n$  : on crée une densité constante par morceaux en sommant les apports de chaque voiture, la densité étant assimilable à l'inverse de la distance entre deux voitures multipliée par  $l_n$ .

Avec de telles définitions, on voit qu'on a  $E_n \circ C_n = Id_{P_n}$ . Cependant, on n'a pas de résultat similaire pour  $C_n \circ E_n$ , car l'image de  $C_n$  ne contient que des fonctions constantes par morceaux. A  $n$  fixé, le passage d'une densité macroscopique à des positions microscopiques conduit à une perte d'information.

On peut cependant montrer des réciproques partielles dans le cas où  $n$  tend vers l'infini.

## 2.2 Résultats

### **Proposition 1**

Soit  $\rho \in R_m \cap VB(\mathbb{R}, [0; 1])$  (où  $VB(\mathbb{R}, [0; 1])$  est l'ensemble des fonctions à variations bornées, note en fin de dossier) Alors :

- $C_n \circ E_n(\rho) \rightarrow \rho$  quand  $n \rightarrow \infty$  en norme  $L^1$ ,
- $C_n \circ E_n(\rho)(x) \rightarrow \rho(x)$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ .

La proposition 1 établit ainsi un lien entre les descriptions microscopique et macroscopique, par l'intermédiaire de  $E_n$  et  $C_n$ .

### **Proposition 2** (admise)

Pour tout  $m > 0$  et  $\tilde{\rho} \in R_m \cap VB(\mathbb{R}, [0; 1])$ , le problème de Cauchy (1) admet une unique solution  $\rho \in C^{0,1}(\mathbb{R}^+, R_m)$ .

### **Proposition 3**

Pour tout  $n \geq 2$  et  $\mathbf{p} \in P_n$ , le problème de Cauchy (2) a une unique solution  $\mathbf{p} \in C^1(\mathbb{R}^+, P_n)$ .

### **THEOREME 1** (Colombo-Rossi)

Soit  $T > 0$  et  $\tilde{\rho} \in R_m \cap VB(\mathbb{R}, [0; 1])$ . On pose  $\tilde{\mathbf{p}} = E_n(\tilde{\rho})$ . Soit  $\mathbf{p} : t \mapsto (p_1(t), \dots, p_{n+1}(t))$  la solution de (2) associée sur  $[0; T]$ . On pose aussi  $\rho_n = C_n(\mathbf{p}(t))$ .

S'il existe  $\rho \in L^\infty([0; T], R_m)$  tel que  $\rho_n(x, t) \rightarrow \rho(x, t)$  presque partout quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $\rho$  est solution faible de (1) avec condition initiale  $\tilde{\rho}$ .

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\rho} & \xrightarrow{E_n} & \tilde{\mathbf{p}} \\
 \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\
 \rho & \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} \rho_n \xleftarrow{C_n} & \mathbf{p}
 \end{array}$$

### 3 Simulation numérique

On peut observer en pratique la convergence indiquée par le théorème au travers de simulations numériques.

Pour cela, on considère une densité initiale macroscopique,  $\tilde{\rho}$ . On suppose que la vitesse  $v$  est ici :  $v(r) = V(1 - r)$ , avec une constante  $V > 0$ . On peut résoudre l'équation de transport macroscopique avec densité initiale  $\tilde{\rho}$ , à l'aide par exemple d'une méthode de type différences finies (décentrée amont), en posant :

$$\hat{\rho}(t + \Delta t, x) = \hat{\rho}(t, x) - (\hat{\rho}(t, x)v(\hat{\rho}(t, x + \Delta x)) - \hat{\rho}(t, x - \Delta x)v(\hat{\rho}(t, x))) \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

où  $\Delta t$  est le pas d'itération en temps, et  $\Delta x$  le pas d'itération en espace.  $\hat{\rho}$  est une approximation numérique de la solution  $\rho$  de l'équation de transport macroscopique avec densité initiale  $\tilde{\rho}$ , sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Pour que le schéma numérique de résolution de l'équation différentielle macroscopique soit consistant, il faut avoir  $\Delta t < \frac{\Delta x}{V}$ .

De plus, on choisit un nombre de voitures  $n$ . On pose  $m$  comme étant l'intégrale de  $\tilde{\rho}$ . On définit une densité microscopique initiale pour  $n$  voitures,  $\tilde{p}$ , à partir de la densité macroscopique initiale  $\tilde{\rho}$ , à l'aide de la fonction  $E_n$ . On peut alors résoudre l'équation de transport microscopique avec positions initiales  $\tilde{p}$ , selon le procédé :

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + w(p_{i+1}(t) - p_i(t))\Delta t.$$

On obtient ainsi une solution numérique de l'équation de transport microscopique sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Enfin, on peut convertir le résultat microscopique en une densité macroscopique  $\tilde{\rho}$  constante par morceaux, à l'aide de la fonction  $C_n$ .

Selon le théorème de Colombo-Rossi, la différence (en norme  $L_1$ ) entre  $\rho$  et  $\tilde{\rho}$  au temps  $T$  tend vers 0 lorsque le nombre de voitures  $n$  tend vers l'infini.

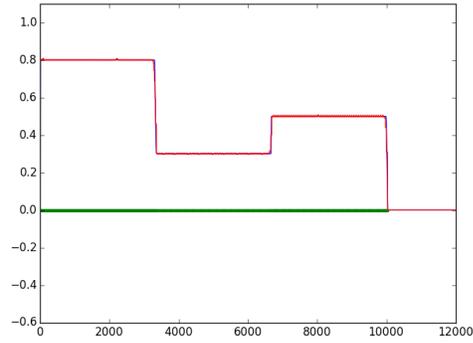
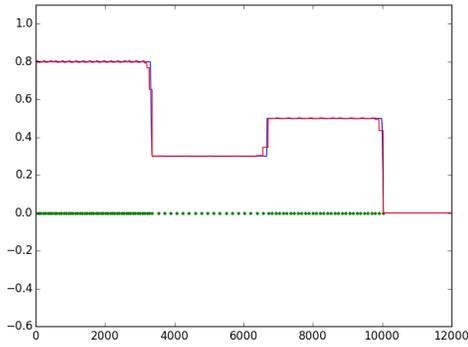
On a choisi comme paramètres :  $V = 2$ ,  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta t = 1/3$  et  $\tilde{\rho}$  constante par morceaux de valeurs successives 0.8, 0.3 et 0.5 sur une longueur 10000 en abscisse. On compare les résultats pour  $n = 100$  et  $n = 500$ , aux temps  $T = 0$ ,  $T = 1000$  et  $T = 2000$ .

Pour  $T = 0$ , on observe que la courbe macroscopique et la courbe microscopique associée sont quasiment identiques. Ensuite, au cours du temps, les courbes micro et macro suivent des progressions similaires, mais la courbe microscopique (constante par morceaux) approxime de plus en plus mal les pentes : il y a l'apparition de motifs en escaliers, de moins en moins précis au fil des itérations. On observe bien que le cas  $n = 500$  est beaucoup plus précis que le cas  $n = 100$ , et reste précis après un grand nombre d'itérations.

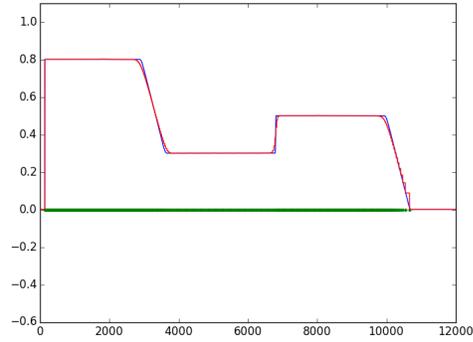
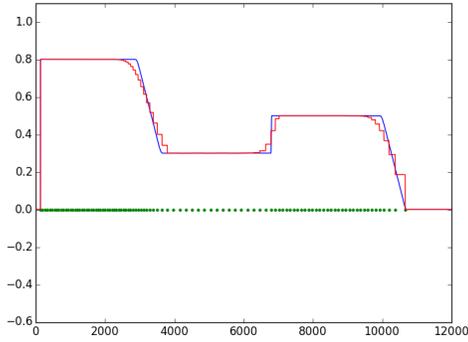
**Légende des graphes :**

La courbe rouge est la densité solution de l'équation de transport macroscopique de densité initiale  $\tilde{\rho}$ . Les points verts correspondent aux positions des différentes voitures, qui se déplacent sur l'axe des abscisses, de la gauche vers la droite. La courbe bleue est la densité macroscopique (constante par morceaux) associée aux positions des voitures.

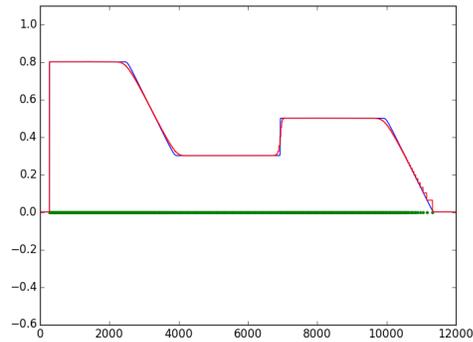
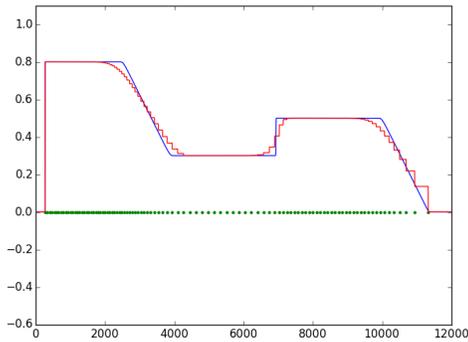
A gauche : courbes avec  $n = 100$ . A droite : courbes avec  $n = 500$ .



Courbes pour  $T = 10$



Courbes pour  $T = 1000$



Courbes pour  $T = 2000$

## 4 Preuves

Nous allons prouver ici les résultats énoncés en 2.2. (sauf la proposition 2, admise). Nous allons d'abord prouver la proposition 1, qui nécessitera trois lemmes.

On fixe  $\rho \in R_m$  et on définit (on conservera la notation par la suite) :

$$\alpha_n = C_n \circ E_n(\rho).$$

### Lemme 1

Soit  $m > 0$ ,  $n \geq 2$  et  $\rho \in R_m$ . Alors  $VT(\alpha_n) \leq VT(\rho)$  (où  $VT$  est la variation totale, note en fin de dossier).

### Preuve

On pose  $\mathbf{p} = E_n(\rho)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\alpha_n$  est constant sur  $[p_i; p_{i+1}[$ .

De plus,  $\int_{p_i}^{p_{i+1}} \rho = \int_{p_i}^{p_{i+1}} \alpha_n$ , donc on a, pour  $x \in [p_i; p_{i+1}[$  :

$$\operatorname{ess\,inf}_{[p_i; p_{i+1}[} \rho \leq \alpha_n(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{[p_i; p_{i+1}[} \rho.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} VT(\alpha_n) &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_n(p_i^+) - \alpha_n(p_i^-) \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{[p_1; p_2[} \rho + \sum_{i=2}^n (\operatorname{ess\,sup}_{[p_i; p_{i+1}[} \rho - \operatorname{ess\,inf}_{[p_{i-1}; p_i[} \rho) - \operatorname{ess\,inf}_{[p_n; p_{n+1}[} \rho \\ &= \sum_{i=1}^n (\operatorname{ess\,sup}_{[p_i; p_{i+1}[} \rho - \operatorname{ess\,inf}_{[p_i; p_{i+1}[} \rho) \\ &\leq VT(\rho). \end{aligned}$$

■

### Lemme 2

Soit  $m > 0$ ,  $\rho \in R_m$  et  $E \subset \mathbb{R}$  mesurable de mesure finie. On a alors :

$$\int_E \alpha_n \rightarrow \int_E \rho \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

### Preuve

Supposons le résultat vrai dans le cas où  $E$  est un intervalle ouvert.

Alors comme tout ouvert de  $\mathbb{R}$  peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles ouverts, le résultat s'étend aux ouverts de mesure finie de  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\mathbb{R}$  est de plus extérieurement régulier pour la mesure de Lebesgue, le résultat s'étend des ouverts de mesure finie aux parties mesurables de mesure finie. Ainsi, il suffit de montrer le résultat dans le cas où  $E = ]a; b[$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On suppose donc  $E = ]a; b[$ ,  $a < b$ . Soit  $n \geq 2$ . On pose  $\mathbf{p} = E_n(\rho)$ . On pose pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$I(x) = \int_{-\infty}^x \rho \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_{-\infty}^x \alpha_n.$$

Ces deux fonctions sont croissantes et s'annulent en  $p_1$ . De plus pour tout  $i$ ,

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} \rho = \int_{p_i}^{p_{i+1}} \alpha_n = l_n.$$

On en déduit que  $I(p_i) = I_n(p_i) = il_n$  pour tout  $i$ , et, par croissance de ces deux fonctions, qu'elles sont  $l_n$ -proches en norme infinie. On a finalement :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \alpha_n - \int_a^b \rho \right| &= |I_n(b) - I_n(a) - I(b) + I(a)| \\ &\leq |I_n(b) - I(b)| + |I(a) - I_n(a)| \\ &\leq 2l_n = 2\frac{m}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

### Lemme 3

Soit  $m > 0$  et  $\rho \in R_m$ . On pose  $K = \text{Support}(\rho)$ .

Alors  $\alpha_n \rightarrow \rho$  faiblement quand  $n \rightarrow \infty$  dans  $L^1(K, \mathbb{R})$  (et donc dans  $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ).

### Preuve

Soit  $\phi \in L^\infty(K, \mathbb{R})$  et  $h$  entier naturel non nul "grand" (que l'on va faire tendre vers l'infini).

On pose

$$E_{i,h} = \phi^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{h} \|\phi\|_\infty ; \frac{i}{h} \|\phi\|_\infty\right]\right)$$

et

$$\phi_h = \sum_{i=1-h}^{1+h} \frac{i}{h} \|\phi\|_\infty \mathbf{1}_{E_{i,h}}.$$

Les  $E_{i,h}$  sont de mesure finis (car inclus dans  $K$ ) et à  $h$  fixé sont deux à deux disjoints. De plus si  $l(K)$  désigne la mesure de  $K$ , on a par définition de  $\phi_h$  :

$$\|\phi - \phi_h\|_{L^1} \leq l(K) \frac{\|\phi\|_\infty}{h}.$$

Soit  $\epsilon > 0$  et  $h$  tel que  $\|\phi - \phi_h\|_{L^1} < \epsilon$ . Le lemme 2 nous permet de choisir un entier  $N$  tel que pour  $n > N$ , on ait :

$$\left| \int_{E_{i,h}} \rho - \int_{E_{i,h}} \alpha_n \right| < \epsilon.$$

On a donc pour  $n > N$  :

$$\begin{aligned}
& \left| \int \alpha_n \phi - \int \rho \phi \right| \\
& \leq \left| \int \alpha_n \phi - \int \alpha_n \phi_h \right| + \left| \int \alpha_n \phi_h - \int \rho \phi_h \right| + \left| \int \rho \phi_h - \int \rho \phi \right| \\
& \leq \|\alpha_n\|_\infty \|\phi - \phi_h\|_{L^1} + \left| \int \phi_h (\alpha_n - \rho) \right| + \|\rho\|_\infty \|\phi - \phi_h\|_{L^1} \\
& \leq 2\epsilon + \left| \sum_{i=1-h}^{1+h} \frac{i}{h} \|\phi\|_\infty \int_{E_{i,h}} (\alpha_n - \rho) \right| \\
& \leq 2\epsilon + \sum_{i=1-h}^{1+h} \left| \frac{i}{h} \right| \|\phi\|_\infty \frac{\epsilon}{h} \\
& = \epsilon \left( 2 + \frac{1}{h^2} (1 + h + h^2) \|\phi\|_\infty \right) \\
& \leq \epsilon (2 + 3 \|\phi\|_\infty).
\end{aligned}$$

L'arbitraire sur  $\phi$  et  $\epsilon$  permet de conclure. ■

Démontrons à présent la proposition 1 :

### Preuve

Supposons par l'absurde que  $\alpha_n$  ne converge pas fortement en norme  $L^1$  vers  $\rho$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors il existe  $\phi$  extraction et  $\epsilon > 0$  tels que  $\|\rho - \alpha_{\phi(n)}\|_{L^1} > \epsilon$  pour tout  $n$ . De plus, d'après le lemme 1 les  $\alpha_{\phi(n)}$  sont à variations uniformément bornées.

D'après le théorème de sélection de Helly (note en fin de dossier), il existe alors  $\alpha_\infty$  à variation bornée telle que, quitte à extraire à nouveau,  $\alpha_{\phi(n)} \rightarrow \alpha_\infty$  simplement lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Les  $\alpha_{\phi(n)}$  étant des fonctions mesurables, leur limite  $\alpha_\infty$  est aussi mesurable. De même,  $\alpha_\infty$  est à valeurs dans  $[0; 1]$ . Enfin, comme le support de chaque  $\alpha_{\phi(n)}$  est inclus dans le support de  $\rho$ , lui-même compact, il en est de même pour  $\alpha_\infty$ .  $\alpha_\infty$  étant mesurable, bornée et à support compact, elle est automatiquement  $L^1$ .

D'après le théorème de convergence dominée, la convergence des  $\alpha_{\phi(n)}$  vers  $\alpha_\infty$  est, en plus d'être simple, vraie en norme  $L^1$ . D'après le lemme 3, la suite pleine (sans extraction) des  $\alpha_n$  converge faiblement en norme  $L^1$  vers  $\rho$ . Il en est de même pour ses extractions. Ainsi, comme la convergence forte implique la convergence faible,  $\alpha_\infty = \rho$ , ce qui contredit le choix de la première suite extraite.

On a donc pu conclure pour ce qui est de la norme  $L^1$ , mais pas encore pour la convergence simple presque partout. Montrons maintenant ce dernier point. Par définition de  $\alpha_n = C_n \circ E_n(\rho)$ ,  $\alpha_n$  converge vers  $\rho$  en tous les points de continuité

de  $\rho$ , or  $\rho$  est à variations bornées, donc a un nombre au plus dénombrable (donc Lebesgue-négligeable) de points de discontinuité.

Ainsi  $\alpha_n(x) \rightarrow \rho(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . La preuve de la proposition 1 est achevée. ■

On démontre la proposition 3 :

**Preuve**

On prolonge  $v$  en une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  qui est nulle au-delà de 1. Quitte à changer légèrement  $v$ , (en pratique c'est un comportement rentré dans un ordinateur par un humain), on peut supposer que  $u$  est  $C^1$  sur tout  $\mathbb{R}^+$ , même en 1. La fonction  $\delta \mapsto u(l_n/\delta)$  peut ainsi être prolongée en une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soient  $n \geq 2$  et  $\mathbf{p} \in P_n$ . On peut considérer le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v\left(\frac{l_n}{p_{i+1}-p_i}\right) & i = 1 \dots n \\ \dot{p}_{n+1} = V \\ p_i(0) = \tilde{p}_i & i = 1 \dots n + 1. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy étant bien posé, il possède une unique solution maximale  $\mathbf{p}$  définie sur un intervalle maximal  $[0; T^+]$ .

On souhaite prouver que pour tout  $t \geq 0$ , et  $i$ ,  $p_{i+1} - p_i \geq l_n$ . Supposons le contraire : il existe alors  $t_1$  et  $t_2$  tels que :

$t_1 < t_2$ ,  $p_{i+1}(t_1) - p_i(t_1) = l_n$  et  $p_{i+1}(t) - p_i(t) < l_n$  pour  $t_1 < t \leq t_2$ .

Alors, pour  $t_1 < t \leq t_2$ ,

$$p_i(t_2) = p_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i = p_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u\left(\frac{l_n}{p_{i+1} - p_i}\right) = p_i(t_1),$$

ce qui est absurde.

De plus, comme  $u$  est bornée, on a  $T^+ = +\infty$  : la solution est donc globale. ■

On peut désormais démontrer le théorème de Colombo-Rossi :

**Preuve**

On pose  $\Delta = \max \text{spt}(\rho) - \min \text{spt}(\rho)$ . Soit  $\phi \in C_c^\infty([-\infty; T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On veut montrer que :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho \partial_t \phi + f(\rho) \partial_x \phi + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

Pour cela on va approcher  $\rho$  par  $\rho_n$ . On pose pour  $n \geq 2$  :

$$I_n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_n \partial_t \phi dx dt + f(\rho_n) \partial_x \phi + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(x) \phi(0, x) dx.$$

Montrons que  $I_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Par définition de  $\rho_n$  :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{l_n}{p_{i+1}(t) - p_i(t)} \int_{p_i(t)}^{p_{i+1}(t)} \partial_t \phi + v \left( \frac{l_n}{p_{i+1}(t) - p_i(t)} \right) dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \rho_n(0, x) \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{l_n}{p_{i+1}(t) - p_i(t)} \int_{p_i(t)}^{p_{i+1}(t)} \partial_t \phi(t, x) + \dot{p}_i(t) \partial_x \phi(t, x) dx dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i} \int_{\tilde{p}_i}^{\tilde{p}_{i+1}} \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx. \end{aligned}$$

On a maintenant envie d'approximer  $\phi(t, x)$  par  $\phi(t, p_i(t))$  quand  $x \in [p_i(t); p_{i+1}(t)]$ . Utilisons la norme  $C^2$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &\left| \partial_t \phi(t, x) + \dot{p}_i \partial_x \phi(t, x) - \frac{d}{dt} \phi(t, p_i(t)) \right| \\ &\leq |\partial_t \phi(t, x) - \partial_t \phi(t, p_i(t)) + \dot{p}_i \partial_x \phi(t, x) - \dot{p}_i \partial_x \phi(t, p_i(t))| \\ &\leq (1 + V) \|\phi\|_{C^2} |p_{i+1}(t) - p_i(t)|. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\partial_t \phi(t, x) + \dot{p}_i \partial_x \phi(t, x) = \frac{d}{dt} \phi(t, p_i(t)) + O(1)(p_{i+1}(t) - p_i(t)),$$

où  $O(1)$  est borné par  $(1 + V) \|\phi\|_{C^2}$ , constante ne dépendant ni de  $p_i(t)$  ni de  $n$ , ni de  $t$  (il pourra bouger un peu dans la suite de la preuve mais restera en dessous de cette constante).

On a alors :

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{l_n}{p_{i+1}(t) - p_i(t)} \int_{p_i(t)}^{p_{i+1}(t)} \frac{d}{dt} \phi(t, p_i(t)) dx dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{l_n}{p_{i+1}(t) - p_i(t)} \int_{p_i(t)}^{p_{i+1}(t)} O(1)(p_{i+1}(t) - p_i(t)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i} \int_{\tilde{p}_i}^{\tilde{p}_{i+1}} \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx \\
&= l_n \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{d}{dt} \phi(t, p_i(t)) dt + l_n \sum_{i=1}^n \int_0^T O(1)(p_{i+1}(t) - p_i(t)) dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i} \int_{\tilde{p}_i}^{\tilde{p}_{i+1}} \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx \\
&= -l_n \sum_{i=1}^n \phi(0, \tilde{p}_i) + O(1) l_n \int_0^T (p_{i+1}(t) - p_1(t)) dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i} \int_{\tilde{p}_i}^{\tilde{p}_{i+1}} \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{l_n}{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i} \int_{\tilde{p}_i}^{\tilde{p}_{i+1}} (\phi(0, x) - \phi(0, \tilde{p}_i)) dx + O(1) l_n (\Delta + VT) T \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx \\
&= O(1) l_n \Delta + O(1) l_n (\Delta + VT) T + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{\rho}(x) - \rho_n(0, x)) \phi(0, x) dx.
\end{aligned}$$

Maintenant les calculs sont terminés, il reste quelques remarques à faire pour conclure.

D'une part  $\rho_n(0, x) = \tilde{\rho}_n(x)$ , donc d'après la proposition 1,  $\tilde{\rho}_n = C_n \circ E_n(\tilde{\rho}) \rightarrow \tilde{\rho}$  en norme  $L^1$ . Comme de plus par définition  $l_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $I_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

D'autre part, d'après la proposition 3, pour tout  $t \in [0; T]$  et  $i$ ,  $p_{i+1}(t) - p_i(t) \geq l_n$ , donc par définition de  $C_n$ ,  $\rho_n$  est à valeurs dans  $[0; 1]$ , pour tout  $n$ . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à  $I_n$  :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_n \partial_t \phi + f(\rho_n) \partial_x \phi + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(x) \phi(0, x) dx \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho \partial_t \phi + f(\rho) \partial_x \phi + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(x) \phi(0, x) dx,$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

La combinaison de ces deux parts prouve le théorème de Colombo-Rossi. ■

## 5 Notes

**Définition** (Variation totale et fonctions à variation bornée)

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On définit, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_f(x) \in [0; +\infty]$  par :

$$T_f(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})|; N \in \mathbb{N}^*, -\infty < x_0 < \dots < x_N = x \right\}.$$

$T_f$  est une application croissante.

Si  $T_f$  est bornée, on dit que  $f$  est à variation bornée. Dans ce cas, on note  $f \in VB([a; b], \mathbb{R})$  et

$$VT(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} T_f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_f(x).$$

**Théorème** (Théorème de sélection de Helly)

Soit  $(\alpha_n)$  une suite de fonctions définies de  $[a; b]$  dans  $[0; 1]$ , à variations uniformément bornées.

Alors on peut extraire de  $(\alpha_n)$  une sous-suite qui converge vers une fonction à variation bornée.

## Références

- [1] A. Bressan. *Hyperbolic systems of conservation laws, volume 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*.
- [2] R.M Colombo and E. Rossi. *On the micro-macro limit in traffic flow*, 2014.
- [3] M. Di Francesco and M.D. Rosini. *Rigorous derivation of nonlinear scalar conservation laws from follow-the-leader type models via many particle limit*, 2015.
- [4] B. Maury. *Modélisation, cours de M1, Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2016.