

# De l'espace de Teichmüller des surfaces\*

Guillaume Brunerie      Samuel Bach

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Classification des surfaces</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Classification des surfaces compactes connexes orientables . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Le demi-plan de Poincaré</b>	<b>10</b>
2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	10
2.2	Aire hyperbolique . . . . .	17
2.3	Classification des hexagones hyperboliques marqués à angles droits .	21
<b>3</b>	<b>Variétés hyperboliques et espace de Teichmüller</b>	<b>26</b>
3.1	Définitions . . . . .	26
3.2	Résultats préliminaires . . . . .	27
3.2.1	Homotopie, isotopie et géodésiques . . . . .	27
3.2.2	Nombres d'intersection . . . . .	29
3.2.3	Revêtements . . . . .	29
3.2.4	Application développante . . . . .	30
3.2.5	Difféomorphismes du pantalon . . . . .	33
3.3	Pantalons hyperboliques . . . . .	37
3.4	Espace de Teichmüller de la surface de genre $g$ . . . . .	39

---

\*Exposé proposé par Frédéric Paulin

# Introduction

Avec la récente résolution de la conjecture de Poincaré et de la conjecture de géométrisation par Grigori Perelman, la classification des variétés topologiques de dimension 3 a fait un grand pas en avant. Actuellement, il n'y a cependant qu'en dimensions 0, 1 et 2 que l'on sait entièrement classer les variétés.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire aux surfaces (plus précisément aux surfaces compactes, connexes et orientables), et nous commencerons par démontrer le théorème de classification des surfaces à homéomorphisme près dans la première partie. Pour pouvoir ensuite étudier le groupe des homéomorphismes d'une surface donnée (ce qui est très utile pour la classification des variétés de dimension 3), une approche très fructueuse et qui remonte au moins à Poincaré et Dehn est d'utiliser de la géométrie hyperbolique sur ces surfaces. En deuxième partie, nous définirons donc ce qu'est la géométrie hyperbolique et nous démontrerons quelques théorèmes utiles de géométrie hyperbolique. Enfin, en troisième partie nous étudierons l'espace de toutes les structures hyperboliques dont on peut munir une surface (appelé *espace de Teichmüller*).

Nous remercions Frédéric Paulin pour ses nombreux et précieux conseils ainsi que pour son implication dans ce travail, qui nous a beaucoup apporté tant sur le plan mathématique que pour l'amélioration de la qualité de la rédaction.

## 1 Classification des surfaces

Dans cette partie, nous énoncerons et démontrerons le théorème de classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables. Nous admettrons certains résultats techniques nécessaires pour la démonstration.

### 1.1 Définitions

Commençons par préciser ce que nous entendons par *surface*. Nous noterons  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ .

**Définition 1.1.** *Une variété topologique de dimension 2 à bord est un espace topologique séparé, à base dénombrable de voisinages, et dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .*

*Un atlas sur une telle variété  $S$  est la donnée d'une famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  recouvrant  $S$ , d'une famille d'ouverts  $(V_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  et d'une famille d'homéomorphismes  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  tels que les applications  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  (appelées applications de changement de cartes) soient des*

*difféomorphismes (c'est-à-dire sont restrictions de difféomorphismes entre ouverts de  $\mathbb{R}^2$ ). Il est dit orienté si de plus les changements de cartes ont un jacobien strictement positif en tout point.*

*Une variété différentiable de dimension 2 à bord est une variété topologique de dimension 2 à bord munie d'un atlas, maximal pour l'inclusion. Elle est dite orientable si son atlas contient un atlas orienté, et orientée si elle est munie d'un atlas orienté contenu dans son atlas, maximal parmi les atlas orientés.*

Travailler directement avec un atlas de cartes n'est pas facile, c'est pourquoi nous introduisons les recollements de polygones, qui permettent de donner une description combinatoire des surfaces.

**Définition 1.2.** *Un recollement de polygones est la donnée d'une famille finie de polygones réguliers de  $\mathbb{R}^2$ , d'une orientation de chacun des côtés des polygones, ainsi qu'une application involutive de l'ensemble des côtés des polygones.*

Par abus, nous appellerons encore *recollement de polygones* l'espace topologique obtenu en quotientant la réunion disjointe des polygones par la relation d'équivalence engendrée par les applications affines identifiant les côtés appareillés et respectant l'orientation. En particulier, les points fixes de l'involution sont des côtés qui ne seront pas recollés.

Graphiquement, le recollement sera représenté par des flèches sur les côtés à recoller, l'orientation étant donnée par le sens des flèches, et l'absence de flèche correspond à un côté non recollé.

On remarque qu'un recollement de polygones est une variété topologique (à bord) et peut être munie d'une structure différentielle :

- c'est un espace topologique séparé car la relation d'équivalence par laquelle on quotiente est de graphe fermé
- c'est un espace topologique à base dénombrable d'ouverts car il est séparable et localement homéomorphe à  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  (cf point suivant)
- on le munit d'un atlas de cartes de la façon suivante (cf figure 1) :
  - pour les points à l'intérieur d'un polygone, la carte est une translation sur un disque inclus dans l'intérieur du polygone
  - pour les points sur un côté non recollé, la carte est la restriction à un demi-disque d'une application affine de  $\mathbb{R}^2$  envoyant le côté sur le bord de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  et le demi-disque dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$
  - pour les points sur un côté recollé, la carte est le recollement de deux applications affines sur des demi-disques de même taille
  - pour les points sur un sommet, on considère des secteurs angulaires voisinages de chacun des représentants et on dilate les angles par le même coefficient afin que la somme des angles d'ouverture vaille  $180^\circ$  ou  $360^\circ$  selon le cas

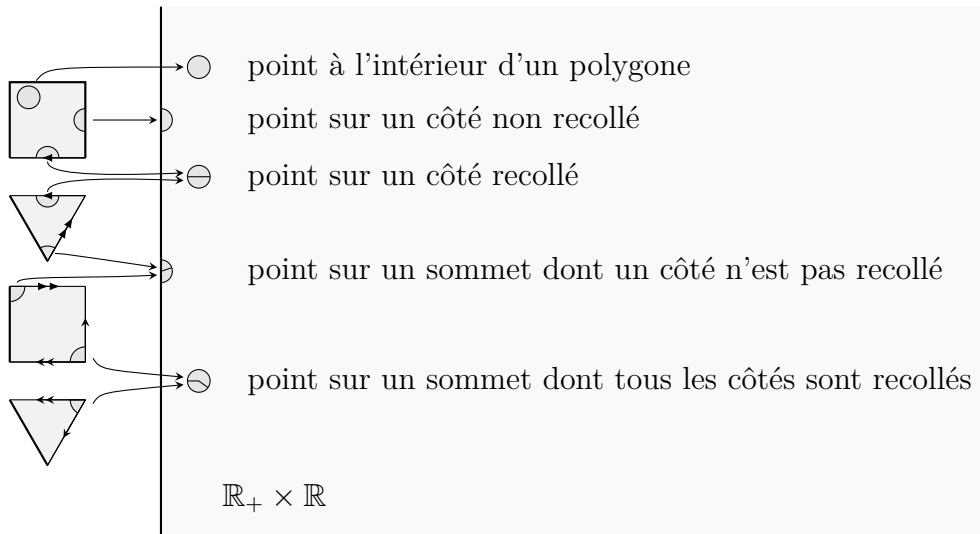


FIGURE 1 – Structure différentielle sur un recollement de polygones.

On vérifie qu’il s’agit bien d’un atlas : le seul cas non trivial est le changement de cartes entre une carte au voisinage d’un sommet et une carte au voisinage d’un point d’un bord recollé. Le changement de cartes est bien un difféomorphisme dans ce cas car on a multiplié les angles des points des deux voisinages du sommet par la même valeur.

Il se trouve qu’étudier les recollements de polygones suffit pour étudier toutes les surfaces topologiques.

**Théorème 1.3** (Tibor Radó, 1925). *Toute surface topologique à bord compacte connexe est homéomorphe à un recollement de polygones.*

En ce qui concerne les variétés différentielles, on a un résultat similaire qui découle du résultat suivant

**Théorème 1.4.** *Deux structures différentielles sur une même surface topologique sont difféomorphes (c’est-à-dire qu’il existe un homéomorphisme de la surface envoyant un atlas sur l’autre).*

On pourra se référer à [Moi77, théorème 3, page 60] pour une démonstration du premier résultat et à [Mun60, théorème 6.3] pour le second. Ceci nous permet d’identifier complètement variétés topologiques et variétés différentielles.

Un outil important de construction de surfaces est la somme connexe, que nous définissons maintenant.

**Définition 1.5.** Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces connexes, on définit une somme connexe de  $S$  et  $S'$ , notée  $S\#S'$ , de la façon suivante.

Soient  $D$  et  $D'$  deux disques fermés plongés dans  $S$  et  $S'$  respectivement (c'est-à-dire qu'il existe deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  telles que  $D \subset U$ ,  $D' \subset U'$  et que  $\varphi(D)$  et  $\varphi'(D')$  soient des disques fermés). On pose alors

$$S\#S' = (S \setminus \overset{\circ}{D}) \sqcup_f (S' \setminus \overset{\circ}{D}')$$

où  $f$  est un homéomorphisme de  $\partial D$  sur  $\partial D'$ .

On peut montrer que toutes les sommes connexes de deux surfaces (connexes) sont homéomorphes et que l'opération de somme connexe est associative à homéomorphisme près, voir par exemple [Thu97, pages 28 et 29] pour une démonstration.

On notera enfin, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^{\#n}$  une somme connexe de  $n$  copies de  $S$ , soit  $S^{\#0} = \mathbb{S}_2$  la sphère de dimension 2 et  $S^{\#(n+1)} = S^{\#n} \# S$ . Le tore de dimension 2 sera noté  $\mathbb{T}$ .

## 1.2 Classification des surfaces compactes connexes orientables

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant

**Théorème 1.6** (Classification des surfaces compactes connexes orientables). *Soit  $S$  une surface (à bord) compacte connexe orientable. Alors il existe une unique paire d'entiers naturels  $(g, n) \in \mathbb{N}^2$  telle que*

$$S \cong \mathbb{T}^{\#g} \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i$$

où les  $D_i$  sont les intérieurs de disques fermés deux à deux disjoints plongés dans  $S$ .

L'entier  $g$  est appelé le genre de  $S$  et  $n$  est le nombre de composantes de bord et on note toute telle surface  $\Sigma_{g,n}$ .

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord qu'enlever un disque ouvert à une surface revient à faire une somme connexe de cette surface avec un disque donc les  $\Sigma_{g,n}$  sont bien définies, car on a admis que les sommes connexes étaient bien définies.

D'après le théorème 1.3, on sait que  $S$  est homéomorphe à un recollement de polygones. Montrons que  $S$  est de la forme  $\Sigma_{g,n}$  par récurrence sur le nombre de polygones.

S'il y a au moins deux polygones, on peut se ramener à un cas plus simple. En effet, tout recollement connexe de  $n + 1 \geq 2$  polygones est homéomorphe au

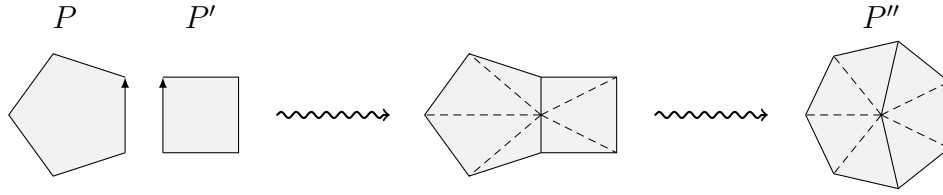


FIGURE 2 – Fusion de deux polygones afin de se ramener au recollement d'un seul polygone





recollement de  $n$  polygones : soit  $P$  et  $P'$  deux polygones distincts recollés selon un côté (cela existe par connexité de  $S$ ) ; on peut alors « fusionner »  $P$  et  $P'$  de la façon indiquée sur la figure 2 et obtenir ainsi un recollement de  $n$  polygones. Plus précisément, cela signifie que l'on considère l'application

$$\begin{cases} P \sqcup P' \sqcup \sqcup_i P_i & \longrightarrow & P'' \sqcup \sqcup_i P_i \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in P \sqcup P' \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où  $\varphi : P \sqcup P' \rightarrow P''$  est l'application affine par morceaux représentée (il existe une unique application affine envoyant un triangle dont les sommets sont distingués sur un autre). Cette application passe au quotient en un homéomorphisme.

Considérons donc le cas du recollement d'un seul polygone, qu'on suppose en outre privé d'un nombre fini  $n$  de disques ouverts d'adhérences disjointes, et procédons par récurrence sur le nombre de côtés (qui est supérieur ou égal à 3). Le recollement est orientable car homéomorphe à la variété de départ (et donc difféomorphe), ce qui implique que si l'on oriente tous les côtés du polygone dans le sens trigonométrique, deux côtés recollés entre eux auront des orientations opposées. En effet, dans le cas contraire les deux côtés en question borderaient un ruban de Möbius ce qui donnerait un atlas orienté sur le ruban de Möbius par restriction de l'atlas orienté de  $S$ , mais c'est impossible car le ruban de Möbius n'est pas orientable.

Étudions les cas des polygones à 3 ou 4 côtés (sans démonstration, on laisse au lecteur le soin d'explicitier les homéomorphismes et de vérifier qu'aucun cas n'a été oublié, s'il n'est pas convaincu) :

-  donne  $\Sigma_{0,n+1}$  (un disque fermé si  $n = 0$ )
-  donne  $\Sigma_{0,n+1}$
-  donne  $\Sigma_{0,n+1}$
-  donne  $\Sigma_{0,n+1}$

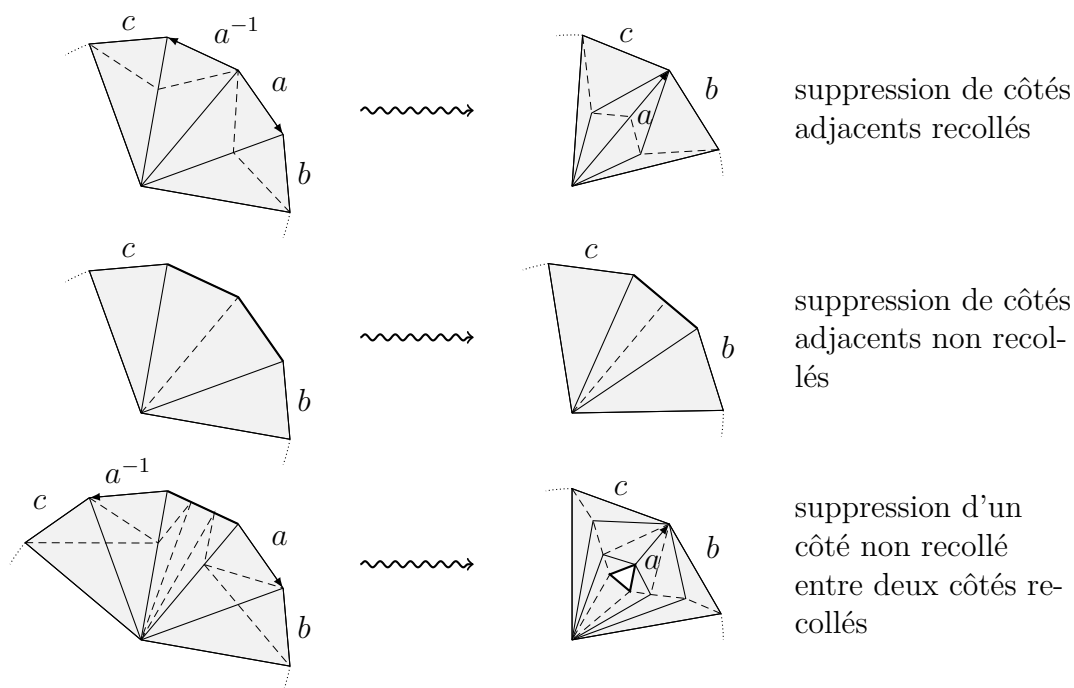





FIGURE 3 – Suppression de côtés dans les cas simples, par des applications affines par morceaux

-  donne  $\Sigma_{0,n+2}$  (un cylindre si  $n = 0$ )
-  donne  $\Sigma_{0,n}$  (une sphère si  $n = 0$ )
-  donne  $\Sigma_{1,n}$  (un tore si  $n = 0$ )

On considère désormais que le polygone possède au moins cinq côtés. Si deux côtés successifs sont recollés entre eux, si deux côtés successifs ne sont pas recollés, ou si trois côtés successifs sont tels que celui du centre n'est pas recollé et les deux autres sont recollés entre eux, on se ramène à un polygone ayant strictement moins de côtés (cf figure 3).

Si aucun des cas ci-dessus ne se présente, on peut trouver quatre côtés  $a$ ,  $b$ ,  $a^{-1}$ ,  $b^{-1}$  du polygone, ordonnés cycliquement dans cet ordre sur le polygone (sans être nécessairement adjacents), et tels que  $a$  et  $a^{-1}$  sont recollés et de même pour  $b$  et  $b^{-1}$  (prendre pour  $a$  et  $a^{-1}$  les deux côtés recollés les plus proches, et choisir  $b$  entre les deux). Une succession de deux découpages et recollements comme indiqué sur la figure 4 permet de se ramener au cas où ils sont adjacents (avant chaque recollement, on déplace les trous afin qu'ils ne gênent pas les découpages, et après chaque recollement, on fait des applications affines par morceaux pour se ramener

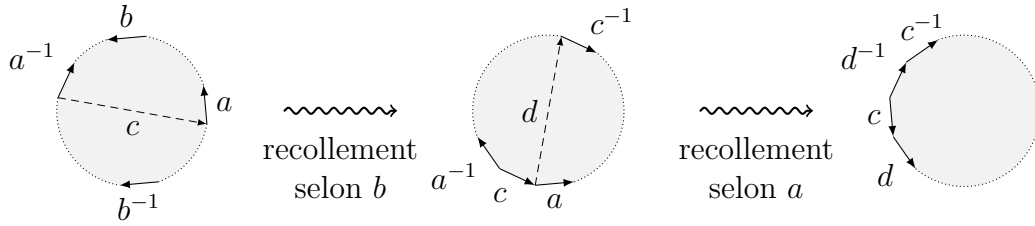


FIGURE 4 – Découpages pour se ramener à des côtés recollés adjacents

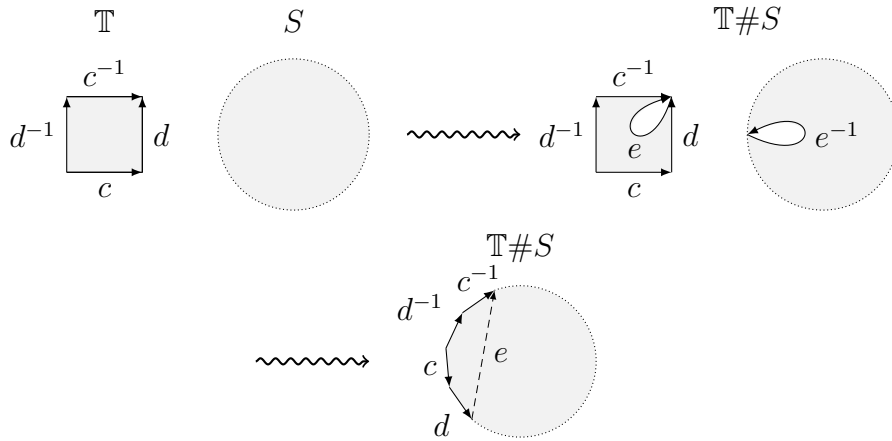


FIGURE 5 – Somme connexe d'un tore avec une surface plus simple

à nouveau à des polygones réguliers).

La figure 5 montre alors qu'il s'agit d'une somme connexe d'un tore avec un recollement d'un polygone ayant quatre côtés de moins, ce qui montre l'existence dans le théorème de classification.

L'entier  $n$  est unique car égal au nombre de composantes connexes du bord de  $S$  (où le *bord* de  $S$  est défini comme étant l'ensemble des points de  $S$  n'ayant pas de voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ). Pour montrer l'unicité de l'entier  $g$ , on introduit la caractéristique d'Euler d'un recollement de polygones :

**Définition 1.7.** La caractéristique d'Euler d'un recollement de polygones  $P$  est égale à  $\chi(P) = F - A + S$  où

- $F$  est le nombre de polygones
- $A$  est le nombre d'arêtes après recollement (c'est à dire le nombre d'arêtes non recollées plus la moitié du nombre d'arêtes recollées)
- $S$  est le nombre de sommets après recollement (c'est à dire le cardinal de l'image de l'ensemble des sommets des polygones dans le recollement)



On peut montrer (cf [Thu97], proposition 1.3.10, page 25) que deux recollements de polygones homéomorphes ont la même caractéristique d'Euler, donc on peut définir la caractéristique d'Euler d'une surface  $S$  comme étant la caractéristique d'Euler de n'importe quel recollement de polygones homéomorphe à  $S$ .

Supprimer un disque ouvert d'une surface diminue sa caractéristique d'Euler de 1, car cela revient à supprimer un polygone, et recoller deux surfaces selon un bord homéomorphe à un cercle ajoute les caractéristiques d'Euler respectives des deux surfaces, car on supprime le même nombre d'arêtes et de sommets. En particulier, pour  $S$  et  $S'$  deux surfaces connexes, on a  $\chi(S\#S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$ .

On peut montrer alors par récurrence sur  $g$  que  $\chi(\Sigma_{g,n}) = 2 - 2g - n$  : d'une part

$$\chi(\Sigma_{0,n}) = \chi(\Sigma_0) - n = \chi(\mathbb{S}_2) - n = 2 - n$$

et d'autre part

$$\chi(\Sigma_{g+1,n}) = \chi(\Sigma_{g+1}) - n = \chi(\Sigma_g) + \chi(\mathbb{T}) - 2 - n = 2 - 2g - 2 - n = 2 - 2(g+1) - n$$

en utilisant le fait que  $\chi(\mathbb{T}) = 0$  et  $\chi(\mathbb{S}_2) = 2$  comme cela se vérifie facilement sur les recollements de polygones donnés plus haut.

Ainsi  $\Sigma_{g,n}$  et  $\Sigma_{g',n'}$  ne sont homéomorphes que si  $g = g'$  et  $n = n'$ , ce qui termine la démonstration du théorème de classification des surfaces.  $\square$

## 2 Le demi-plan de Poincaré

### 2.1 Définition et premières propriétés

Soit  $X$  un espace topologique.

On appelle *chemin d'extrémités  $x$  et  $y$*  une fonction continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  telle que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ . On appelle *chemin ouvert* une fonction continue  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow X$ . Un *sous-chemin* d'un chemin  $\gamma$  est la restriction de  $\gamma$  à un intervalle fermé inclus dans l'intervalle de définition. On précisera  $C^1$  *par morceaux* si  $X$  est une variété  $C^1$  et si la fonction est  $C^1$  par morceaux.

Le *demi-plan de Poincaré*  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est la variété différentielle  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$  munie, en tout point  $z$ , du produit scalaire

$$ds_{hyp}^2 = \frac{ds_{eucl}^2}{\text{Im}(z)^2}$$

où  $ds_{eucl}$  est le produit scalaire euclidien usuelle.

La *longueur hyperbolique* d'un chemin  $C^1$  par morceaux  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est défini comme :

$$\text{long}_1(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt$$

La distance hyperbolique  $d$  entre deux points est définie comme la borne inférieure des longueurs hyperboliques des chemins continus,  $C^1$  par morceaux, reliant ces deux points.

On note  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  muni de la topologie induite. On appelle *bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$*  l'espace topologique  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} \setminus \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et on appelle *longueur  $C^1$*  la longueur définie ci-dessus.

La fonction  $d : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow [0, +\infty[$  définie ci-dessus est bien une distance, car elle est clairement symétrique, vérifie l'inégalité triangulaire par concaténation des chemins, et possède la propriété de séparation. En effet, si  $x \neq y$ , il existe une boule euclidienne  $B$  de rayon  $r > 0$  suffisamment petit, d'adhérence contenue dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , centrée en  $x$  telle que tout chemin de  $x$  à  $y$  intersecte la frontière de  $B$  au moins une fois, donc par définition de la distance, une minoration simple de l'intégrale donne

$$d(x, y) \geq \frac{r}{\sup\{\text{Im}(z), z \in B\}} > 0$$

Par définition, la longueur  $C^1$  d'un chemin est supérieure ou égale à la distance entre ses extrémités.

La distance entre deux points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  étant définie, on peut définir la *longueur* (hyperbolique) d'un chemin (éventuellement infinie) :

$$\text{long}_{hyp}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})), 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1 \right\}.$$

C'est une conséquence facile des définitions que  $\text{long}_{hyp}(\gamma) \leq \text{long}_1(\gamma)$ . On peut montrer que pour un chemin  $C^1$  par morceaux, la longueur et la longueur  $C^1$  coïncident, mais la preuve est fastidieuse, et nous ne nous servons que de l'inégalité ci-dessus. En prenant la subdivision triviale, on a par définition que la longueur d'un chemin est supérieure ou égale à la distance entre ses extrémités.

Un *segment géodésique* est un chemin  $\gamma$  tel que

$$\forall t, t' \in [a, b], d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t' - t|.$$

Il résulte de la définition que si  $\gamma$  est géodésique d'extrémités  $x$  et  $y$ , alors

$$\text{long}(\gamma) = d(x, y).$$

Une droite géodésique est un chemin ouvert tel que tous ses sous-chemins soient des segments géodésiques, et qui n'est pas prolongeable par continuité.

Une géodésique désignera dans la suite une droite géodésique, ou l'adhérence d'une géodésique dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . On pourra préciser « géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  » pour faire la distinction.

Dans la suite, on confondra une géodésique et son image, et de même pour les chemins géodésiques, étant donné que tous les reparamétrages géodésiques d'une géodésique correspondent à des isométries de  $\mathbb{R}$  appliquées à l'intervalle de définition, et que nous préciserons leur orientation lorsque nécessaire.

On note  $\text{Geo}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  l'ensemble des demi-cercles centrés sur  $\mathbb{R}$  et des demi-droites verticales inclus dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

On note  $H(\mathbb{R})$  le groupe des homographies à coefficients réels de déterminant 1 :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels tels que  $ad - bc = 1$ . L'application de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  dans  $H(\mathbb{R})$  qui à une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  associe l'homographie  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  est un morphisme de groupes surjectif de noyau  $\{\pm Id\}$ , comme un simple calcul permet de le vérifier.

En particulier,  $H(\mathbb{R})$  est isomorphe à  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm Id\}$ , et par la suite,  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  sera identifié à  $H(\mathbb{R})$ . On note  $\text{Isom}_+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  préservant l'orientation, et  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

**Proposition 2.1** (Géodésiques et isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ). *L'ensemble des géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est  $\text{Geo}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ .*

*Si  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $d(ai, bi) = |\ln(\frac{b}{a})|$ .*

*Le groupe  $\text{Isom}_+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  est  $H(\mathbb{R})$ .*

*Il agit transitivement sur les couples de points à distance 1.*

*$z \mapsto -\bar{z}$  est une isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  renversant l'orientation, qui engendre avec  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ .*

*Démonstration.* Montrons que  $H(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ . Si  $a, b, c$ , et  $d$  sont réels et  $ad - bc = 1$ ,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + (ad + bc)\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

En particulier, si  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  alors

$$\text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0,$$

donc  $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , donc les homographies de  $H(\mathbb{R})$  sont bien définies de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Si  $\gamma$  est un chemin  $C^1$ , calculons la longueur  $C^1$  de son image par une telle homographie :

$$\text{long}\left(\frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}\right) = \int_0^1 \frac{|(a\gamma(t)+b)'|}{\frac{a\gamma(t)+b}{c\gamma(t)+d}} dt = \int_0^1 \frac{|\frac{\gamma'(t)}{(cz+d)^2}|}{\frac{\text{Im}(\gamma(t))}{|cz+d|^2}} dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt = \text{long}(\gamma),$$

donc la longueur  $C^1$  des chemins  $C^1$  est conservée par ces homographies, d'où, par définition de la distance, ces homographies sont des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

De plus, elles sont holomorphes donc elles préservent l'orientation (en chaque point, la différentielle est une similitude directe). Ainsi,  $H(\mathbb{R}) \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ .

Montrons que les demi-droites verticales sont des géodésiques. Soit  $\gamma$  un chemin  $C^1$ . Posons  $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$  avec  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  à valeurs réelles. Alors

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\gamma_x'^2(t) + \gamma_y'^2(t)}}{\gamma_y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|\gamma_y'(t)|}{\gamma_y(t)} dt,$$

donc  $\text{long}_1(\gamma) \geq \text{long}_1(i\gamma_y)$  avec inégalité stricte dès que  $\gamma_x$  n'est pas constant.

Soient  $\gamma_0 : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \\ x & \longmapsto ix \end{cases}$ , et  $\gamma$  un chemin  $C^1$  par morceaux d'extrémités  $ai$  et  $bi$ . Par additivité, nous avons  $\text{long}_1(\gamma) \geq \text{long}_1(i\gamma_y)$ , avec inégalité stricte dès que  $\gamma_x$  n'est pas constant.

Remarquons que

$$\int_c^d \frac{|\gamma'_y(t)|}{\gamma_y(t)} dt \geq \left| \int_c^d \frac{\gamma'_y(t)}{\gamma_y(t)} dt \right| = \left| \ln\left(\frac{d}{c}\right) \right|$$

sur un intervalle où  $\gamma'_y$  est  $C^1$ , avec égalité si et seulement si  $\gamma'_y$  est toujours positif ou nul. En particulier, par additivité,

$$\text{long}_1(\gamma_0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \text{long}_1(\gamma).$$

Comme la longueur d'un chemin est définie par approximation par la somme des distances séparant deux points consécutifs d'une subdivision, et que la distance est elle-même définie par approximation par les longueurs  $C^1$  de chemins  $C^1$  par morceaux, la longueur d'un chemin est limite des longueurs  $C^1$  de chemins  $C^1$  par morceaux de mêmes extrémités, donc

$$\text{long}(\gamma_0) \leq \text{long}_1(\gamma_0) \leq \text{long}(\gamma)$$

pour tout chemin  $\gamma$  d'extrémités  $ai$  et  $bi$ .

On en conclut que  $\gamma_0$  est, à reparamétrage près, un segment géodésique, et donc que les demi-droites verticales du demi-plan supérieur sont des géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Si dans l'inégalité ci-dessus, on prend  $\gamma = \gamma_0$ , on obtient

$$\text{long}(\gamma_0) = \text{long}_1(\gamma_0).$$

En particulier,

$$d(ai, bi) = \text{long}(\gamma_0) = \text{long}_1(\gamma_0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Si  $D_0$  désigne la demi-droite verticale de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  d'équation  $\text{Re}(z) = 0$ , alors  $\gamma_0$  est l'unique segment géodésique d'extrémités  $ai$  et  $bi$  inclus dans  $D_0$ .

On rappelle que les homographies sont holomorphes sur la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . On note  $H_1$  l'homographie de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Nous avons

$$|H_1 \cdot ix| = \left| \frac{ix - 1}{ix + 1} \right| = 1,$$

donc l'image de  $D_0$  par  $H_1$  est incluse dans le demi-cercle  $S_0$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  centré en 0 de rayon 1. L'homographie  $H_1$  envoie 0 sur  $-1$ , et  $\infty$  sur 1, donc par continuité des homographies sur la sphère de Riemann, l'image par  $H_1$  de  $D_0 \cup \{0, \infty\}$ , qui est connexe, est connexe, incluse dans  $S_0 \cup \{-1, 1\}$ , et contient  $\{-1, 1\}$ , donc est égale à  $S_0 \cup \{-1, 1\}$ . Ainsi,  $H_1(D_0) = S_0$ .

On remarque que l'homographie définie par la matrice  $\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$  est une homothétie euclidienne de centre 0 de rapport  $e^t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et que  $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est une translation horizontale envoyant 0 sur  $t \in \mathbb{R}$ . Par homothéties de centre 0 et translations horizontales, on obtient à partir du demi-cercle  $S_0$  tous les demi-cercles centrés sur  $\mathbb{R}$  contenus dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Or, par définition d'une géodésique, les isométries envoient géodésiques sur géodésiques, donc les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe des réels sont géodésiques.

De plus, deux points distincts quelconques de  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$  sont reliés par exactement une de ces géodésiques (soit ils sont sur la même demi-droite verticale, soit il existe un unique demi-cercle centré sur l'axe des réels passant par eux).

On a aussi montré de cette façon que l'orbite de  $D_0$  sous l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  contient  $\mathrm{Geo}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ .

Puisque  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  agit en préservant la longueur et la longueur  $C^1$ , et que celles-ci coïncident pour les chemins géodésiques inclus dans  $D_0$ , on en déduit que pour les chemins géodésiques, la longueur et la longueur  $C^1$  coïncident.

Montrons que l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur les couples de points à distance 1 est transitive. Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  à distance hyperbolique 1, il existe une unique géodésique de  $\mathrm{Geo}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  contenant  $x$  et  $y$ . Or il existe un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  envoyant cette géodésique sur  $D_0$ , et en particulier, elle envoie  $x$  et  $y$  sur deux points de  $D_0$  à distance hyperbolique 1, notés  $x'$  et  $y'$ . Il existe une homothétie de centre 0 envoyant  $x'$  sur  $i$ , et  $y'$  est envoyé sur un point de  $D_0$  à distance hyperbolique 1 de  $i$ , donc sur  $ie$  ou sur  $\frac{i}{e}$ . L'homographie de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  envoie  $i$  sur  $i$  et  $\frac{i}{e}$  sur  $ie$ , donc si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , il existe un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  envoyant  $x$  sur  $i$  et  $y$  sur  $ie$ , donc l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur les couples de points à distance 1 est transitive.

On note  $(xy)$  l'unique géodésique contenant  $x$  et  $y$  parmi les géodésiques de  $\mathrm{Geo}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ , et  $[x, y]$  le sous-chemin d'extrémités  $x$  et  $y$ .

Montrons qu'il n'y a pas d'autre segment géodésique de  $x$  à  $y$ . Comme l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur les couples de points à distance 1 est transitive, on peut supposer que  $x$  et  $y$  sont sur  $D_0$ . Soient  $\gamma$  un segment géodésique ayant pour extrémités  $x$  et  $y$ ,  $\gamma_1$  le sous-chemin de  $\gamma$  ayant pour extrémités  $x$  et  $z$ ,  $\gamma_2$  celui ayant pour extrémités  $z$  et  $y$ , où  $z$  est un point quelconque de  $\gamma$ . Alors par définition d'un segment géodésique et égalité de  $\mathrm{long}$  et  $\mathrm{long}_1$  pour des chemins géodésiques, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{long}([x, y]) &= \mathrm{long}(\gamma) \\ &= \mathrm{long}(\gamma_1) + \mathrm{long}(\gamma_2) \\ &= \mathrm{long}([x, z]) + \mathrm{long}([z, y]) \\ &= \mathrm{long}_1([x, z]) + \mathrm{long}_1([z, y]) = \mathrm{long}_1([x, z] \cup [z, y]), \end{aligned}$$

or  $[x, z] \cup [z, y]$  est un chemin  $C^1$  par morceaux donc d'après une inégalité stricte démontrée plus haut,  $z \in D_0$ , d'où  $\gamma \subset D_0$ , donc  $\gamma = [x, y]$ .

Montrons que  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = H(\mathbb{R})$ . Commençons par un lemme, qui nous servira de nouveau par la suite.

**Lemme 2.2.** *Soient  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $\gamma$  une géodésique.*

*Alors il existe un unique point  $y \in \gamma$  tel que  $d(x, y) = d(x, \gamma)$ , et de plus,  $[x, y]$  intersecte  $\gamma$  orthogonalement en  $y$ , si  $x \notin \gamma$ .*

On dira que  $[x, y]$  réalise la distance de  $x$  à  $\gamma$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $x \notin \gamma$ . Par transitivité de l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur les géodésiques, on peut supposer que  $\gamma$  est un paramétrage de  $D_0$ .

On identifie  $D_0$  à  $\mathbb{R}$  grâce à  $\gamma$ , et on note  $d_z : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto d(\gamma(t), z) \end{cases}$  où  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Si  $z$  est la projection orthogonale euclidienne de  $x$  sur  $D_0$ , une démonstration ci-dessus montre que  $d_x > d_z$ , or  $d_z$  tend vers  $+\infty$  en  $\pm\infty$  (c'est la valeur absolue d'un logarithme), donc  $d_x$  aussi.

En particulier, il existe un compact, sur lequel  $d_x$  atteint un minimum, tel que le minimum atteint soit un minimum absolu de  $d_x$ . Si  $t$  est un point en lequel  $d_x$  atteint son minimum absolu, soit  $y = \gamma(t)$ .

Montrons que  $[x, y]$  intersecte orthogonalement  $D_0$  en  $y$ . Supposons par l'absurde que cela ne soit pas le cas. Pour tout  $z \in [x, y]$ ,  $[z, y]$  réalise la distance de  $z$

à  $\gamma$ , car si  $y' \in \gamma$  est tel que  $[z, y']$  est strictement plus court que  $[z, y]$ , alors

$$\begin{aligned} \text{long}([x, z]) + \text{long}([z, y]) &= \text{long}([x, y]) \\ &= d(x, y) \\ &= d(x, \gamma) \\ &\leq d(x, y') \leq \text{long}([x, z]) + \text{long}([z, y']), \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Pour  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on note  $p(z)$  la projection orthogonale euclidienne de  $z$  sur  $D_0$ .

En calculant la longueur du segment horizontal d'extrémités  $z$  et  $p(z)$ , on obtient :

$$d(z, p(z)) \leq \frac{|p(z) - z|}{\text{Im}(z)}.$$

Si  $z \in [x, y]$  est suffisamment proche de  $y$ , si  $\gamma$  est un paramétrage  $C^1$  de  $[x, y]$  telle que  $\gamma(a) = y$ ,  $\gamma(b) = z$ , alors

$$\begin{aligned} d(z, y) &\geq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\max(\text{Im}(z), \text{Im}(y))} \\ &\geq \frac{\|z - y\|}{\max(\text{Im}(z), \text{Im}(y))} \max(\text{Im}(z), \text{Im}(y)) \end{aligned}$$

car on sait que  $[x, y]$  est un arc de cercle donc pour  $z$  suffisamment proche de  $y$ ,  $\text{Im} \circ \gamma$  est monotone entre  $z$  et  $y$ , donc atteint son maximum en  $z$  ou en  $y$ .

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  un paramétrage  $C^1$  de  $[y, x]$ . Au voisinage de 0 :

$$\gamma(t) = y + \gamma'(0)t + o(t) = y + at + ibt + o(t)$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{|p(\gamma(t)) - \gamma(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} &= \frac{|a|t}{\text{Im}(y) + bt} + o(t) = \frac{|a|}{\text{Im}(y)}t + o(t) \\ \frac{|\gamma(t) - y|}{\min(\text{Im}(\gamma(t)), \text{Im}(y))} &= \frac{|a + ib|}{\text{Im}(y)}t + o(t) \end{aligned}$$

donc si  $b \neq 0$ , alors  $d(\gamma(t), p(\gamma(t))) < d(\gamma(t), y)$  pour  $t$  suffisamment proche de 0, ce qui est absurde puisque  $[\gamma(t), y]$  réalise la distance de  $\gamma(t)$  à  $D_0$ , et par définition,  $p(\gamma(t)) \in D_0$ .  $\square$



Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  préservant l'orientation. Puisque  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  agit transitivement sur les couples de points à distance 1, quitte à composer  $f$  par une homographie de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , on peut supposer que  $f(i) = i$  et  $f(ie) = ie$ , autrement dit que  $i$  et  $ie$  sont des points fixes de  $f$ .

L'isométrie  $f$  envoie géodésiques sur géodésiques donc par unicité de la géodésique reliant  $i$  et  $ie$ ,  $f(D_0) = D_0$ , et puisque  $f$  est une isométrie,  $f$  fixe même les points de  $D_0$  car, par la formule pour la distance entre deux points sur  $D_0$  donnée ci-dessus, un point sur  $D_0$  est entièrement déterminé par sa distance à  $i$  et à  $ie$ .

Soit  $x \notin D_0$ , alors il existe un unique segment géodésique  $[x, y]$  réalisant la distance de  $x$  à  $D_0$ , et de plus, il est orthogonal à  $D_0$  en  $y$ . Le chemin  $f([x, y]) = [f(x), y]$  réalise aussi la distance de  $f(x)$  à  $D_0$ , donc est orthogonal à  $D_0$  en  $y$  d'après l'unicité indiquée dans le lemme précédent, donc  $x$ ,  $y$  et  $f(x)$  sont alignés sur une géodésique (celle contenant  $[x, y]$  et  $[f(x), y]$ ). Si  $x \neq f(x)$ , alors,  $y$  étant le milieu de  $[x, f(x)]$ , un vecteur tangent en  $y$  à  $[x, f(x)]$  est envoyé sur son opposé par  $Tf$ , ce qui est impossible car un vecteur tangent en  $y$  à  $D_0$ , orthogonal au premier, est envoyé sur lui-même par  $Tf$  (car  $D_0$  est fixée par  $f$ ), d'où  $f$  renverse l'orientation, ce qui est absurde. Ainsi,  $x = f(x)$  d'où  $f = \mathrm{Id}$ , ce qui conclut.

L'application  $f : z \mapsto -\bar{z}$  est bien définie de  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$  dans  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$ , et c'est une isométrie puisque pour tout chemin  $\gamma$  de classe  $C^1$ ,

$$\int_a^b \frac{|f(\gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}(f(\gamma(t)))} dt = \int_a^b \frac{|-\bar{\gamma}'(t)|}{\mathrm{Im}(-\bar{\gamma}(t))} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma(t))} dt.$$

La conjugaison renverse l'orientation et  $z \mapsto -z$  la conserve (c'est une rotation d'angle  $\pi$ ), donc  $f$  renverse l'orientation. Si  $g$  est une isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , soit  $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ , soit  $f \circ g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ , donc  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  est engendré par  $f$  et  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ .  $\square$

On remarque que les isométries préservant l'orientation sont holomorphes, deux isométries coïncidant sur un ouvert non vide coïncident partout, par le théorème des zéros isolés.

## 2.2 Aire hyperbolique

Si  $X$  est un borélien de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on définit son aire hyperbolique par :

$$A(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy.$$

On remarque que l'aire hyperbolique est positive ou nulle, strictement positive si et seulement si  $X$  n'est pas de mesure de Lebesgue nulle, et si  $X \cap Y$  est de mesure de Lebesgue nulle, alors  $A(X \cup Y) = A(X) + A(Y)$ .

Un *polygone* hyperbolique à  $n$  sommets, ou *n-gone*, est un ensemble constitué de  $n$  points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  deux à deux distincts appelés sommets, que l'on note  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , et des chemins géodésiques reliant deux sommets consécutifs modulo  $n$  appelés arêtes. On notera  $A_1 A_2 \dots A_n$  ce *n-gone*.

Si  $A_1 A_2 \dots A_n$  est un *n-gone*, on désigne par  $\gamma$  le chemin continu  $C^1$  par morceaux obtenu par concaténation des arêtes. On dit que le *n-gone* est *convexe* si l'ensemble des indices de  $\gamma$  par rapport aux points de  $\mathbb{C}$  est de cardinal 2 (c'est-à-dire vaut  $\{0, 1\}$  ou  $\{0, -1\}$ ). Par la suite, tous les polygones seront supposés convexes. L'aire hyperbolique d'un polygone est définie comme celle de son intérieur, qui est l'ensemble des points tel que  $\gamma$  soit d'indice non nul par rapport à ces points.

On définit les angles hyperboliques comme égaux aux angles euclidiens. Les isométries préservant l'orientation étant holomorphes, elles préservent les angles euclidiens et celles renversant l'orientation sont antiholomorphes donc les opposent.

**Théorème 2.3** (Formule de Gauss-Bonnet). *L'aire d'un triangle hyperbolique  $ABC$  vaut  $\pi - (\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA})$ , où l'angle en un sommet à l'infini est nul.*

*Démonstration.*

**Lemme 2.4.** *Les isométries préservent l'aire.*

*Démonstration.* En effet, soient  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ ,  $X \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Par la formule du changement de variables, puisque  $f$  est un difféomorphisme  $C^1$  de  $X$  sur  $f(X)$ , de dérivée  $z \mapsto \frac{1}{(cz+d)^2}$  donc de jacobien  $z \mapsto \frac{1}{|(cz+d)|^4}$ , on a :

$$\begin{aligned} A(f(X)) &= \int_{f(X)} \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \int_X \frac{1}{\operatorname{Im}(f(x+iy))^2} \frac{dx dy}{|c(x+iy)+d|^4} \\ &= \int_X \frac{|c(x+iy)+d|^4}{y^2} \frac{dx dy}{|c(x+iy)+d|^4} \\ &= \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = A(X). \end{aligned}$$

Pour la symétrie  $z \mapsto -\bar{z}$ , le résultat est évident (le calcul est encore plus simple), ce qui conclut.  $\square$

Un triangle idéal est un triangle dont tous les sommets sont sur le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

**Lemme 2.5.** *L'aire d'un triangle idéal est  $\pi$ .*

*Démonstration.* Considérons le triangle idéal de sommets  $-1$ ,  $1$  et  $\infty$ . Son aire est :

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

Tous les triangles idéaux sont isométriques, car si  $ABC$  est un triangle idéal, il existe une isométrie envoyant  $(AB)$  sur  $D_0$ , et quitte à composer par l'isométrie  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ , on peut donc envoyer  $A$  sur  $\infty$  et  $B$  sur  $0$ . Puisque  $C \neq A$ ,  $C$  est envoyé sur  $\mathbb{R}^*$ , donc quitte à composer par une homothétie de centre  $0$  de rapport positif et éventuellement par une symétrie, on peut envoyer  $C$  sur  $1$  en fixant  $0$  et  $\infty$ .

Ainsi, tous les triangles idéaux sont isométriques au triangle de sommets  $\infty$ ,  $0$  et  $1$ , donc tous les triangles idéaux sont isométriques.

Par le lemme précédent, ils ont donc tous la même aire, égale à  $\pi$ .  $\square$

Les angles aux sommets d'un triangle idéal sont nuls, car soit un sommet est à l'infini, auquel cas on définit l'angle comme nul, par continuité, soit il est réel et alors les géodésiques s'intersectant en ce sommet sont orthogonales au bord donc tangentes entre elles, donc forment un angle nul.

Un triangle *deux-tiers idéal* est un triangle dont deux sommets au moins sont sur le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

On note  $A(\theta)$  l'aire d'un triangle deux-tiers idéal dont le plus grand angle vaut  $\theta \in [0, \pi]$ . Cette quantité est bien définie, car deux triangles deux-tiers idéaux correspondant au même angle  $\theta$  sont isométriques. En effet, soit  $ABC$  un triangle deux-tiers idéal tel que  $A \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , alors il existe une isométrie envoyant  $A$  sur  $i$ ,  $B$  sur  $0$ , et  $C$  dans  $\{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ , en préservant les angles (non orientés). Le sommet  $C$  est alors envoyé sur  $\frac{1}{\sin(\theta)} - \frac{1}{\tan(\theta)}$  si  $\theta \neq 0$ , comme un simple calcul trigonométrique permet de le montrer (on rappelle que les géodésiques ne passant pas par l'infini sont des demi-cercles centrés sur un réel), ce qui conclut (le cas idéal  $\theta = 0$  a déjà été traité).

On note  $S(\theta) = \pi - A(\theta)$ . La fonction  $S$  est définie sur  $[0, \pi]$ , et on a vu que  $S(0) = 0$ . Le cas  $\theta = \pi$  correspond à un triangle plat, d'aire nulle puisque de mesure de Lebesgue nulle, donc  $S(\pi) = \pi$ .

On prolonge  $S$  à  $\mathbb{R}$  de la façon suivante : si  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $x = a\pi + b$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq b < \pi$  la division euclidienne de  $x$  par  $\pi$ , alors  $S(x) = a\pi + S(b)$ .

**Lemme 2.6.** *L'application  $S$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire. En particulier,  $S = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\theta, \theta'$  deux angles tels que  $\theta + \theta' \leq \pi$ ,  $ABC$  un triangle deux-tiers idéal tel que  $\widehat{BAC} = \theta$ ,  $D$  un point du bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  tel que  $DAC$  soit un triangle deux-tiers idéal tel que  $\widehat{DAC} = \theta'$  et  $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \theta + \theta'$ .

Alors  $BDA$  est un triangle deux-tiers idéal d'angle  $\theta + \theta'$ , et  $A(BAD) + A(BCD) = A(BCDA) = A(BCA) + A(DCA)$ , or  $BCD$  est idéal, d'où  $A(\theta + \theta') + \pi = A(\theta) + A(\theta')$ , d'où  $S(\theta + \theta') = S(\theta) + S(\theta')$ .

Si  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , alors  $S(2x) = 2S(x)$ , et si  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $S(2x - \pi) = S(2(x - \frac{\pi}{2})) = 2S(x - \frac{\pi}{2}) = 2S(x) - 2S(\frac{\pi}{2}) = 2S(x) - S(\pi) = 2S(x) - \pi$ , or par définition,  $S(2x) = \pi + S(2x - \pi)$  d'où  $S(2x) = 2S(x)$ .

Il est ensuite immédiat que  $\forall x \in \mathbb{R}, S(2x) = 2S(x)$ .

Si  $x, y \in \mathbb{R}$ , et  $x = a\pi + b, y = c\pi + d$  sont leurs divisions euclidiennes respectives par  $\pi$ , alors  $S(x) + S(y) = (a + c)\pi + S(b) + S(d)$ , et soit  $b + d \leq \pi$  auquel cas  $S(b) + S(d) = S(b + d)$ , soit  $\pi < b + d \leq 2\pi$ , auquel cas en supposant  $b \leq d$ , on a  $S(b + d) = 2S(\frac{b+d}{2}) = 2S(\frac{b}{2}) + 2S(\frac{d}{2}) = S(b) + S(d)$ , d'où dans les deux cas  $S(x + y) = (a + c)\pi + S(b + d) = (a + c)\pi + S(b) + S(d) = S(x) + S(y)$ .

On a donc :  $\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, pS(x) = S(px) = qS(\frac{p}{q}x)$  d'où  $S(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}S(x)$ , donc  $S$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire.

Or  $S$  est continue car l'aire d'un triangle deux-tiers idéal varie continument par rapport à l'angle, par théorème de continuité sous le signe intégral (il est facile d'en vérifier les hypothèses, puisque l'intégrale est explicite, en utilisant le triangle décrit plus haut pour le calcul), donc  $S$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Puisque  $S(\pi) = \pi, S = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . □

Ainsi,  $A(\theta) = \pi - \theta$  pour  $\theta \in [0, \pi]$  donc la formule de Gauss-Bonnet est vérifiée pour les triangles deux-tiers idéaux.

Soit  $ABC$  un triangle hyperbolique.

Soient  $B'$  le point d'intersection de  $(AB)$  avec le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  situé du côté de  $B$ ,  $C'$  l'intersection de  $(BC)$  avec le bord du côté de  $C$ , et  $A'$  l'intersection de  $(CA)$  avec le bord du côté de  $A$  (on dit que  $X \in (YZ)$  est du côté de  $Y$  si  $Z \notin [X, Y]$ ). Alors

$$\begin{aligned} \pi &= A(A'B'C') \\ &= A(A'AB') + A(B'BC') + A(C'CA') + A(ABC) \\ &= (\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}) + A(ABC), \end{aligned}$$

d'où

$$A(ABC) = \pi - (\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA}).$$

□

En particulier, la somme des angles d'un triangle hyperbolique est toujours inférieure à  $\pi$ , strictement s'il n'est pas plat, donc un triangle hyperbolique ne peut avoir deux angles droits.

De même, la somme des angles d'un quadrilatère hyperbolique est toujours inférieure à  $2\pi$ , strictement s'il n'est pas plat, donc il n'existe pas de rectangle hyperbolique.

### 2.3 Classification des hexagones hyperboliques marqués à angles droits

Le résultat principal de cette partie est central pour expliciter l'espace de Teichmüller du pantalon, défini dans la troisième partie. Un hexagone hyperbolique à angles droits est un hexagone hyperbolique convexe tel que deux arêtes ayant un sommet commun s'intersectent à angle droit en ce sommet. Un hexagone hyperbolique marqué est un couple  $(ABCDEF, AB)$  où  $ABCDEF$  désigne un hexagone hyperbolique et  $AB$  le segment géodésique  $[A, B]$ , orienté de  $A$  vers  $B$ .

Le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  agit sur l'ensemble des hexagones hyperboliques marqués à angles droits (par l'action naturelle sur les parties de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ), puisque ces isométries sont holomorphes donc conservent les angles.

On note  $\text{Hex}_m$  l'ensemble des hexagones hyperboliques marqués à angles droits quotienté par cette action.

**Théorème 2.7.** *L'application*

$$f : \begin{cases} \text{Hex}_m & \longrightarrow (\mathbb{R}_*^+)^3 \\ (ABCDEF, AB) & \longmapsto (\text{long}(AB), \text{long}(CD), \text{long}(EF)) \end{cases}$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* Montrons que  $f$  est bien définie.

Si  $(ABCDEF, AB)$  et  $(A'B'C'D'E'F', A'B')$  sont dans la même classe d'équivalence (sous l'action des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ), alors il existe une isométrie  $h$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  telle que  $h(ABCDEF) = A'B'C'D'E'F'$  et  $h(AB) = A'B'$ , en particulier  $h(A) = A'$  et  $h(B) = B'$ . Le sommet  $C$  est l'unique sommet de  $ABCDEF$  adjacent à  $B$  mais différent de  $A$ , et de même symétriquement pour  $C'$ , or l'isométrie  $h$  préserve ces propriétés topologiques, donc  $h(C) = C'$ , et de même,  $h(D) = D'$ ,  $h(E) = E'$  et  $h(F) = F'$ , or  $h$  est une isométrie d'où

$$(\text{long}(AB), \text{long}(CD), \text{long}(EF)) = (\text{long}(A'B'), \text{long}(C'D'), \text{long}(E'F')),$$

donc  $f$  est bien définie.

Pour tout hexagone marqué  $(ABCDEF, AB)$ , il existe une isométrie envoyant  $B$  sur  $i$  et  $A$  sur l'unique point  $ix$  de  $D_0$  de partie imaginaire supérieure à 1

tel que  $d(A, B) = d(i, ix)$ . Quitte à composer par  $z \mapsto -\bar{z}$ , on peut supposer  $ABCDEF \subset \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ .

Dans chaque classe d'équivalence, on appelle « canonique » un tel représentant.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.8.** *Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux géodésiques ne s'intersectant pas dans  $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$ , alors il existe un unique segment géodésique  $[x, y]$ ,  $x \in D_1$ ,  $y \in D_2$  réalisant la distance de  $D_1$  à  $D_2$ .*

*De plus,  $[x, y]$  est l'unique segment géodésique orthogonal à  $D_1$  et à  $D_2$ .*

*Démonstration.* Quitte à composer par une isométrie préservant l'orientation, on peut supposer  $D_2 = D_0$ .

La condition sur  $D_1$  et  $D_2$  se transporte en la même condition sur  $D_0$  et  $D_1$ . L'orthogonalité est préservée car les isométries préservent les angles.

Ainsi, après composition par cette isométrie,  $D_1$  est un demi-cercle non tangent à  $D_0$ , et leur distance euclidienne  $M$  est strictement positive. On note  $N$  la partie imaginaire maximale des points de  $D_1$ .

On identifie  $D_0$  à  $\mathbb{R}$  grâce à un paramétrage  $\gamma$  de  $D_0$ , et on note

$$d_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto d(\gamma(t), D_1) \end{cases} .$$

Alors  $d_1$  est continue (par continuité de la distance à une partie et de  $\gamma$ ), et propre, car

$$d_1(t) \geq \inf \left\{ \frac{d_{eucl}(\gamma(t), x)}{\min(\operatorname{Im}(\gamma(t)), \operatorname{Im}(x))}, x \in D_1 \right\},$$

donc en  $+\infty$ ,

$$d_1(t) \geq \frac{d_{eucl}(\gamma(t), D_1)}{N} \rightarrow +\infty$$

et en  $-\infty$ ,

$$d_1(t) \geq \frac{M}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} \rightarrow +\infty .$$

La fonction  $d_1$  admet donc un minimum absolu, et on note  $x$  un point de  $D_0$  tel que  $x = \gamma(t)$  où  $d_1(t)$  est le minimum absolu de  $d_1$ .

Alors, par le lemme 1, la distance de  $x$  à  $D_1$  est atteinte, et soit  $[x, y]$  un segment géodésique réalisant cette distance. Il réalise donc la distance de  $D_0$  à  $D_1$ .

Il réalise aussi la distance de  $y$  à  $D_0$  donc il est orthogonal à  $D_0$  et à  $D_1$ .

Si  $[x', y']$  est un autre segment géodésique réalisant la distance de  $D_0$  à  $D_1$ , alors  $xx'y'y'$  est un quadrilatère à angles droits, ce qui est absurde d'après le théorème de Gauss-Bonnet.  $\square$

On remarque que si  $BC$  est une arête d'un hexagone hyperbolique à angles droits,  $AB$  et  $CD$  les deux arêtes adjacentes, alors  $(AB)$  et  $(CD)$  ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , sinon soit  $I$  leur intersection, alors le triangle  $IBC$  a deux angles droits, ce qui est absurde.

Par le lemme précédent,  $BC$  est donc l'unique segment géodésique réalisant la distance de  $(AB)$  à  $(CD)$ .

Soient  $\text{long}(AB)$ ,  $\text{long}(BC)$  et  $\text{long}(AF)$  trois réels strictement positifs,  $x = \exp(\text{long}(AB))$ .

Supposons que  $\text{long}(AB)$ ,  $\text{long}(BC)$  et  $\text{long}(AF)$  sont des longueurs d'arêtes d'un hexagone hyperbolique marqué à angles droits, et soit  $(ABCDEF, AB)$  un représentant canonique de cet hexagone hyperbolique marqué.

On peut le construire de la façon suivante. Posons  $B = i$ ,  $A = ix$ . On trace les deux demi-cercles de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  de centre 0 de rayons respectifs 1 et  $x$ . Ce sont les uniques géodésiques intersectant à angle droit  $AB$  en  $A$  et  $B$  respectivement.

Sur chacun de ces demi-cercles, il existe une unique position possible pour  $F$  et  $C$  réalisant les longueurs  $\text{long}(BC)$  et  $\text{long}(AF)$  (car sur une géodésique, la distance à un point de la géodésique est réalisée exactement deux fois, et ici, on s'est restreint au quadrant supérieur droit du plan donc il ne reste plus qu'une seule solution).

On trace  $D_1$  et  $D_2$  les uniques géodésiques orthogonales à  $BC$  et  $AF$  passant par respectivement  $C$  et  $F$ .

D'après la remarque précédente,  $DE$  est obtenue alors comme l'unique segment géodésique réalisant la distance de  $D_1$  à  $D_2$ .

Tout représentant canonique satisfait cette construction unique, donc il y a unicité du représentant canonique. On a donc représenté tous les hexagones hyperboliques marqués à angles droits d'une façon canonique (unique).

On ne suppose plus que  $\text{long}(AB)$ ,  $\text{long}(BC)$  et  $\text{long}(AF)$  sont des longueurs d'arêtes d'un hexagone hyperbolique marqué à angles droits. On peut néanmoins faire la construction précédente, à la différence près qu'il n'existe pas de segment géodésique réalisant la distance de  $D_1$  à  $D_2$  si ces géodésiques s'intersectent (ce qui ne pouvait être le cas précédemment car on savait que la construction donnait un hexagone hyperbolique à angles droits).

On note dans l'ordre croissant  $a$  et  $b$  les extrémités de la géodésique  $(CD)$  ainsi que  $c$  et  $d$  les extrémités de  $(EF)$ . La construction précédente permet d'obtenir un hexagone hyperbolique à angles droits tant que  $c > b$ .

On fixe  $\text{long}(BC)$  et  $\text{long}(AF)$ . Dans la construction précédente, quand  $x = \exp(\text{long}(AB))$  varie, puisque les homothéties de centre 0 sont des isométries, les segments  $AF$  sont homothétiques de centre 0, donc les géodésiques  $(EF)$  aussi

par construction, donc le rapport  $\frac{d}{c}$  est constant. Appellons  $x_0$ ,  $c_0$  et  $d_0$  les réels obtenus dans la configuration où  $b = c$ . Alors pour  $x > x_0$ , on a  $c > c_0 = b$  donc la construction précédente donne un hexagone hyperbolique à angles droits.

On pose  $x = tx_0$ , alors  $c = tc_0 = tb$  et  $d = td_0$ . Il existe un hexagone hyperbolique à angles droits  $ABCDEF$  tel que  $\text{long}(AB) = \ln(x)$  si et seulement si  $t > 1$ .

Montrons que  $\text{long}(DE)$  comme fonction de  $t > 1$  est bijective dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Il existe une isométrie préservant l'orientation qui envoie  $D$  sur  $D' = i$  et  $E$  sur  $E' \in D_0$  avec  $\text{Im}(E') > 1$ .

Elle envoie  $(CD)$  et  $(EF)$  sur des géodésiques orthogonales à  $D_0$ , donc sur des demi-cercles centrés en 0 de rayons respectifs 1 et  $r > 1$ . Par préservation de l'orientation, on obtient que  $a$  est envoyé sur  $-1$ ,  $b$  sur 1,  $c$  sur  $r$  et  $d$  sur  $-r$ .

Si  $w, x, y, z \in \hat{\mathbb{C}}$  sont deux à deux distincts, on définit leur *birapport*

$$[w, x, y, z] = \frac{(x - w)(z - y)}{(y - w)(z - x)}.$$

**Lemme 2.9.** *Les homographies conservent le birapport. Autrement dit, si*

$f : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc = 1$ , alors  $\forall w, x, y, z \in \hat{\mathbb{C}}$  deux à deux distincts,

$$[w, x, y, z] = [f(w), f(x), f(y), f(z)].$$

*Démonstration.* Un calcul le montre :

$$\begin{aligned} & [f(w), f(x), f(y), f(z)] \\ &= \frac{((ax + b)(cw + d) - (aw + b)(cx + d))((az + b)(cy + d) - (ay + b)(cz + d))}{((ay + b)(cw + d) - (aw + b)(cy + d))((az + b)(cx + d) - (ax + b)(cz + d))} \\ &= \frac{(x - w)(z - y)}{(y - w)(z - x)} = [w, x, y, z]. \quad \square \end{aligned}$$

Puisque les isométries préservant l'orientation sont des homographies, on obtient ainsi :

$$\frac{(b - a)(d - c)}{(c - a)(d - b)} = \frac{t(b - a)(d_0 - b)}{(tb - a)(td_0 - b)} = \frac{4r}{(r + 1)^2}.$$

On note

$$f(x) = \frac{x(b - a)(d_0 - b)}{4(xb - a)(xd_0 - b)} = \frac{kx}{P(x)}$$

où  $P(x) = (bx - a)(d_0x - b)$ , et

$$g(x) = \frac{x - 1}{x^2},$$



et alors la relation précédente s'écrit :

$$f(t) = g(r + 1).$$

On a  $g'(x) = \frac{2-x}{x^3} < 0$  pour  $x > 2$ , donc l'équation  $g(r + 1) = f(t)$  admet, à  $t > 1$  fixé, au plus une solution  $r > 1$ , et même exactement une par construction (puisque l'hexagone existe).

Résoudre cette équation revient à résoudre une équation polynomiale du second degré en  $r$ , et à ne considérer que la plus grande solution (celle strictement supérieure à 1), ce qui donne :

$$r(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4f(t)}}{2f(t)} - 1,$$

donc  $r$  est une fonction  $C^1$  de  $t$ , pour  $t > 1$ .

La longueur  $\text{long}(DE) = \ln(r)$  est donc une fonction  $C^1$  de  $t > 1$ . Quand  $t \rightarrow 1^+$ ,  $f(t) \rightarrow \frac{1}{4}$  donc  $\text{long}(DE) \rightarrow 0$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $f(t) \rightarrow 0$  donc  $\text{long}(DE) \rightarrow +\infty$ , donc par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\text{long}(DE)(t)$  est surjective dans  $\mathbb{R}_*^+$ .

Pour montrer qu'elle est injective, il suffira de montrer que sa dérivée est strictement positive, soit,  $\frac{r'}{r} > 0$ , soit  $r' > 0$ , soit encore en posant  $R = r + 1$ ,  $R' > 0$ .

Or, en dérivant par rapport à  $t$  la relation  $f(t) = g(R)$ , on obtient  $f'(t) = R'g'(R)$ . On a déjà vu que pour  $r > 1$ , i.e  $R > 2$ ,  $g'(R) < 0$ , donc il suffit de montrer  $f'(t) < 0$  pour conclure.

Or, pour  $R > 2$ , ou autrement dit  $t > 1$ ,  $f(t) = g(R) > 0$  d'où  $f'(t) < 0 \iff \ln(f(t))' < 0$ .

$$\ln(f(t))' = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \frac{a}{b}} - \frac{1}{t - \frac{b}{d_0}} < 0$$

car  $a < b < d_0$  et  $t > 1$ , ce qui conclut. □

### 3 Variétés hyperboliques et espace de Teichmüller

Nous allons maintenant combiner les notions introduites dans les deux premières parties en introduisant la notion de surface hyperbolique. De la même façon qu'une variété différentielle est une variété topologique munie d'une structure supplémentaire afin de pouvoir utiliser du calcul différentiel, une variété hyperbolique est une variété topologique munie d'une structure supplémentaire pour pouvoir utiliser de la géométrie hyperbolique.

#### 3.1 Définitions

**Définition 3.1.** Soit  $S$  une surface, une structure hyperbolique sur  $S$  est un atlas maximal de cartes  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  à valeurs dans  $\{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$  telles que les applications de changement de cartes soient des isométries locales préservant l'orientation. Une surface hyperbolique est une surface munie d'une structure hyperbolique.

On peut alors transporter toutes les notions que l'on a définies pour le plan hyperbolique dans les surfaces hyperboliques :

Une *géodésique* sur une surface  $S$  munie d'une structure hyperbolique  $\sigma$  est un chemin, géodésique dans chacune des cartes de la structure hyperbolique.

L'*angle* entre deux chemins s'intersectant en un point est l'angle correspondant lu dans une carte autour de ce point. Cet angle ne dépend pas de la carte choisie car les changements de cartes sont conformes (car isométriques).

La *longueur* d'un chemin  $\gamma$  est définie de la façon suivante : soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$  une subdivision de  $[0, 1]$  telle que pour tout  $i$ ,  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  soit inclus dans une carte  $\varphi_i$ . Alors

$$\ell_{\sigma}(\gamma) = \sum_{i=0}^n \ell(\varphi_i \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$$

où  $\ell$  est la longueur dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Cette définition ne dépend pas des choix des cartes  $\varphi_i$  puisque les changements de cartes sont des isométries, et ne dépend pas non plus de la subdivision choisie, car on peut toujours prendre une subdivision plus fine que deux subdivisions données, et la longueur pour cette subdivision coïncidera avec les deux autres. La longueur ne dépend pas non plus du paramétrage car  $\ell$  n'en dépend pas.

Si  $S$  est connexe (donc connexe par arcs), la *distance* entre deux points est la borne inférieure de l'ensemble des longueurs des chemins reliant ces deux points.

**Définition 3.2.** Notons  $\text{Hom}(S)$  le groupe des homéomorphismes de  $S$ , et  $\text{Hom}_0(S)$  le groupe des homéomorphismes de  $S$  isotopes à l'identité, c'est à dire que  $\varphi \in \text{Hom}_0(S)$  si et seulement s'il existe  $H : [0, 1] \times S \rightarrow S$  continue telle que  $H(0, \cdot) = \varphi$ ,  $H(1, \cdot) = \text{Id}_S$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t, \cdot)$  est un homéomorphisme de  $S$ .

**Définition 3.3.** On définit le groupe modulaire de  $S$ , noté  $\text{Mod}(S)$ , comme étant le quotient de  $\text{Hom}(S)$  par  $\text{Hom}_0(S)$ .

Le groupe  $\text{Hom}(S)$  agit à gauche sur l'ensemble des structures hyperboliques sur  $S$  par

$$\psi \cdot (\varphi_i, U_i)_{i \in I} = (\varphi_i \circ \psi^{-1}, \psi(U_i))_{i \in I} .$$

En effet, les changements de carte sont  $\varphi_i \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_j^{-1} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ .

Cette action se restreint en une action de  $\text{Hom}_0(S)$  sur l'ensemble des structures hyperboliques sur  $S$ .

**Définition 3.4.** Soit  $2g + n > 2$ . On définit l'espace de Teichmüller de  $\Sigma_{g,n}$  et on note  $\text{Teich}(\Sigma_{g,n})$  l'espace quotient de l'ensemble des structures hyperboliques sur  $\Sigma_{g,n}$  par l'action ci-dessus de  $\text{Hom}_0(\Sigma_{g,n})$ .

On remarque que  $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$  agit sur  $\text{Teich}(\Sigma_{g,n})$ , car  $\text{Hom}_0(\Sigma_{g,n})$  agit trivialement sur  $\text{Teich}(\Sigma_{g,n})$  donc l'action de  $\text{Hom}(\Sigma_{g,n})$  sur  $\text{Teich}(\Sigma_{g,n})$  passe au quotient.

## 3.2 Résultats préliminaires

Afin de calculer les espaces de Teichmüller des surfaces, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats topologiques que nous énonçons ici.

### 3.2.1 Homotopie, isotopie et géodésiques

Dans un espace topologique  $E$ , un *chemin* est une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  et un *lacet* est une application continue  $\gamma : \mathbb{S}_1 \rightarrow E$ . Un chemin (resp. lacet) est dit *simple* s'il est injectif (resp. injectif sur  $[0, 1]$ ).

Une *homotopie* entre deux fonctions continues  $f$  et  $g$  d'un espace topologique  $X$  dans un espace topologique  $Y$  est une application continue  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  telle que  $H(0, \cdot) = f$  et  $H(1, \cdot) = g$ . Si  $f$  et  $g$  sont des plongements, une *isotopie* entre  $f$  et  $g$  est une homotopie  $H$  entre  $f$  et  $g$  telle que  $H(t, \cdot)$  est un plongement pour tout  $t \in [0, 1]$ . Les relations « être homotope à » et « être isotope à » sont des relations d'équivalence.

Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont des chemins tels que  $\gamma(0) = \gamma'(0)$  et  $\gamma(1) = \gamma'(1)$ , une *homotopie relativement aux extrémités* entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  est une homotopie  $H$  entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t, 0) = \gamma(0)$  et  $H(t, 1) = \gamma(1)$ . Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont des lacets,

une *homotopie de lacets* entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  est une homotopie  $H$  entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t, \cdot)$  est un lacet.

On admet les propositions suivantes. Pour des démonstrations, voir par exemple [Far10, proposition 1.7, page 29] pour la première et [Hir76, théorème 1.3, page 180] pour la seconde.

**Proposition 3.5.** *Soient  $S$  une surface et  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets simples homotopes, alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont isotopes.*

**Proposition 3.6** (Isotopies ambiantes). *Soient  $S$  une surface et  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets simples isotopes dont les images ne rencontrent pas la bord, alors il existe un homéomorphisme de  $S$  isotope à l'identité qui envoie  $\gamma$  sur  $\gamma'$ .*

**Proposition 3.7.** *Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble fermé (pour la topologie uniforme) non vide de chemins de  $[0, 1]$  dans une surface hyperbolique compacte, stable par reparamétrage des chemins. On suppose que pour tout chemin de  $\mathcal{C}$ , il existe un chemin géodésique par morceaux dans  $\mathcal{C}$  de longueur inférieure, et strictement inférieure pour un chemin non géodésique. Alors il existe un élément de  $\mathcal{C}$  de longueur minimale, qui est de plus géodésique.*

*Démonstration.* Soient  $m = \inf \{\text{long}(\gamma), \gamma \in \mathcal{C}\}$  et  $(\gamma_n)$  une suite minimisante (dont la suite des longueurs tend vers  $m$ ). On peut supposer que  $\gamma_n$  est géodésique par morceaux, par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ . Quitte à reparamétriser, comme  $\gamma_n$  est géodésique par morceaux, on peut supposer qu'il est  $\text{long}(\gamma_n)$ -lipschitzien. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut extraire une sous-suite de  $(\gamma_n)$  qui converge uniformément vers  $\gamma \in \mathcal{C}$ , de longueur  $m$  minimale car la longueur est continue pour la norme uniforme. Par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , le chemin  $\gamma$  est géodésique.  $\square$

**Corollaire 3.8.** *Soit  $\gamma$  un lacet simple non homotope à un point, sur une surface hyperbolique compacte  $S$ . Alors il existe un unique lacet  $\gamma_\sigma$  homotope à  $\gamma$  de longueur minimale et qui est géodésique.*

*Démonstration.* L'existence de  $\gamma_\sigma$  découle du théorème précédent appliqué à la classe d'homotopie de  $\gamma$  (la condition d'être une homotopie de lacets est une condition fermée, et on peut toujours approcher uniformément un chemin par un chemin géodésique par morceaux homotope).

Pour l'unicité, nous renvoyons à [Far10, proposition 1.6 page 27].  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Soient  $S$  une surface hyperbolique compacte et  $\gamma$  un chemin reliant deux points  $x$  et  $y$  de  $S$ , alors il existe un unique chemin géodésique reliant  $x$  et  $y$ , homotope à  $\gamma$  relativement aux extrémités.  $\square$*

**Corollaire 3.10.** *Soient  $S$  une surface hyperbolique compacte et  $\gamma$  un chemin reliant deux composantes connexes du bord de la surface, alors il existe un unique chemin géodésique de longueur minimale reliant ces deux composantes de bord, homotope à  $\gamma$  par une homotopie au cours de laquelle les extrémités de  $\gamma$  restent dans la même composante de bord.*  $\square$

### 3.2.2 Nombres d'intersection

Si  $a$  et  $b$  sont deux classes d'isotopie de lacets simples, le *nombre d'intersection* de  $a$  et  $b$ , noté  $i(a, b)$ , est défini comme étant le minimum des cardinaux de  $\gamma_a \cap \gamma_b$  lorsque  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  parcourent respectivement  $a$  et  $b$ . Si  $\gamma_a \cap \gamma_b = i(a, b)$ , on dit que  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  sont en *position minimale*.

Pour calculer le nombre d'intersection de deux classes de lacets, on admet le critère très utile suivant :

**Proposition 3.11** (critère du bigone). *Deux lacets simples transverses sur une surface  $S$  sont en position minimale si et seulement si deux arcs entre deux points (distincts) d'intersection, l'un appartenant au premier lacet et l'autre au second, ne bordent jamais un disque fermé plongé dans  $S$  (on appelle un tel disque un bigone).*

**Proposition 3.12** (minimalité des géodésiques). *Deux géodésiques fermées simples distinctes sur une surface hyperboliques sont en position minimale.*

Pour des démonstrations, voir par exemple respectivement [Far10, proposition 1.3, page 23] et [Far10, corollaire 1.5, page 26].

Pour s'assurer de l'existence de représentants géodésiques dans une classe d'homotopie donnée, on peut utiliser les corollaires du théorème 3.7.

### 3.2.3 Revêtements

Tous les résultats de cette partie sont des résultats classiques de théorie des revêtements, nous renvoyons à [Pau] ou [Hat02] pour les démonstrations.

**Définition 3.13.** *Soit  $B$  un espace topologique. La paire  $(E, p)$  est un revêtement de  $B$  si  $E$  est un espace topologique et  $p : E \rightarrow B$  une application continue telle qu'il existe un espace discret non vide  $F$  tel que pour tout  $x \in B$  il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un homéomorphisme  $\varphi$  de  $p^{-1}(U)$  vers  $U \times F$  tel que si  $\pi_1 : U \times F \rightarrow U$  est la projection sur le premier facteur, alors  $p|_{p^{-1}(U)} = \pi_1 \circ \varphi$ .*

Comme conséquence de la définition, un revêtement est surjectif et un homéomorphisme local. Si  $B$  est une surface munie d'une structure hyperbolique, cette structure se relève d'une unique manière en une structure hyperbolique sur  $E$  de

telle sorte que sur les cartes de  $E$  sur lesquelles  $p$  est un homéomorphisme local, il envoie la structure de  $E$  sur celle de  $B$ .

**Proposition 3.14** (Existence et unicité du revêtement universel). *Pour toute surface  $S$ , il existe un revêtement simplement connexe  $(\tilde{S}, p)$  de  $S$ . Un tel revêtement est appelé un revêtement universel.*

*Deux revêtements universels de  $S$  sont homéomorphes par un homéomorphisme qui commute avec les projections.*

Exemple : Soit l'application  $p : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{S}_1 \\ x & \longmapsto e^{ix} \end{cases}$ , alors  $(\mathbb{R}, p)$  est un revêtement universel de  $\mathbb{S}_1$ .

**Proposition 3.15** (Relèvement des chemins). *Soient  $B$  un espace topologique et  $(E, p)$  un revêtement de  $B$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un chemin et soit  $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ . Alors il existe un unique chemin (appelé chemin relevé)  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  et  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .*

**Proposition 3.16** (Relèvement des homotopies). *Soient  $B$  un espace topologique et  $(E, p)$  un revêtement de  $B$ . Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins sur  $B$  et  $H$  une homotopie entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Soient  $\tilde{\gamma}_1$  un relevé de  $\gamma_1$  dans  $E$ , alors il existe un unique relevé  $\tilde{\gamma}_2$  de  $\gamma_2$  et une unique homotopie  $\tilde{H}$  de  $\tilde{\gamma}_1$  vers  $\tilde{\gamma}_2$  telle que  $p \circ \tilde{H} = H$ .*

### 3.2.4 Application développante

La proposition suivante est extrêmement importante, c'est elle qui fait le lien entre la géométrie *locale* d'une variété hyperbolique et sa géométrie *globale*.

**Proposition 3.17.** *Soit  $S$  une surface hyperbolique simplement connexe. Alors il existe une application localement isométrique  $D$  de  $S$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , unique à composition par une isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  près.*

*Démonstration.* On fixe un point base  $x_0$  sur  $S$  et une carte  $(\varphi_0, U_0)$  contenant  $x_0$ . On définit  $D(x_0) = \varphi_0(x_0)$ . Soient  $x \in S$ ,  $[x_0, x]$  un chemin simple reliant  $x_0$  à  $x$ . Puisqu'il est simple, la topologie de  $[0, 1]$  coïncide avec la topologie induite par celle de  $S$ . On recouvre  $[x_0, x]$  par un nombre fini de domaines de cartes  $(\varphi_i, U_i)_{i=0, \dots, n}$  telles que  $U_i \cap [x_0, x] = ]a_i, b_i[$  (fermé pour les extrémités) avec  $(a_i)_{i=0, \dots, n}$  et  $(b_i)_{i=0, \dots, n}$  strictement croissantes,  $a_{i+1} > b_{i-1}$ .

On peut le faire de la façon suivante : pour tout point  $y$  du chemin, il existe un domaine de carte  $U_y$  le contenant, qui intersecte  $[x_0, x]$  en un ouvert (de  $[x_0, x]$ ). La composante connexe de cet ouvert est la trace d'un ouvert de  $S$ , donc on peut ne considérer que des cartes intersectant  $[x_0, x]$  selon un intervalle. On en extrait un recouvrement fini, et on peut supprimer des cartes de la façon suivante. On

considère les intersections des cartes avec  $[x_0, x]$ . Si une intersection est incluse dans une autre, on peut supprimer la carte correspondante, et si trois intersections ont une intersection triple, on peut aussi supprimer une des cartes, tout en conservant un recouvrement. On obtient ainsi des cartes recouvrant  $[x_0, x]$  que l'on ordonne par la borne inférieure de leur intersection avec  $[x_0, x]$ . Toutes les propriétés sont alors vérifiées.

Si  $U_i$  et  $U_j$  ont une intersection non vide dont on a choisi une composante connexe,  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  est une isométrie locale de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , donc, au voisinage de la composante connexe distinguée de  $U_i \cap U_j$ , c'est la restriction d'une unique isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , notée  $\widehat{\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}}$ .

Si  $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$  est une suite de cartes recouvrant un chemin, on note  $\text{iso}((\varphi_i)_i) = \widehat{\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{n-1} \circ \varphi_n^{-1}}$ . Cette notation a un sens dès que deux cartes successives s'intersectent et qu'une des composantes connexes de l'intersection est distinguée.

On définit  $D(x) = \text{iso}((\varphi_i)_i) \circ \varphi_n$  où les composantes connexes distinguées sont celles rencontrant  $[x_0, x]$ . Montrons que cette définition ne dépend pas du choix du chemin et des cartes.

À partir de maintenant, les composantes connexes distinguées seront sous-entendues (et correspondent à des intersections avec un chemin).

**Lemme 3.18.** *Si  $(a, A)$ ,  $(b, B)$ ,  $(c, C)$  sont trois cartes dont l'intersection est non vide, alors  $\widehat{a \circ c^{-1}} = \widehat{a \circ b^{-1} \circ b \circ c^{-1}}$ , soit  $\text{iso}((a, c)) = \text{iso}((a, b, c))$ . En particulier, on peut insérer ou supprimer une carte d'une suite de cartes en conservant l'isométrie associée, à condition que l'intersection triple avec les cartes adjacentes soit non vide.*

*Démonstration.* En effet, cette égalité est vérifiée sur l'ouvert  $c(A \cap B \cap C)$  car on n'a pas besoin d'étendre les changements de cartes en des isométries globales. Les deux membres de l'égalité sont donc deux isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  qui coïncident sur un ouvert non vide, elles sont donc égales.  $\square$

Soient  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  deux chemins reliant  $x_0$  à  $x$ ,  $(\varphi_i, U_i)_{i=0, \dots, k}$  et  $(\psi_i, V_i)_{i=0, \dots, m}$  des cartes correspondantes ( $\psi_0 = \phi_0$  car la première carte est fixée). Puisque  $S$  est simplement connexe, il existe  $H$  une homotopie relativement aux extrémités entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . L'image de  $H$  est compacte, donc on peut la recouvrir par un nombre fini de cartes  $(\chi_i, W_i)$ , de sorte que la seule carte recouvrant  $x_0$  soit  $(\varphi_0, U_0)$ . Soient  $U'_i = H^{-1}(U_i)$ ,  $V'_i = H^{-1}(V_i)$ ,  $W'_i = H^{-1}(W_i)$ . La famille  $(W'_i)$  est un recouvrement ouvert de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . On considère les fonctions, définies respectivement sur  $[0, 1] \times \{0\}$ ,  $[0, 1] \times \{1\}$ ,  $[0, 1] \times [0, 1]$  par  $g_0(x) = \max_i d(x, U'_i)^c$ ,

$g_1(x) = \max_i d(x, V_i^c)$ ,  $g_2(x) = \max_i d(x, W_i^c)$ . Ces fonctions sont continues, jamais nulles donc atteignent leurs minima, strictement positifs, et soit  $\varepsilon > 0$  le minimum des minima, et  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Soit  $C_{i,j}$  le carré  $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$  et  $(\xi_{i,j}, W_{i,j})$  une carte recouvrant  $H(C_{i,j})$  parmi les  $(\varphi_k, U_k)$  si  $j = 0$ , parmi les  $(\psi_k, V_k)$  si  $j = n - 1$ , parmi les  $(\chi_k, W_k)$  sinon. En particulier,  $(\xi_{0,j}, W_{0,j}) = (\varphi_0, U_0)$ . De telles cartes existent par définition de  $n$ .

Montrons que  $\text{iso}((\xi_{i,j})_i) \circ \xi_{n-1,j} = \text{iso}((\xi_{i,j+1})_i) \circ \xi_{n-1,j+1}$  au voisinage de  $x$ . Par le lemme précédent, on peut insérer dans le terme de gauche  $\xi_{i,j+1}$  entre  $\xi_{i,j}$  et  $\xi_{i+1,j}$  pour  $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ . En effet, les carrés correspondant ont un point d'intersection triple, donc les cartes aussi. Ensuite, on peut supprimer les  $\xi_{i,j}$  (entre  $\xi_{i-1,j+1}$  et  $\xi_{i,j+1}$ ) pour  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . On obtient ainsi  $\text{iso}((\xi_{i,j})_i) \circ \xi_{n-1,j} = \text{iso}(\xi_{0,j}, (\xi_{i,j+1})_i, \xi_{n-1,j}) \circ \xi_{n-1,j}$ . Or  $\xi_{0,j} = \varphi_0 = \xi_{0,j+1}$  d'où  $\text{iso}(\xi_{0,j}, (\xi_{i,j+1})_i, \xi_{n-1,j}) \circ \xi_{n-1,j} = \text{iso}((\xi_{i,j+1})_i) \circ \xi_{n-1,j+1} \circ \xi_{n-1,j}^{-1} \circ \xi_{n-1,j}$ . Or au voisinage de  $x$ , on a par définition  $\xi_{n-1,j+1} \circ \xi_{n-1,j}^{-1} \circ \xi_{n-1,j} = \xi_{n-1,j+1}$  d'où  $\text{iso}((\xi_{i,j})_i) \circ \xi_{n-1,j} = \text{iso}((\xi_{i,j+1})_i) \circ \xi_{n-1,j+1}$ .

Montrons que  $\text{iso}((\xi_{i,0})_i) \circ \xi_{n-1,0} = \text{iso}((\varphi_j)_j) \circ \varphi_k$ . En effet, par définition,  $(\xi_{i,0}, W_{i,0}) = (\varphi_{j_i}, U_{j_i})$  pour certains  $j_i$ , avec  $j_0 = 0$  et  $j_{n-1} = k$ . L'hypothèse d'intersection successive des  $W_{i,0}$  et les hypothèses sur les  $U_i$  impliquent que  $|j_{i+1} - j_i| \leq 1$ . On considère la plus courte sous-suite de  $(\xi_{i,0})_i$  telle que l'isométrie associée soit définie et égale à  $\text{iso}((\xi_{i,0})_i)$ . On la note encore  $(\xi_{i,0})_i$ . Il est alors impossible que  $j_{i+1} = j_i$  sinon on peut supprimer  $\xi_{i,0}$ , et s'il existe  $j_{i+1} = j_i - 1$ , on considère le plus petit  $i$  pour lequel cela se produit, il est non nul et on peut supprimer  $\xi_{i,0}$ . On a donc  $j_i = i$  d'où l'égalité souhaitée.

On a de même  $\text{iso}((\xi_{i,n-1})_i) \circ \xi_{n-1,n-1} = \text{iso}((\psi_j)_j) \circ \psi_m$  d'où  $\text{iso}((\varphi_i)_i) \circ \varphi_k = \text{iso}((\psi_j)_j) \circ \psi_m$ , donc  $D$  est bien définie, ce qui démontre l'existence d'une application développante. Elle est uniquement déterminée par le choix de  $x_0$  et  $\varphi_0$ , donc elle est unique à une isométrie de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  près.  $\square$

**Proposition 3.19.** *Si  $\tilde{S} \rightarrow S$  est le revêtement universel d'une surface hyperbolique compacte  $S$ , alors toute application développante de  $\tilde{S}$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  pour la structure hyperbolique relevée sur  $\tilde{S}$  est injective.*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  deux points distincts de  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{\gamma}$  un chemin qui les relie, qui se projette en un chemin  $\gamma$  de  $x$  à  $y$  sur  $S$  non trivial. Par le théorème 3.7, il existe un segment géodésique non trivial de  $x$  à  $y$  homotope à  $\gamma$  relativement aux extrémités. Cette homotopie se relève en une homotopie de  $\tilde{\gamma}$  à un segment géodésique de  $\tilde{x}$  à  $\tilde{y}$ , dont l'image par l'application développante est un segment localement géodésique, donc géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , donc simple, donc  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  ont des images distinctes par l'application développante, qui est donc injective.  $\square$



### 3.2.5 Difféomorphismes du pantalon

Un pantalon est une surface (topologique) homéomorphe à  $\Sigma_{0,3}$ , c'est-à-dire à une sphère privée de trois disques. Cette section établit la classification des difféomorphismes du pantalon à isotopie près.

On admet les résultats suivants.

**Théorème 3.20.** *Si  $M$  et  $N$  sont des variétés  $C^\infty$ , toute application continue de  $M$  en  $N$  est homotope à une application  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$ . Deux applications  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$  qui sont homotopes sont différentiablement homotopes.*

**Théorème 3.21** (théorème de Jordan–Schönflies). *Soit  $\gamma$  un lacet simple sur  $\mathbb{S}_2$ . Alors  $\mathbb{S}_2 \setminus \text{Im}(\gamma)$  est constituée d'exactly deux composantes simplement connexes.*

**Proposition 3.22** (Difféomorphismes du cercle). *Tout difféomorphisme du cercle  $\mathbb{S}_1$  préservant l'orientation est isotope à l'identité.*

Pour des démonstrations, voir par exemple respectivement [Pau, théorème 6.16, page 232], [Moi77, théorème 2, page 71] et [Hat02, théorème 1.7, page 29].

**Proposition 3.23** (Difféomorphismes du disque). *Les difféomorphismes du disque fixant le bord sont isotopes à l'identité.*

*Démonstration.* Soit  $f$  un tel difféomorphisme, dont on peut supposer qu'il fixe le centre du disque (quitte à composer par une transformation de Möbius). Alors  $H_0 = Id$ ,

$$H_t : \begin{cases} z \mapsto tf\left(\frac{z}{t}\right) \text{ si } |z| \leq t \\ z \mapsto z \text{ si } |z| > t \end{cases}$$

pour  $t \in ]0, 1]$ , définit une isotopie de l'identité à  $f$ . Pour obtenir une homotopie  $C^\infty$ , on utilise le théorème 3.20.  $\square$

On peut maintenant établir la classification.

**Théorème 3.24** (Difféomorphismes du pantalon). *Tous les difféomorphismes du pantalon préservant l'orientation et chaque composantes de bord sont isotopes à l'identité.*

*Démonstration.*

**Lemme 3.25.** *Deux chemins  $C^1$  simples dans le pantalon dont le vecteurs vitesse ne s'annulent pas, ayant leurs extrémités sur les mêmes composantes de bord, n'intersectant les composantes de bord qu'en leurs extrémités, sont isotopes. C'est aussi vrai sur le cylindre.*

*Démonstration.* Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins  $C^1$  simples sur le pantalon  $P$  intersectant  $\partial_1 P$  en une extrémité et  $\partial_2 P$  en l'autre, n'intersectant pas  $\partial_3 P$ . L'idée de la preuve consiste à contracter les trois composantes de bords en trois points de façon à se ramener au cas de deux chemins de mêmes extrémités dans le plan, puis à relever l'isotopie trouvée dans le pantalon.

On considère un plongement de  $P$  dans le bord  $C$  du cube unité, difféomorphe à  $\mathbb{S}_2$  (pour une structure différentielle induite par un homéomorphisme avec  $\mathbb{S}_2$ ), de sorte que chaque composante de bord  $\partial_i P$  du pantalon soit un cercle  $C_i$  inclus dans une face  $F_i$ , centré en  $A_i$  le centre de  $F_i$ , de rayon  $\frac{1}{2}$ . On note  $D_i$  le disque ouvert de bord  $C_i$ .

Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  ( $C^1$  suffit) de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  égale à  $x - \frac{1}{2}$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , et valant 1 sur  $[\frac{2}{3}, +\infty[$ , strictement croissante sur  $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ . On identifie  $F_i$  avec le carré unité dans le plan complexe. Soit

$$\rho_i : \begin{cases} F_i - D_i & \longrightarrow & F_i \\ z & \longmapsto & f(|z|)z \end{cases} .$$

L'application  $\rho_i$  est un difféomorphisme de  $F_i - \overline{D_i}$  dans  $F_i - \{A_i\}$ , et il préserve les secteurs angulaires en 0 (identifié à  $A_i$ ) car il préserve les demi-droites d'extrémité 0.

On peut « recoller »  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , et  $\rho_3$  en  $\rho$ , fonction  $C^\infty$  de  $P$  sur  $C$  tel que  $\rho|_{F_i - D_i} = \rho_i$ , et difféomorphisme de  $P - (\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \overline{D_3})$  sur  $C - \{A_1, A_2, A_3\}$ . On identifie  $C - \{A_1, A_2, A_3\}$  au plan  $\mathbb{R}^2$  privé de deux points  $A_1$  et  $A_2$  par un difféomorphisme. On note  $\alpha_i = \rho(\gamma_i)$ .

Les applications  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux chemins simples de  $\mathbb{R}^2$  d'extrémités  $A_1$  et  $A_2$ , or  $\mathbb{R}^2$  est simplement connexe donc il existe une homotopie  $C^1$  de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  relative aux extrémités, donc une isotopie  $C^1$   $h$  de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  relative aux extrémités, telle qu'à chaque instant, aucun vecteur vitesse ne s'annule. On note  $h_t$  le chemin donné par l'isotopie  $h$  à l'instant  $t$  ( $h_0 = \alpha_1$ ,  $h_1 = \alpha_2$ ).

Montrons que  $h$  se relève à  $P$  en une isotopie de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$ . Soit  $\tilde{h}_t = \rho^{-1}(h_t|_{]0,1[})$ . Montrons que le chemin ouvert  $\tilde{h}_t$  se prolonge continûment en 0 et en 1. On se place au voisinage de  $A_1$ , on utilisera la même méthode au voisinage de  $A_2$ . On note  $v_0(t) = h'_t(0) \neq 0$ . Alors  $\tilde{h}_t$  tend vers  $\frac{v_0(t)}{2|v_0(t)|}$  en 0. En effet,  $\rho_1$  préserve les secteurs angulaires en 0, or si on note  $\text{Sec}$  l'ensemble des secteurs angulaires en 0 contenant  $v_0(t)$ , et si  $S \in \text{Sec}$ , pour un temps  $s$  suffisamment petit, on a  $h_t(s) \in S$  donc  $\tilde{h}_t(s) \in S$ . De plus, par construction,  $d(\tilde{h}_t(s), D_1) \rightarrow 0$ , donc pour  $s \rightarrow 0$ ,  $\tilde{h}_t(s) \rightarrow \overline{D_1} \cap (\bigcap_{S \in \text{Sec}} S) = \frac{v_0(t)}{2|v_0(t)|}$ , ce qui conclut. On note encore  $\tilde{h}_t$  le prolongement de  $\tilde{h}_t$  en 0 et en 1. Puisque  $h$  est  $C^1$ , les  $\tilde{h}_t$  induisent une isotopie  $\tilde{h}$  de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$ , ce qui conclut.

Sur le cylindre, on peut faire la même démonstration en compactifiant  $\mathbb{R}^2$ , de façon à obtenir une sphère privé de deux points au lieu de trois.  $\square$

**Lemme 3.26.** *Soit  $C$  un cylindre,  $C_1$  une de ses composantes de bord,  $C_2$  l'autre composante de bord. Si  $f$  est un difféomorphisme de  $C_1$  isotope à l'identité par une isotopie  $h$ , alors  $f$  et  $h$  se prolongent sur  $C$  en  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  respectivement en un difféomorphisme de  $C$  fixant  $C_2$  et en une isotopie de  $\tilde{f}$  à l'identité fixant  $C_2$  à chaque instant.*

*Démonstration.* Le cylindre  $C$  est difféomorphe à  $[0, 1] \times \mathbb{S}_1$ , où  $C_1 = \{0\} \times \mathbb{S}_1$  et  $C_2 = \{1\} \times \mathbb{S}_1$ . On définit alors  $\tilde{f}(t, s) = (t, h_t(s))$  où  $h_t$  est l'isotopie  $h$  au temps  $t$ , et  $\tilde{h}_{t'}(t, s) = (t, h_{t(1-t') + t'}(s))$ . On vérifie immédiatement les propriétés voulues.  $\square$

**Lemme 3.27.** *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une surface  $S$  à bord dont une composante de bord est notée  $C_1$ . Si  $f$  préserve l'orientation et  $C_1$ , alors  $f$  est isotope à un difféomorphisme de  $S$  qui préserve l'orientation et qui fixe  $C_1$ .*

*Démonstration.* Le difféomorphisme  $f$  induit sur  $C_1$  un difféomorphisme préservant l'orientation. Par le théorème 3.22, puisque  $C_1$  est difféomorphe à un cercle, le difféomorphisme induit par  $f^{-1}$  sur  $C_1$  est isotope à l'identité, par une isotopie notée  $h$ . Soit  $\gamma$  une courbe « proche » de  $C_1$ , de façon à ce que  $\gamma$  et  $C_1$  délimitent un cylindre. Par le lemme précédent,  $h$  se prolonge à ce cylindre en une isotopie  $\tilde{h}$  de l'identité à un difféomorphisme du cylindre noté  $\tilde{f}^{-1}$ , fixant  $\gamma$  à chaque instant. Cette isotopie et ce difféomorphisme se prolongent à  $S$  par l'identité à l'extérieur du cylindre en une isotopie continue et un homéomorphisme de  $S$  noté  $g$ , qu'on peut supposer être un difféomorphisme par des arguments de convolution, et  $f$  est isotope à  $g \circ f$ , qui fixe  $C_1$ .  $\square$

**Lemme 3.28.** *Soit  $S$  une surface à bord, possédant au moins deux composantes de bord  $C_1$  et  $C_2$ , et soit  $\gamma$  un chemin simple reliant  $C_1$  et  $C_2$  en ne les intersectant qu'une fois. Soit  $S'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $\gamma$ ,  $C'$  sa composante de bord issue de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\gamma$ . Alors tout difféomorphisme de  $S$  fixant  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\gamma$  induit un difféomorphisme de  $S'$  fixant  $C'$ , et réciproquement.*

*Démonstration.* Les variétés à bord  $S - (C_1 \cup C_2 \cup \gamma)$  et  $S' - C'$  sont difféomorphes. Soit  $f$  un difféomorphisme de  $S$  fixant  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\gamma$ , alors  $f$  et son inverse induisent des difféomorphismes de  $S - (C_1 \cup C_2 \cup \gamma)$ , donc de  $S' - C'$ , qui se prolongent en des difféomorphismes de  $S'$  fixant  $C'$ , et de même réciproquement.  $\square$

**Lemme 3.29.** *Soit  $f$  un difféomorphisme du cylindre  $C$  préservant l'orientation et fixant  $\partial_1 C$ . Alors  $f$  est isotope à l'identité par une isotopie fixant  $\partial_1 C$  à chaque instant.*

*Démonstration.* Soit  $f$  un tel difféomorphisme. Soit  $\gamma$  un chemin vertical (pour le plongement usuel du cylindre dans  $\mathbb{R}^3$ ) reliant les deux composantes de bord du

cylindre  $C$ , d'extrémités  $A_1 \in \partial_1 C$  et  $A_2 \in \partial_2 C$ . On veut dans un premier temps isotoper  $f(\gamma)$  et  $\gamma$  par une isotopie fixant  $\partial_1 C$  à chaque instant.

En considérant un plongement de  $C$  dans le plan, on peut, de même que précédemment, contracter  $\partial_2 C$  en un point, de façon à envoyer  $C$  sur un disque fermé  $D$  (dont le bord  $C_1$  est difféomorphe à  $\partial_1 C$ ) de centre  $A_2$ , par une application  $C^1$  notée  $\rho$ .

L'application  $\rho|_{C-\partial_2 C}$  est un difféomorphisme sur  $D - \{A_2\}$ , donc  $f$  induit un difféomorphisme de  $D - \{A_2\}$  fixant le bord  $C_1$ , prolongeable par continuité en un difféomorphisme de  $D$ , qui fixe le bord  $C_1$  et le centre  $A_2$ , noté  $f_D$ . On note  $\alpha = \rho(\gamma)$ ,  $\beta = f_D(\alpha)$ , et on vérifie immédiatement que  $\beta = \rho(f(\gamma))$ . Les chemins  $\alpha$  et  $\beta$  ont pour extrémités  $A_1$  et  $A_2$ .

Par la proposition 3.23,  $f_D$  est isotope à l'identité par une isotopie qui fixe le bord  $C_1$  et le centre  $A_2$  à chaque instant, et cette isotopie induit une isotopie de  $\beta = f_D(\alpha)$  à  $\alpha$  relative aux extrémités. Par la construction de relèvements faite dans la démonstration du lemme 3.25, une isotopie de  $\beta$  à  $\alpha$  relative aux extrémités se relève en une isotopie de  $f(\gamma)$  à  $\gamma$  fixant  $A_1$ .

Par la proposition 3.6, cette isotopie se prolonge en une isotopie du cylindre fixant  $\partial_1 C$  à chaque instant, et quitte à composer par cette isotopie, on peut supposer que  $f$  fixe  $\gamma$ . Par le lemme 3.27, on peut supposer que  $f$  fixe aussi les composantes de bord, en choisissant sur chaque composante de bord des isotopies fixant les extrémités de  $\gamma$  à chaque instant, de façon à relever dans  $C$  des difféomorphismes fixant toujours  $\gamma$ .

La surface obtenue en découpant  $C$  selon  $\gamma$  est difféomorphe à un disque  $D$ , et par le lemme précédent,  $f$  induit sur  $D$  un difféomorphisme  $f_D$  fixant le bord, ce qui donne par la proposition 3.23 une isotopie de  $f_D$  à l'identité fixant le bord à chaque instant, qui se relève donc par le lemme précédent en une isotopie de  $f$  à l'identité fixant  $\partial_1 C$  à chaque instant, ce qui conclut. □

Soit maintenant  $f$  un difféomorphisme du pantalon  $P$  préservant l'orientation et chaque composante de bord. Soit  $\gamma_1$  un chemin  $C^1$  simple dont les vecteurs vitesse ne s'annulent pas, reliant deux composantes de bord en ne les intersectant qu'aux extrémités. Alors  $f(\gamma_1)$  est aussi un chemin simple, reliant les mêmes composantes de bord en ne les intersectant qu'une fois, donc par le lemme 3.25, il existe une isotopie de  $f(\gamma_1)$  à  $\gamma_1$ , qui s'étend par la proposition 3.6 en une isotopie du pantalon notée  $h$ . Quitte à composer  $f$  par cette isotopie, on peut supposer que  $f$  fixe  $\gamma_1$ .

De même que dans la preuve du lemme 3.29, on peut supposer que  $f$  fixe aussi  $\partial_1 P$  et  $\partial_2 P$ . On note  $C$  la surface obtenue en découpant  $P$  le long de  $\gamma_1$ , difféomorphe à un cylindre, et  $B$  la composante de bord de  $C$  issue de  $\partial_1 P$ ,  $\partial_2 P$  et  $\gamma_1$ . Par le lemme 3.28,  $f$  induit sur  $C$  un difféomorphisme  $f_S$  préservant l'orientation et fixant  $B$ , et par le lemme 3.29, ce difféomorphisme est isotope à l'identité par

une isotopie  $h$  fixant  $B$  à chaque instant. Par le lemme 3.28, cette isotopie se relève en une isotopie  $\tilde{h}$  de  $f$  à l'identité, ce qui conclut.  $\square$

### 3.3 Pantalons hyperboliques

**Définition 3.30** (pantalons hyperboliques). *On fixera dans toute la suite un pantalon  $P$ , de composantes de bord  $(\partial_i P)_{i=1,2,3}$ , et un pantalon hyperbolique sera par définition une structure hyperbolique sur  $P$ .*

L'objectif de cette partie est de calculer l'espace de Teichmüller du pantalon, ce qui nous permettra ensuite de calculer l'espace de Teichmüller de toutes les surfaces. On rappelle que si  $\gamma$  est un chemin sur une surface hyperbolique munie d'une structure  $\sigma$ ,  $\ell_\sigma(\gamma)$  désigne la longueur de  $\gamma$  pour la structure  $\sigma$ , définie dans la section 3.1.

**Théorème 3.31** (espace de Teichmüller du pantalon). *La fonction*

$$\begin{cases} \text{Teich}(P) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*)^3 \\ \sigma & \longmapsto & (\ell_\sigma(\partial_i P))_{1,2,3} \end{cases}$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* On commence par remarquer que cette application est bien définie. En effet,  $\ell_\sigma(\partial_i P)$  est bien définie (car ne dépend pas du paramétrage) sur l'espace des structures hyperboliques sur  $P$ , et si  $h$  est un homéomorphisme de  $P$  isotope à l'identité (en particulier  $h$  préserve les composantes de bord de  $P$ ), alors soit  $\gamma_i$  un paramétrage de  $\partial_i P$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  une subdivision de  $[0, 1]$  telle que  $\gamma_i([t_j, t_{j+1}])$  soit dans une carte  $\varphi_j$  de  $\sigma$ , on a

$$\begin{aligned} \ell_{h \cdot \sigma}(\partial_i P) &= \ell_{h \cdot \sigma}(h \circ \gamma_i) \\ &= \sum_0^n \ell((\varphi_j \circ h^{-1}) \circ (h \circ \gamma_i|_{[t_j, t_{j+1}]})) \\ &= \sum_0^n \ell(\varphi_j \circ \gamma_i|_{[t_j, t_{j+1}]}) \\ &= \ell_\sigma(\partial_i P) \end{aligned}$$

par définition de l'action de  $h$  et de la longueur. Par passage au quotient, l'application ci-dessus est donc bien définie.

Montrons la surjectivité. Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ , d'après le théorème 2.3 il existe un hexagone hyperbolique à angles droits  $H$  dont les côtés alternés ont pour longueurs  $a/2$ ,  $b/2$  et  $c/2$ . On recolle deux copies de  $H$  le long de leurs trois autres bords de

manière isométrique de façon à lui donner une structure hyperbolique de même que pour les recollements de polygones généraux. Le fait que les hexagones sont à angles droits montre que le recollement est bien muni d'une structure hyperbolique, et il est clair que les longueurs des composantes de bord du pantalon ainsi obtenu sont bien  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Montrons l'injectivité. Soit  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  trois géodésiques telles que  $\gamma_i$  relie  $\partial_{i+1}P$  et  $\partial_{i+2}P$ , de longueurs minimales. Elles existent par le théorème 3.7. Elles sont simples car de longueur minimale. Elles intersectent les bords en leurs extrémités orthogonalement, d'après le lemme 2.8.

Montrons qu'elles sont disjointes. Si par l'absurde  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  s'intersectent, soit  $x$  un point d'intersection. Il ne peut y avoir qu'un seul point d'intersection, sinon  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  formeraient un bigone (voir la démonstration du critère du bigone), simplement connexe, qui se relèverait en un bigone géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , ce qui est impossible.

Soit  $x$  appartient à  $\partial_3P$ , auquel cas dans une carte locale, ce sont des géodésiques orthogonales à une troisième géodésique (le bord) en un même point, donc elles sont confondues dans la carte, donc les images de leur relevées dans le revêtement universel à partir de  $x$  par l'application développante sont confondues (car dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , deux géodésiques distinctes s'intersectent en au plus un point), donc elles sont confondues, ce qui est absurde. Soit il n'appartient pas à  $\partial_3P$ , auquel cas si on note  $y$  et  $z$  les extrémités de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur  $\partial_3P$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  forment un triangle avec des sous-chemins de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\partial_3P$ , ayant un angle droit en  $y$  et un autre en  $z$ . Soit  $xyz$  est simplement connexe, auquel cas on peut le relever en un triangle géodésique à deux angles droits dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , ce qui est absurde, soit il ne l'est pas auquel cas il contient une des composantes de bord  $\partial_2P$  ou  $\partial_1P$ , ce qui est impossible car  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont une extrémité sur une de ces composantes, et devraient donc réintersecter le triangle, donc  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  auraient au moins deux points d'intersection.

On note  $A_i$  et  $B_i$  les extrémités de  $\gamma_i$  ( $A_i \in \partial_{i+1}P$ ,  $B_i \in \partial_{i+2}P$ ). Les  $\gamma_i$  n'intersectent les bords qu'en leurs extrémités, sinon en lisant dans une carte au voisinage d'une autre intersection, on obtiendrait que  $\gamma_i$  « traverse » le bord. Les bords ne s'intersectent pas entre eux. Le lacet  $A_1B_1A_2B_2A_3B_3 = \gamma$ , obtenu comme concaténation des chemins  $\gamma_i$  et de segments géodésiques  $B_iA_{i+1}$  choisis sur les composantes de bord  $\partial_{i+2}P$  (il y en a deux possibles), est donc simple, et en considérant un plongement du pantalon dans la sphère  $\mathbb{S}_2$ , on obtient par le théorème de Jordan–Schönflies deux composantes simplement connexes de  $\mathbb{S}_2 \setminus \gamma$ . On en choisit une, si elle contient une composante de bord  $\partial_iP$ , en changeant le choix de  $B_iA_{i+1}$ , elle ne le contient plus, et de cette façon, on obtient un chemin  $\gamma$  qui délimite une partie simplement connexe dans le pantalon. Elle se relève alors dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  en un hexagone hyperbolique à angles droits  $\mathcal{H}_1$ , caractérisé, d'après le théorème 2.3 par la longueur de ses côtés  $B_1A_2$ ,  $B_2A_3$  et  $B_3A_1$ . On obtient de la même façon un

autre hexagone hyperbolique à angles droits  $\mathcal{H}_2$ , en renversant les choix de  $B_i A_{i+1}$ , cet hexagone ayant dans le pantalon les mêmes côtés  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  et  $A_3 B_3$  que  $\mathcal{H}_1$ . Il est donc isométrique à  $\mathcal{H}_1$ , et en particulier,

$$\text{long}(B_i A_{i+1}) = \frac{\text{long}(\partial_{i+2} P)}{2}.$$

Les hexagones hyperboliques à angles droits obtenus sont caractérisés par les longueurs des bords du pantalon. Le pantalon hyperbolique  $P$  est obtenu par recollement de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , par construction.

Soit une autre structure hyperbolique sur le pantalon, avec les mêmes longueurs de bords,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$  les deux hexagones isométriques obtenus par la construction ci-dessus. Alors  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$  sont isométriques, donc les deux structures hyperboliques sur le pantalon sont isométriques, par une isométrie préservant l'orientation et les composantes bord. Cette isométrie est donc un difféomorphisme du pantalon, isotope à l'identité d'après le théorème 3.24, ce qui conclut.  $\square$

### 3.4 Espace de Teichmüller de la surface de genre $g$

Après avoir calculé l'espace de Teichmüller du pantalon, nous allons traiter le cas des surfaces quelconques. Plus précisément, nous montrerons dans cette partie le résultat principal de ce mémoire, à savoir que l'espace de Teichmüller de  $\Sigma_g$  est en bijection avec  $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ .

Dans toute la suite, on fixe une orientation sur  $\Sigma_g$ . On notera aussi  $S$  la surface  $\Sigma_g$ .

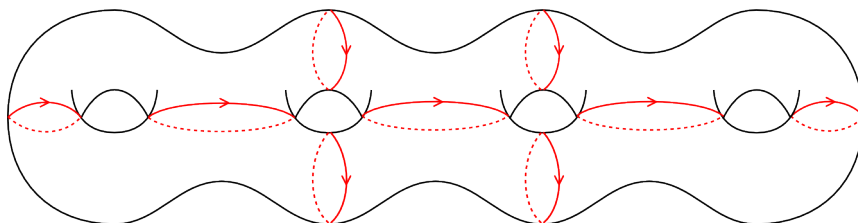


FIGURE 6 – Une décomposition en pantalons de la surface de genre 4

Soit  $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, 3g-3 \rrbracket}$  une numérotation quelconque des lacets (orientés) sur  $S$  indiqués en rouge sur la figure 6 (généralisée de façon évidente à une surface de genre  $g$ ). Cette disposition de lacets est telle que les adhérences des composantes connexes du complémentaire sont homéomorphes à des pantalons dont les composantes de bord sont des  $\gamma_i$ . À chaque  $\gamma_i$  on associe un autre lacet (orienté également)  $c_i$  de la façon suivante : notons  $P_{i,+}$  et  $P_{i,-}$  les deux pantalons ayant  $\gamma_i$  comme composante de bord, la réunion de  $\gamma_i$  et des intérieurs de  $P_{i,+}$  et de  $P_{i,-}$  donne un ouvert de  $S$

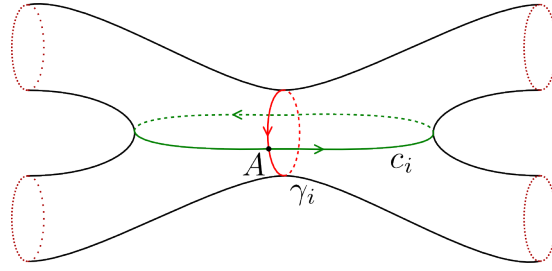


FIGURE 7 – La courbe  $c_i$  permettant de calculer le paramètre de torsion autour d’une géodésique de la décomposition

homéomorphe (et même isotope) à celui de la figure 7 et  $c_i$  est la courbe (définie à homotopie près) correspondante sur cette même figure (en vert). D’après le critère du bigone 3.11, les nombres d’intersection sur la figure sont minimaux, à savoir que les  $\gamma_i$  ne s’intersectent pas entre eux et  $c_i$  intersecte  $\gamma_i$  deux fois mais n’intersecte pas les autres  $\gamma_j$ .

Soit  $\sigma$  une structure hyperbolique sur  $\Sigma_g$ , on note  $S_\sigma$  la surface  $\Sigma_g$  munie de la structure hyperbolique  $\sigma$ . D’après le théorème 3.7 appliqué aux classes d’homotopie des lacets, on peut homotoper (donc isotoper) dans  $S_\sigma$  les  $\gamma_i$  et les  $c_i$  à des uniques géodésiques  $\gamma_{i,\sigma}$  et  $c_{i,\sigma}$  pour la structure hyperbolique  $\sigma$  et d’après la proposition 3.12, les nombres d’intersection sont conservés par minimalité.

Montrons que les surfaces obtenues en découpant  $S_\sigma$  le long des  $\gamma_{i,\sigma}$  sont homéomorphes à des pantalons. Soient  $S_i \cong \Sigma_{g_i, n_i}$  les surfaces obtenues, pour  $1 \leq i \leq k$ .  $n_i$  est toujours supérieur ou égal à 1 sinon  $S_i$  serait une composante connexe de  $\Sigma_g$ . On rappelle que découper selon un lacet simple ne change pas la caractéristique d’Euler totale, et que la caractéristique d’Euler de  $\Sigma_{g,n}$  est  $2 - 2g - n$ . Ainsi, on a :

$$2k - 2 \sum_i g_i - \sum_i n_i = 2 - 2g$$

or il y a  $6g - 6$  composantes de bord (deux fois plus que de courbes selon lesquelles on découpe), ce qui donne

$$k - (2g - 2) = \sum_i g_i.$$

Puisque le genre d’une surface est toujours positif, il y a au moins  $2g - 2$  surfaces parmi les  $S_i$  de genre 0, or aucune ne peut être homéomorphe à une sphère, un disque ou un cylindre car les  $\gamma_{i,\sigma}$  ne sont pas homotopes à des points ni homotopes entre eux, donc chacune de ces surfaces a au moins 3 composantes de bord, soit au moins  $6g - 6$  composantes de bord en tout. Comme il y a exactement  $6g - 6$  composantes de bord, on en déduit que toutes les surfaces  $S_i$  sont de genre 0 et



ont exactement 3 composantes de bord, donc elles sont toutes homéomorphes à des pantalons.

Les longueurs des géodésiques  $\gamma_{i,\sigma}$ , notées  $\ell_i(\sigma) > 0$  seront les premiers paramètres dans la bijection de  $\text{Teich}(S)$  dans  $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ . Les  $3g - 3$  autres paramètres seront des « paramètres de torsion » décrivant comment la structure des pantalons a été « tournée » avant les recollements.

Soit  $i \in \llbracket 1; 3g - 3 \rrbracket$ . Soient  $P_-$  et  $P_+$  les deux pantalons (topologiques) de la famille  $(S_j)$  qui contiennent  $\gamma_{i,\sigma}$ . On les munit respectivement d'homéomorphismes  $\varphi_{\pm} : P_{\pm} \rightarrow P$  envoyant  $\gamma_{i,\sigma}$  sur  $\partial_1 P$  (la distinction entre  $P_+$  et  $P_-$  est faite grâce à l'orientation de  $\gamma_{i,\sigma}$ ). Soit  $c$  un lacet de  $P_- \cup P_+$  dans la classe d'homotopie de  $c_{i,\sigma}$ , en position minimale avec  $\gamma_{i,\sigma}$ . On note  $A$  le point d'intersection de  $\gamma_{i,\sigma}$  et  $c$  tel que l'orientation de  $\gamma_{i,\sigma}$  suivie de celle de  $c$  donne celle de  $S$ , et on suppose que  $\varphi_+(A) = \varphi_-(A)$ . En reparamétrisant  $c$  et en composant par  $\varphi_{\pm}$ , on en déduit deux chemins  $c_{\pm} : [0, 1] \rightarrow P$  tels que  $c_{\pm}(0) = A$ ,  $c_{\pm}(1) \in \partial_1 P$  et  $c_{\pm} ]0, 1[ \subset \overset{\circ}{P}$ .

On considère  $\sigma_{\pm}$  les structures hyperboliques sur  $P$  induites par celle de  $S$  et par les applications  $\varphi_{\pm}$ ; on note  $h_{\pm}$  les géodésiques (pour  $\sigma_{\pm}$ ) de  $P$  de longueur minimale dans la classe d'homotopie laissant les extrémités sur  $\partial_1 P$  de  $c_{\pm}$  (qui existent et sont uniques d'après le corollaire 3.10). On considère  $H_{\pm}$  des homotopies associées, allant de  $c_{\pm}$  à  $h_{\pm}$ . On pose  $B_{\pm} = H_{\pm}(1, 0) = h_{\pm}(0)$ .  $H_{\pm}(\cdot, 0) = \gamma'_{\pm}$  est un chemin d'extrémités  $A$  et  $B_{\pm}$ , inclus dans  $\gamma_{i,\sigma}$ .

On définit les deux demi-paramètres de torsion  $d_{\pm}$  calculés par rapport à  $c$  de la façon suivante : on peut munir un revêtement universel orienté de  $\partial_1 P$  (qui est donc homéomorphe à une droite) d'une métrique de façon à ce que la projection sur  $\partial_1 P$  soit localement isométrique (par exemple en considérant la restriction de l'application développante du pantalon à  $\partial_1 P$ ). Soit alors  $\tilde{\gamma}'_{\pm}$  un relevé de  $\gamma'_{\pm}$  dans un tel revêtement universel de  $\partial_1 P$ , d'extrémités  $\tilde{A}_{\pm}$  et  $\tilde{B}_{\pm}$ . On pose alors  $d_{\pm} = d(\tilde{A}_{\pm}, \tilde{B}_{\pm})$ , la distance étant une distance algébrique dont le signe est calculé grâce à l'orientation de  $\partial_1 P$ .

La distance algébrique  $d_{\pm}$  ne dépend pas du relevé de  $\gamma'_{\pm}$  choisi, puisque ceux-ci diffèrent d'une isométrie, ni de l'homotopie  $H_{\pm}$  choisies par propriété des revêtements universels.

On peut ainsi définir le paramètre de torsion calculé par rapport à  $c$  par

$$\theta_{i,\sigma} = 2\pi \frac{d_+ - d_-}{\ell_i}.$$

**Remarque 3.32.** *Le paramètre de torsion  $\theta_{i,\sigma}$  est congru à  $\frac{2\pi}{\ell_i} d(B_+, B_-)$  modulo  $2\pi$ , où la distance est la distance algébrique dans  $\gamma_i$ , ce qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $c$  (qui est par hypothèse celle de  $c_{i,\sigma}$ ), car  $h_{\pm}$  est défini dans une classe d'homotopie, et  $B_{\pm} = h_{\pm}(0)$ .*

On définit alors le paramètre de torsion autour de la géodésique  $\gamma_{i,\sigma}$  comme le paramètre de torsion calculé par rapport à  $c_{i,\sigma}$ .

**Théorème 3.33** (espace de Teichmüller de la surface de genre  $g$ ). *L'application*

$$\begin{cases} \text{Hyp}(\Sigma_g) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \\ \sigma & \longmapsto & (l_1, \dots, l_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3}) \end{cases}$$

que l'on vient de définir passe au quotient en une bijection de  $\text{Teich}(\Sigma_g)$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ .

*Démonstration.* Montrons la surjectivité de cette application. Pour cela, étant donné des paramètres de longueur et une décomposition en pantalons de  $S$ , on va fixer une structure hyperbolique  $\sigma$  ayant ces paramètres de longueur (ce qui est possible en recollant des pantalons hyperboliques ayant les bons paramètres de longueur), puis pour obtenir les paramètres de torsion voulus, on va tordre les pantalons de la décomposition de  $S$  avant de les recoller, induisant ainsi les torsions voulues sur la structure hyperbolique recollée.

Sur chaque  $\gamma_i$ , on choisit un point noté  $A_i$ . On se donne  $l_i \in (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$  des paramètres de longueur.

On fixe des difféomorphismes  $\varphi_{i,\pm}$  de  $P_{i,\pm}$  vers  $P$ , et on munit  $P$  de structures hyperboliques  $\sigma_{i,\pm}$  de façon à ce que la longueur de toute composante de bord  $\gamma_k$  de  $P_{i,\pm}$  soit  $l_k$ , et que  $\varphi_{i,+}^{-1} \circ \varphi_{i,-}$  soit une isométrie sur  $\gamma_i$  fixant  $A_i$ . De telles structures hyperboliques existent par le théorème 3.31.

Dans la famille  $(P_{i,\pm})$ , chaque pantalon apparaît trois fois (une fois pour chacune de ses composantes de bord). On choisit ci-dessus la même structure hyperbolique pour les trois occurrences du même pantalon (topologique).

On définit  $\sigma$  la structure hyperbolique sur  $S$  obtenue par recollement des structures  $\sigma_{i,\pm}$  grâce aux  $\varphi_{i,\pm}$ .

On peut définir alors  $c_{i,\sigma}$  de même que précédemment (ici,  $\gamma_{i,\sigma} = \gamma_i$  par construction).

On choisit dans  $P_{i,+}$  une courbe  $\gamma_{i,+}$  qui délimite avec  $\gamma_i$  un cylindre, et un difféomorphisme  $f_i$  de ce cylindre dans le cylindre  $[0, 1] \times \mathbb{S}_1$  préservant l'orientation, envoyant  $\gamma_i$  sur  $\{1\} \times \mathbb{S}_1$  isométriquement (où  $\mathbb{S}_1$  est muni de la métrique géodésique usuelle).

On note  $r_\alpha : \begin{cases} \mathbb{S}_1 & \longrightarrow & \mathbb{S}_1 \\ e^{it} & \longmapsto & e^{i(t+\alpha)} \end{cases}$  la rotation du cercle d'angle  $\alpha$ . Sur le cylindre  $[0, 1] \times \mathbb{S}_1$ , on définit la torsion  $R_\alpha$  d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  par :  $R_\alpha(t, s) = (t, r_{t\alpha}(s))$ .

Sur le pantalon  $P_{i,+}$ , on définit la torsion d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  (relative à la composante de bord  $\gamma_i$ ) :  $Tw_\alpha^{(i)} = f_i^{-1} \circ R_\alpha \circ f_i$ , difféomorphisme de  $P_{i,+}$  en prolongeant par

l'identité en dehors du cylindre délimité par  $\gamma_{i,+}$  et  $\gamma_i$ . On note  $\alpha.\sigma_{i,+}$  la structure  $Tw_\alpha^{(i)}.\sigma_{i,+}$ .

La torsion sur  $P_{i,+}$  induit ainsi une nouvelle structure sur  $S$ , notée  $\alpha^{(i)}.\sigma$ .

On note  $\theta_{i,0}$  le paramètre de torsion de  $\sigma$  en  $\gamma_i$ . Calculons le paramètre de torsion de  $\alpha^{(i)}.\sigma$  en  $\gamma_i$ , noté  $\alpha_i$ . Le difféomorphisme  $Tw_\alpha^{(i)}$  agit sur  $h_{i,+}$  en déplaçant ses extrémités dans le sens de  $\gamma_i$  d'une distance congrue à  $\frac{\alpha l_i}{2\pi}$  modulo  $l_i$ , donc  $\alpha_i$  est congru à  $\theta_{i,0} + \alpha$  modulo  $2\pi$ , d'après la remarque 3.32.

Montrons que le paramètre de torsion  $\alpha_i$  varie continûment avec le paramètre de la torsion  $R_\alpha$ .

**Lemme 3.34.** *Soit  $H$  une isotopie de lacets dans  $P_{i,+} \cup P_{i,-}$  allant de  $c_{i,\sigma}$  à un lacet  $c'_i$ , telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t, \cdot)$  intersecte  $\gamma_i$  exactement deux fois. Alors le paramètre de torsion calculé par rapport à  $c'_i$  est le même que le paramètre de torsion calculé par rapport à  $c_{i,\sigma}$ .*

*Démonstration.* En relevant  $c'_i$  et l'isotopie dans le revêtement universel de  $\gamma_i$ , on obtient que le paramètre de torsion calculé pour le lacet  $H(t, \cdot)$  varie continûment avec  $t$ . Or, par la remarque 3.32, il est constant modulo  $2\pi$ , donc il est constant, ce qui conclut.  $\square$

**Lemme 3.35.** *Soit  $H'$  une isotopie de l'identité de  $P_{i,+}$  vers un homéomorphisme de  $P_{i,+}$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H'(t, \cdot)$  se restreint en une isométrie sur  $\gamma_i$ . On note  $\sigma_t$  la structure obtenue en recollant  $\sigma_{i,-}$  et  $H'(t, \cdot).\sigma_{i,+}$ , alors le paramètre de torsion en  $\gamma_i$  de  $\sigma_t$  est une fonction continue de  $t$ .*

*Démonstration.* Par un argument utilisant le lemme de fermeture d'Anosov, on peut montrer que  $c_{i,\sigma_t}$  varie continûment en fonction de  $t$  (car on fait varier la structure hyperbolique « continûment »), or à chaque instant,  $c_{i,\sigma_t}$  et  $\gamma_i$  sont des géodésiques pour la structure  $\sigma_t$  donc ces lacets s'intersectent minimalement, exactement deux fois, d'après la proposition 3.12.

Il existe donc une isotopie de lacets  $H''$  dans  $P_{i,+} \cup P_{i,-}$  allant de  $c_{i,\sigma_1}$  à  $c_{i,\sigma} = c_{i,\sigma_0}$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H''(t, \cdot)$  intersecte  $\gamma_i$  exactement deux fois, donc par le lemme 3.34 (quitte à ne regarder l'isotopie  $H''$  que jusqu'à l'instant  $t$ ), le paramètre de torsion en  $\gamma_i$  de  $\sigma_t$  est égal au paramètre de torsion en  $\gamma_i$  de  $\sigma_t$  calculé par rapport à  $c_{i,\sigma_0}$ .

On note  $h_{\pm,\sigma_t}$  (respectivement  $d_{\pm,t}$  et) les géodésiques  $h_\pm$  (respectivement les demi-paramètres de torsion et l'homotopie) définis dans le calcul du paramètre de torsion en  $\gamma_i$  de  $\sigma_t$  par rapport au lacet  $c_{i,\sigma_0}$ . On note  $H_\pm = H_{\pm,0}$  les homotopies de  $c_{\pm,i,\sigma}$  à  $h_{\pm,\sigma}$  définies dans celui de  $\sigma = \sigma_0$ . Alors puisque la structure hyperbolique sur  $P_{i,-}$  n'est pas modifiée au cours du temps,  $h_{-,\sigma_t} = h_-$ , et par définition de l'action d'un homéomorphisme sur une structure hyperbolique,  $h_{+,\sigma_t} = H'(t, h_+)$ , donc  $d_{-,t} = d_{-,0}$  et la composition des homotopies  $H_+$  et  $H'$  donne une homotopie

de  $c_{i,\sigma}$  à  $h_{+,\sigma_1}$ , qui permet (en l'arrêtant à  $h_{+,\sigma_i}$ ) de calculer les demi-paramètres de torsion  $d_{+,t}$ . Les demi-paramètres  $d_{+,t}$  varient donc continûment par rapport à  $t$ , et donc les paramètres de torsion aussi, ce qui conclut.  $\square$

Puisque  $Tw_\alpha^{(i)}$  est isotope à l'identité, on obtient en particulier que  $\alpha_i$  varie continûment avec le paramètre de la torsion  $R_\alpha$ , or  $\alpha_i$  est congru à  $\theta_{i,0} + \alpha$  modulo  $2\pi$ , et pour  $\alpha = 0$ , on a  $\alpha_i = \theta_{i,0}$ , donc on a toujours  $\alpha_i = \theta_{i,0} + \alpha$ . On a donc montré que la torsion du pantalon hyperbolique  $P_{i,+}$  par l'homéomorphisme  $Tw_\alpha^{(i)}$  augmente le paramètre de torsion de la structure hyperbolique recollée  $\sigma$  en  $\gamma_{i,\sigma}$  de  $\alpha$ .

Par définition de  $Tw_\alpha^{(i)}$ , le paramètre de torsion de  $\alpha^{(i)}.\sigma$  en  $\gamma_j$  pour  $j \neq i$  est constant en tant que fonction de  $\alpha$  modulo  $2\pi$ , or il varie continûment, donc il est constant. La torsion en  $i$  ne modifie donc pas les paramètres de torsion en  $j \neq i$ .

On obtient donc que pour tout choix de paramètres de torsion  $(\theta_i)$ , il existe des paramètres  $(\alpha_i)$  tels que la structure  $\alpha_1^{(1)}.\alpha_2^{(2)}.\dots.\alpha_{3g-3}^{(3g-3)}.\sigma$  sur  $S$  possède ces paramètres de torsion, et les paramètres de longueurs fixés précédemment, ce qui conclut pour la surjectivité.

Pour montrer l'injectivité, étant données deux structures hyperboliques sur  $S$  ayant les mêmes paramètres, on va montrer qu'on peut passer d'une structure à l'autre en faisant agir un homéomorphisme isotope à l'identité, sachant que cela est possible dans des pantalons. Le problème est de recoller les homéomorphismes isotopes à l'identité sur les pantalons pour obtenir un homéomorphisme isotope à l'identité sur  $S$ . On va montrer que, quitte à tordre les pantalons, on peut recoller les homéomorphismes des pantalons le long de leurs bords.

Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux structures hyperboliques sur  $S$  dont les paramètres de longueur et de torsion sont les mêmes. Quitte à composer par un difféomorphisme de  $S$  isotope à l'identité, on peut supposer qu'elles induisent la même décomposition en pantalons hyperboliques.

Étudions la situation sur deux pantalons  $P_+$  et  $P_-$  recollés le long de  $\gamma$ . Par le théorème 3.31, les structures  $\sigma$  et  $\sigma'$  induisent sur  $P_+$  et  $P_-$  des difféomorphismes isotopes à l'identité, respectivement  $f_+$  et  $f_-$  tels que  $f_+.\sigma_+ = \sigma'_+$  et  $f_-.\sigma_- = \sigma'_-$ , dont on note les isotopies à l'identité respectivement  $H_+$  et  $H_-$ . A chaque instant  $t$ , la structure recollée à partir de  $H_{+,t}.\sigma_+$  et  $H_{-,t}.\sigma_-$  possède un paramètre de torsion en  $\gamma$  noté  $\theta_t$ . Par définition, puisque  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont mêmes paramètres de torsion,  $\theta_0 = \theta_1$ . Le paramètre de torsion varie continûment avec le temps d'après le lemme 3.35, donc  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}$  est une isotopie dans  $P_+$  de  $f_+$  à l'identité.

Montrons que  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}|_\gamma = H_{-,t}|_\gamma$ . La structure recollée à partir de  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}|_\gamma.\sigma_+$  et  $H_{-,t}.\sigma_-$ , notée  $\sigma_t$ , possède un paramètre de torsion en  $\gamma$  égal à  $(\theta_0 - \theta_t) + \theta_t = \theta_0$ , d'après le calcul précédent de la torsion induite par  $Tw_\alpha$ .

Les géodésiques  $h_{-,t}$  dans  $P_-$  et les géodésiques  $h_{+,t}$  dans  $P_+$  (définies comme précédemment par rapport aux structures  $\sigma_t$ ) ont leurs extrémités à la même distance quel que soit  $t$ , d'après la remarque 3.32, et puisque le paramètre de torsion ne dépend pas de  $t$ . Puisque  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}|_\gamma$  et  $H_{-,t}|_\gamma$  agissent par isométries sur  $\gamma$ , on en déduit que leur action est la même, soit  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}|_\gamma = H_{-,t}|_\gamma$ .

On peut donc recoller  $Tw_{\theta_0-\theta_t} \circ H_{+,t}$  et  $H_{-,t}$  en un homéomorphisme de  $P_+ \cup P_-$ , ce qui donne une isotopie de  $P_+ \cup P_-$  envoyant la structure  $\sigma$  sur la structure  $\sigma'$ . En faisant de même sur tous les recollements de pantalons, on obtient une isotopie de  $S$  envoyant  $\sigma$  sur  $\sigma'$ , ce qui montre que l'application définie dans l'énoncé du théorème 3.33 passe au quotient dans l'espace de Teichmüller en une application injective, ce qui conclut.  $\square$

## Références

- [Moi77] E. MOISE – « Geometric topology in dimensions two and three », Springer–Verlag, 1977
- [Thu97] W. THURSTON – « Three dimensional geometry and topology », Princeton University Press, 1997
- [Pau] F. PAULIN – « Topologie algébrique élémentaire », notes de cours de la FIMFA disponibles à l'adresse <http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/topo%20algebrique01-10Paulin.pdf>
- [Hat02] A. HATCHER – « Algebraic topology », Cambridge University Press, 2002
- [Far10] B. FARB et D. MARGALIT – « A primer on mapping class groups », disponible à l'adresse <http://www.math.utah.edu/~margalit/primer>
- [Hir76] M. W. HIRSCH – « Differential topology », Springer–Verlag, 1976
- [Mun60] J. MUNKRES – « Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms », Ann. of Math. 72, (1960), 521-554