

Modélisation d'une vague d'expansion humaine

Adrien Kuntz & Sylvain Wolf
sous la direction de Vincent Calvez

Mercredi 15 juin 2016

Résumé

Nous étudions l'expansion de l'agriculture et des paysans en Europe lors de la période néolithique. En effet, jusqu'alors, deux types de modèles étaient proposés : un modèle de diffusion culturelle (*cultural diffusion*) et un modèle dit *demic diffusion*. Nous regardons ici ce type de diffusion selon lequel les agriculteurs se seraient déplacés de manière dispersée en chassant les populations déjà présentes. Dans ce travail, nous proposons une modélisation de cette expansion humaine et montrons que la population a pu se déplacer sous forme de front d'onde avec une vitesse de l'ordre de 1 km/an, à partir d'un centre situé au moyen-orient. Ces résultats sont compatibles avec les observations archéologiques effectuées en Europe et au moyen-orient. Enfin, nous proposons une modélisation numérique de notre étude théorique pour voir l'influence des différents paramètres introduits (le taux de mortalité, le taux de fécondité...) sur la vague d'expansion humaine.

Introduction

L'étude de l'expansion des paysans au néolithique a été le thème de nombreuses recherches en biologie, physique, archéologie mais aussi en mathématiques. Jusqu'à présent, deux modèles de diffusion étaient proposés : un modèle dit *cultural diffusion* selon lequel les paysans se seraient déplacés par motivation culturelle en s'intégrant dans des communautés déjà présentes, et un modèle dit *demic diffusion* selon lequel le déplacement des paysans se serait fait par remplacement de communautés déjà existantes ou vers des zones inhabitées. Nous nous intéressons ici au type dit *demic diffusion*, pour lequel une modélisation mathématique peut être proposée. Le modèle de *cultural diffusion* est en revanche plus difficile à appréhender car des phénomènes purement humains ou culturels peuvent apparaître.

Dans *The Dawn of European Civilisation*, Childe a été le premier à présenter un modèle de *demic diffusion*. S'en sont suivies des mesures archéologiques en Europe et au moyen-orient. Ces résultats ont prédit une vitesse moyenne de déplacement de 1 km/an. Le déplacement se serait effectué du Sud-est vers le Nord-ouest de l'Europe. Les biologistes estiment que les paysans du moyen-orient auraient contribué à au moins la moitié des gènes des Européens, indiquant un réel déplacement du moyen-orient vers le coeur de l'Europe. Par ailleurs, des études génétiques ont été menées et plaident plutôt en faveur de la *demic diffusion*. Cependant, ces analyses seules ne peuvent mener avec certitude à une conclusion.

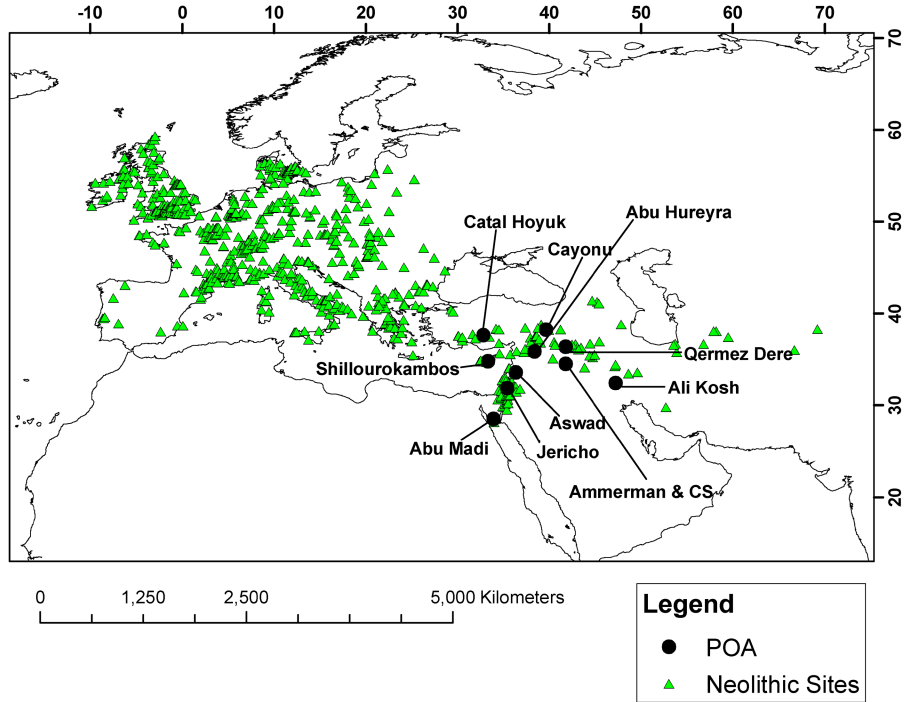


FIGURE 1 – Sites archéologiques néolithiques étudiés par les archéologues [3]

Nous proposons dans ce travail une modélisation mathématique de cette vague d’expansion humaine du néolithique. L’objectif principal est d’étudier la vitesse de propagation de la vague d’expansion humaine trouvée dans l’article *Tracing the origin and spread of Agriculture in Europe* :

$$v = \frac{\sqrt{am}}{1 + \frac{aT}{2}}$$

où a désigne la croissance de la population, m la mobilité et T la durée de vie moyenne.

Nous essaierons également de confronter nos résultats aux données archéologiques données dans l’article [3].

Dans un premier temps, nous décrivons la modélisation choisie. Puis, nous proposons une résolution de l’équation de réaction-diffusion avec retard obtenue. Enfin, nous présentons une résolution numérique de cette équation et discutons de l’influence des paramètres biologiques sur ce résultat.

Table des matières

1	Modélisation du phénomène	4
2	Existence de solutions sous forme de front d'onde	5
2.1	Position du problème	5
2.2	Construction d'une solution à partir de sur et sous-solutions	7
2.3	Construction de sur et sous-solutions	12
3	Modélisation numérique	17
4	Discussion	19
4.1	Comparaison des modèles	21
4.1.1	Étude de la vitesse asymptotique pour des faibles retards	21
4.1.2	Comparaison avec les données archéologiques	23
4.2	Influence des paramètres sur nos résultats	23
A	Code Python	24

1 Modélisation du phénomène

On s'intéresse ici à une densité de population fonction du temps, de l'espace, et de la tranche d'âge considérée. Nous allons séparer cette population en deux parties : les individus matures, qui se déplacent pour former de nouvelles colonies, et les individus immatures, qui restent immobiles durant tout le temps de leur croissance. Cela introduira un retard dans l'équation différentielle qui régit la densité de population.

Soit $u(t, a, x)$ la densité de population à l'instant $t \geq 0$, à l'âge $a \geq 0^1$ et à la position $x \in \mathbb{R}^n$ (on ne s'intéresse pas ici au cas d'un domaine borné). On fait les hypothèses naturelles $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |u(t, a, x)| < \infty$ et $\lim_{a \rightarrow \infty} |u(t, a, x)| = 0$. Faisons un bilan de population pendant un instant dt :

$$u(t + dt, a + dt, x) - u(t, a, x) = -\operatorname{div} J dt - d(a) dt u$$

où J est le flux de population donné par la loi de Fick : $J(t, a, x) = -D(a) \nabla u(t, a, x)$, $D(a)$ est le coefficient de diffusion à l'âge a et $d(a)$ est le taux de mortalité à l'âge a . On trouve donc l'équation suivante régissant la densité de population :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = D(a) \Delta u - d(a) u \quad (1)$$

Mais nous cherchons une équation portant uniquement sur la densité de population des individus matures. On dénote par $r \geq 0$ le temps de maturation d'un individu. La population mature totale est donnée par :

$$w(t, x) = \int_r^\infty u(t, a, x) da$$

Par conséquent, en échangeant dérivation et intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \int_r^\infty \left[-\frac{\partial u}{\partial a} + D(a) \Delta u - d(a) u \right] da \\ &= u(t, r, x) + \int_r^\infty [D(a) \Delta u - d(a) u] da \end{aligned}$$

Pour aller plus loin nous avons besoin de faire des hypothèses sur la forme du coefficient de diffusion et du taux de mortalité en fonction de l'âge. On va faire l'hypothèse qu'ils sont constants pour les individus matures et nuls pour les individus immatures (ce qui signifie que les individus immatures ne se déplacent pas et vivent jusqu'à l'âge adulte) :

$$D(a) = \begin{cases} D_m, & a \geq r \\ 0, & a < r \end{cases} \text{ et } d(a) = \begin{cases} d_m, & a \geq r \\ 0, & a < r \end{cases} \quad (2)$$

(on peut par exemple consulter [4] pour une description plus précise des individus immatures). Par conséquent :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u(t, r, x) + D_m \Delta w - d_m w \quad (3)$$

Il reste à trouver $u(t, r, x)$ en fonction de w . Mais puisqu'il n'y a ni décès ni déplacement dans la population immature, la population d'âge r à l'instant t est exactement celle qui est née à l'instant

1. Dans ce mémoire, a désigne l'âge des individus ainsi que le taux de croissance de la population mais nous ne ferons pas référence à l'âge dans la suite du document

$t - r$. En notant $u(t, 0, x) = b(w(t, x))$, où b est la fonction de naissance, on obtient immédiatement $u(t, r, x) = b(w(t - r, x))$ d'où l'équation finale ne portant que sur w :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_m \Delta w - d_m w + b(w(t - r, x)) \quad (4)$$

C'est cette équation que nous étudierons dans le reste du mémoire. Avant de passer au traitement mathématique, nous devons prescrire une fonction de naissance b . Les conditions réalistes à imposer sont peu restrictives : cette fonction doit être nulle en 0 (aucun reproducteur), doit saturer assez vite à l'infini (compétition entre les reproducteurs) et doit avoir une pente maximale en 0 (taux de reproduction maximal lorsque la population est faible). On peut donner deux exemples d'une telle fonction réaliste :

$$b_1(w) = \begin{cases} pw \left(1 - \frac{w}{w_{max}}\right), & w \leq w_{max} \\ 0 & w > w_{max} \end{cases} \quad (5)$$

et

$$b_2(w) = pwe^{-aw} \quad (6)$$

où a est un paramètre strictement positif.

Pour la suite du mémoire, on utilisera plutôt la formule 6 pour la fonction de naissance, puisque l'article qui nous guide ([4]) l'utilise.

Finalement, il est possible de faire quelques remarques qualitatives sur la forme attendue des solutions. En effet, (4) est une équation de réaction-diffusion avec retard, et le traitement mathématique montrera qu'elle admet des solutions sous forme d'ondes progressives. L'étude de la vitesse de propagation de cette onde nous fournira des renseignements très utiles pour discuter de la vague d'expansion humaine au néolithique. L'origine physique de l'onde peut se comprendre de la manière suivante : devant le front d'onde la population est presque nulle ; derrière la population est saturée ; au niveau du front d'onde, au contraire, le taux de naissance est maximal, ce qui a tendance à "pousser" le front d'onde vers l'avant par diffusion des individus matures. On verra aussi que la vitesse de l'onde ne dépend que de la pente de b en 0, ce qui signifie que c'est l'avant du front d'onde (population faible) qui impose la vitesse de l'onde.

2 Existence de solutions sous forme de front d'onde

On se place dans la suite dans le cas $n = 1$.

L'objectif de cette partie est de trouver des solutions sous forme d'onde progressive pour l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d_m w + pw(t - r, x) \exp(-aw(t - r, x)) \quad (7)$$

où l'on rappelle que $b(w) = pw \exp(-aw)$ est la fonction de naissance, w la densité de population d'individus adultes, r l'âge de maturité et p un paramètre strictement positif.

Dans un premier temps, on va reformuler ce problème en terme d'onde progressive.

2.1 Position du problème

On cherche des solutions sous la forme d'ondes.

Définition 1. On appelle onde progressive solution de (7) toute solution de (7) de la forme $w(t, x) = \phi(x + ct)$ où $c > 0$ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 . On dit que c est la célérité de l'onde ϕ .

Commençons par la remarque suivante :

Fait 2. Supposons $\frac{p}{d_m} > 1$ Alors l'équation (7) a deux équilibres $w_1 = 0$ et $w_2 = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{p}{d_m} \right)$.

Démonstration. Si w^* est un équilibre alors w^* vérifie

$$-d_m w^* + p w^* \exp(-a w^*) = 0$$

ce qui donne bien $w^* = 0$ ou $w^* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{p}{d_m} \right)$. Mais, $w^* < 0$ est physiquement absurde. Or, sous l'hypothèse $\frac{p}{d_m} > 1$, les deux solutions trouvées sont positives. On a donc bien les deux équilibres annoncés. \square

Il est naturel de chercher des solutions sous la forme $w(t, x) = \phi(x + ct)$ où $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = w_1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = w_2$. Ces ondes vont connecter les équilibres w_1 et w_2 . De plus, on impose un front d'onde monotone *i.e* ϕ croissante sur \mathbb{R} .

Résoudre l'équation (7) avec ces conditions revient donc à chercher ϕ croissante sur \mathbb{R} vérifiant

$$c\phi'(t) = D_m \phi''(t) - d_m \phi(t) + b(\phi(t - cr))$$

où c est un réel strictement positif fixé.

Nous introduisons quelques notations utiles pour la suite.

Définition 3. On définit l'ensemble Γ des fonctions continues et croissantes $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = w_2$.

Définition 4. On définit l'opérateur H par

$$\begin{aligned} H : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \phi &\mapsto [t \in \mathbb{R} \mapsto b(\phi(t - rc))] \end{aligned}$$

H est bien défini car, si ϕ est continue, $t \mapsto b(\phi(t - rc))$ est continue, par continuité de b .

Il s'agit maintenant de trouver $\phi \in \Gamma$ vérifiant

$$c\phi'(t) = D_m \phi''(t) - d_m \phi(t) + H(\phi)(t) \tag{8}$$

Pour cela, nous adoptons une méthode d'approximation par des sur-solutions et des sous-solutions de (8). Donnons d'abord la définition de telles solutions :

Définition 5. Soit $\phi \in \Gamma$.

On dit que ϕ est une sur-solution de (8) si ϕ est de classe C^2 presque partout et si

$$c\phi'(t) \geq D_m \phi''(t) - d_m \phi(t) + H(\phi)(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On dit que ϕ est une sous-solution de (8) si ϕ est de classe C^2 presque partout et si

$$c\phi'(t) \leq D_m \phi''(t) - d_m \phi(t) + H(\phi)(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'idée de ce travail est de construire une suite $(\phi_m)_{m \geq 0}$ de sur-solutions de (8) et de montrer que la limite simple de cette suite de fonctions est une onde progressive solution de (7). En fait, nous allons voir que pour tout c assez grand, on peut trouver par cette méthode une onde progressive monotone solution de (7) ayant pour vitesse c .

Dans toute la suite, on supposera $1 < p/d_m \leq e$.

2.2 Construction d'une solution à partir de sur et sous-solutions

L'objectif de cette section est de montrer le

Théorème 6. *Soit $\bar{\rho} \in \Gamma$ une sur-solution de (8) et $\underline{\rho}$ une sous-solution de (8) (pas nécessairement dans Γ) avec*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \underline{\rho}(t) \leq \bar{\rho}(t) \leq w_2$$

et $\underline{\rho}$ non identiquement nulle. Alors (8) admet une solution dans Γ et donc (7) admet une onde progressive monotone de vitesse c connectant les équilibres 0 et w_2 comme solution.

On considère l'équation

$$cx'(t) = D_m x''(t) - d_m x(t) + H(\bar{\rho})(t) \quad (9)$$

et on va montrer qu'une solution de (9) est une sur-solution de (8).

La preuve nécessite l'utilisation de plusieurs lemmes. On rappelle d'abord l'énoncé d'un résultat d'analyse réelle élémentaire, adapté à notre étude.

Lemme 7 (Règles de l'Hôpital). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} tel que $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty$. Si g' ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$ et si $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe alors*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} tel que $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. Si g' ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$ et si $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Démonstration. Preuve de la première règle. On fixe $y < 0$ et $x < y$. On considère la fonction $h : z \in [x, y] \mapsto (f(y) - f(x))g(z) - (g(y) - g(x))f(z)$, continue et dérivable sur \mathbb{R} . On remarque que $h(x) = h(y)$. Le théorème de Rolle fournit alors $c_{x,y} \in [x, y]$ tel que

$$(f(y) - f(x))g'(c_{x,y}) - (g(y) - g(x))f'(c_{x,y}) = 0$$

On prend y assez petit pour que $g'(c_{x,y}) \neq 0$ et $g(z) > 0$ si $z < y$. On obtient alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

On fixe $1 > \epsilon > 0$. Il existe A tel que si $t < A$,

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - l \right| < \epsilon$$

où l'on a posé $l = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$. On choisit $y < t$. Comme $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $-\infty$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(y)}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$$

Par conséquent, il existe $m < 0$ tel que si $x < m$,

$$\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| < \epsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| < \epsilon$$

Pour $x < m$, on a alors la majoration

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \left| \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - l - \frac{g(y)}{g(x)} \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} + \frac{f(y)}{g(x)} \right|$$

Par les majorations ci-dessus et l'inégalité triangulaire, il vient finalement

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \epsilon + \epsilon \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} + \epsilon < 2\epsilon + \epsilon(|l| + \epsilon)$$

D'où finalement, en utilisant $\epsilon < 1$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < (3 + |l|)\epsilon$$

dès que $x < m$, ce qui achève la preuve.

Preuve de la seconde règle. On fixe à nouveau $y < 0$ assez petit pour que $g \neq 0$ sur $] -\infty, y]$ et l'on pose

$$h_y : x \in] -\infty; y] \mapsto f(y)g(x) - f(x)g(y)$$

On a h_y continue et dérivable. De plus, $h_y(y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h_y(x) = 0$. Une généralisation du théorème sur un intervalle non borné² fournit l'existence de $c_y < y$ tel que $f(y)g'(c_y) - f'(c_y)g(y) = 0$ i.e

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(c_y)}{g'(c_y)}$$

On conclut en faisant tendre y vers $-\infty$ dans cette dernière égalité. \square

Remarque 8. On peut obtenir les règles de l'Hôpital en $+\infty$ en considérant $\tilde{g}(x) = g(-x)$ et $\tilde{f}(x) = f(-x)$ et en appliquant les règles démontrées ci-dessus en $-\infty$.

On se donne maintenant une sur-solution $\bar{\rho} \in \Gamma$ de (8) ainsi qu'une sous-solution $\underline{\rho}$ non identiquement nulle de (8) et on construit une nouvelle sur-solution x_1 de (8) par le lemme suivant :

2. On peut déduire cette généralisation du théorème de Rolle sur un segment en composant h_y avec une bijection bien choisie comme arctan.

Lemme 9. *Il existe une fonction $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (9) telle que :*

1. $x_1 \in \Gamma$;
2. $\forall t \in \mathbb{R} \quad \underline{\rho}(t) \leq x_1(t) \leq \bar{\rho}(t)$;
3. x_1 est une sur-solution de (8).

Démonstration. Posons

$$\lambda_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4D_m d_m}}{2D_m} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4D_m d_m}}{2D_m}$$

et

$$x_1(t) = \frac{1}{D_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-u)} H(\bar{\rho})(u) du + \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-u)} H(\bar{\rho})(u) du \right]$$

(on a appliqué la méthode de la variation de la constante à (9) pour trouver la solution x_1)

Montrons que $x_1 \in \Gamma$. Pour cela on montre d'abord que x_1 est continue et croissante. Le fait que x_1 est continue découle de la continuité de $H(\bar{\rho})$. Montrons que x_1 est croissante. Pour cela, on calcule $x_1(t+s) - x_1(t)$ pour t réel et $s > 0$. On a

$$\begin{aligned} x_1(t+s) - x_1(t) &= \frac{1}{D_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^{t+s} e^{\lambda_1(t+s-v)} (H(\bar{\rho})(v+s) - H(\bar{\rho})(v)) dv \right] \\ &\quad + \frac{1}{D_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t+s-v)} (H(\bar{\rho})(v+s) - H(\bar{\rho})(v)) dv \right] \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $v = t+s$ dans les intégrales apparaissant dans $x_1(t+s)$. Mais, comme on a supposé $1 < \frac{p}{d_m} \leq e$ (et donc $w_2 \leq 1/a$), la fonction de naissance b est croissante sur l'intervalle $[0, w_2]$. Comme de plus $\bar{\rho} \in \Gamma$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\rho}(t) \leq w_2$ et donc $H(\bar{\rho})$ est croissante sur \mathbb{R} .³ Par conséquent, par positivité des exponentielles et croissance de l'intégrale, on obtient bien

$$x_1(t+s) - x_1(t) \geq 0$$

ce qui assure la croissance de x_1 . Pour conclure que $x_1 \in \Gamma$, il faut montrer les deux égalités suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = w_2$$

Montrons par exemple la première limite, la seconde se traite de manière analogue. On applique la seconde règle de l'Hôpital aux fonctions suivantes dérivables sur \mathbb{R} et de limite nulle en $-\infty$ (car $\lambda_1 < 0$) :

$$f(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} H(\bar{\rho})(s) ds \quad \text{et} \quad g(t) = e^{-\lambda_1 t}$$

On obtient alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} H(\bar{\rho})(s) ds}{e^{-\lambda_1 t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{H(\bar{\rho})(t)}{-\lambda_1} \right) = 0$$

car $\bar{\rho} \in \Gamma$ et donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\rho}(t) = 0$ et $b(0) = 0$. La seconde intégrale se traite de la même façon, en utilisant la première règle de l'Hôpital (car $\lambda_2 > 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda_2 t} = +\infty$.) On a donc montré que $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) = 0$ et le calcul de la seconde limite est laissé au lecteur. Par conséquent, $x_1 \in \Gamma$.

3. On rappelle que $H(\bar{\rho}(t)) = b(\bar{\rho}(t - rc))$ où r est le retard.

Le fait que x_1 soit une solution de (9) est immédiat compte-tenu de sa définition.
Prouvons maintenant pour t réel l'encadrement suivant : $\underline{\rho}(t) \leq x_1(t) \leq \bar{\rho}(t)$. Posons

$$w : \mathbb{R} \ni t \mapsto x_1(t) - \bar{\rho}(t)$$

il s'agit de montrer que w est négative sur \mathbb{R} . Posons

$$r : t \mapsto cw'(t) + d_m w(t) - D_m w''(t)$$

Alors, comme $\bar{\rho}$ est une sur-solution de (8) et x_1 est une solution de (9), $r \leq 0$ sur \mathbb{R} . De plus, en résolvant l'équation $r(t) = cw'(t) + d_m w(t) - D_m w''(t)$ en w , on obtient

$$w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{d_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-s)} r(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} r(s) ds \right]$$

Or, comme x_1 et $\bar{\rho}$ sont dans Γ , r est bornée sur \mathbb{R} et donc $c_1 = c_2 = 0$ (les intégrales tendent vers 0 en $\pm\infty$, en utilisant la règle de l'Hôpital, comme précédemment). Par conséquent,

$$w(t) = \frac{1}{d_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-s)} r(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} r(s) ds \right] \leq 0$$

car r est négative et $\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_2$. Ceci prouve que $x_1 \leq \bar{\rho}$. Un raisonnement analogue est utilisé pour prouver que $\underline{\rho} \leq x_1$.

Il reste à montrer la troisième assertion. Déjà, x_1 est de classe C^2 . On utilise ensuite le fait que $\bar{\rho}(t) \geq x_1(t)$ sur \mathbb{R} . Par croissance de l'opérateur H sur Γ , on a pour tout t réel $H(x_1)(t) \leq H(\bar{\rho})(t)$. Or, x_1 est solution de (9). Par conséquent

$$cx_1'(t) = D_m x_1''(t) - d_m x_1(t) + H(\bar{\rho})(t) \geq D_m x_1''(t) - d_m x_1(t) + H(x_1)(t)$$

Par conséquent, x_1 est bien une sur-solution de (8) au sens de la définition donnée dans le paragraphe précédent. On conclut donc la preuve de ce lemme. □

Remarque 10. *L'idée du lemme précédent est de modifier un peu l'équation (8) pour qu'on puisse la résoudre et trouver une solution qui soit toujours une sur-solution de l'équation initiale et qui soit comprise entre $\underline{\rho}$ et $\bar{\rho}$: on espère ainsi itérer ce procédé et se rapprocher d'une solution de (7).*

Grâce à cette remarque, on peut démontrer le théorème principal de cette section.

Démonstration du théorème 6. On construit la suite de fonctions suivante :

$$x_0(t) = \bar{\rho}(t)$$

$$x_n(t) = \frac{1}{D_m(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-u)} H(x_{n-1})(u) du + \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-u)} H(x_{n-1})(u) du \right]$$

Par le lemme précédent, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifie :

1. Pour tout $n \geq 0$, $x_n \in \Gamma$;
2. Pour tout $n \geq 0$, x_n est une sur-solution de (8) ;

3. Pour tout $n > 0$, x_n est une solution de $cx''(t) = D_mx'(t) - d_mx(t) + H(x_{n-1})(t)$;

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \underline{\rho}(t) \leq x_n(t) \leq x_{n-1}(t) \leq \bar{\rho}(t)$.

Posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t)$. La fonction x est bien définie par ce qui précède. Elle est croissante, car les x_n sont croissantes. On souhaite prouver que $x \in \Gamma$ et que x est une solution de (8). Ceci achèvera la preuve du théorème. On fixe un réel t . On a

$$x(t) = \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-u)} H(x_{n-1})(u) du + \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-u)} H(x_{n-1})(u) du \right]$$

où l'on a posé $\alpha = \frac{1}{D_m(\lambda_2 - \lambda_1)}$. On souhaite appliquer le théorème de convergence dominée aux deux intégrales ci-dessus. On a :

- Pour tout $n > 0$, l'application $s \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_1(t-s)} H(x_{n-1})(s)$ est continue car x_{n-1} est continue.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(x_{n-1})(t) = H(x)(t)$ par continuité de b .
- Condition de domination : on a $H(x_{n-1})(s) = b(x_{n-1}(s - rc))$ et donc, comme b est bornée sur \mathbb{R}^+ ,

$$|e^{\lambda_1(t-s)} H(x_{n-1})(s)| \leq M e^{\lambda_1(t-s)}$$

où $s \mapsto e^{\lambda_1(t-s)}$ est intégrable sur $[-\infty, t]$ car $\lambda_1 < 0$.

L'application du théorème de convergence dominée est donc légitime et fournit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1(t-s)} H(x_{n-1})(s) ds = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1(t-s)} H(x)(s) ds$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} H(x_{n-1})(s) ds = \int_t^{+\infty} e^{\lambda_2(t-s)} H(x)(s) ds$$

et donc

$$x(t) = \alpha \left(e^{\lambda_1 t} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1 s} H(x)(s) ds + e^{\lambda_2 t} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda_2 s} H(x)(s) ds \right)$$

La fonction x est continue (cela découle de l'égalité précédente et de ce que $H(x)$ est bornée), elle est donc de classe C^1 et de classe C^2 , toujours par l'égalité précédente. Par des calculs élémentaires que nous ne détaillons pas ici, on peut prouver

$$D_mx''(t) - cx'(t) - d_mx(t) = -H(x)(t)$$

ce qui affirme exactement que x résout (7). Pour conclure, il faut voir que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = w_2$$

La première limite est évidente car $\bar{\rho} \in \Gamma$ et donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\rho}(t) = 0$ ce qui prouve le résultat par la majoration $0 \leq x(t) \leq \bar{\rho}(t)$.

La seconde limite nécessite l'utilisation de la règle de l'Hôpital. Remarquons d'abord que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ existe car x est croissante (cela découle de la croissance des $(x_m)_{m \geq 0}$) et majorée par w_2 . Par application de la règle de l'Hôpital d'une façon analogue à la preuve du lemme précédent, il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \alpha \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{H(x)(t)}{-\lambda_1} + \frac{H(x)(t)}{\lambda_2} \right)$$

Mais, si on note x^* la limite de x en $+\infty$, on obtient l'égalité

$$x^* = \alpha b(x^*) \left(\frac{1}{-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

Mais,

$$\alpha \left(\frac{1}{-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{d_m}$$

après calcul et donc

$$b(x^*) = x^* d_m$$

Par un fait précédent, cela implique $x^* = 0$ ou $x^* = w_2$. La première possibilité est exclue car x est croissante et non-nulle en au moins un point puisque $x \geq \underline{\rho} \neq 0$. Donc $x^* = w_2$ et x admet bien les limites voulues, ce qui achève la preuve. \square

Il reste maintenant à construire une sur-solution et une sous-solution de (7).

2.3 Construction de sur et sous-solutions

Commençons par un lemme utile pour la suite.

Lemme 11. *On définit, pour $c > 0$ la fonction $\Delta_c : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto pe^{-\lambda cr} - [c\lambda + d_m - D_m\lambda^2]$. Alors il existe $c^* > 0$ et $\lambda^* > 0$ tels que*

1. $\Delta_{c^*}(\lambda^*) = 0$ et $\Delta'_{c^*}(\lambda^*) = 0$;
2. Pour tout $0 < c < c^*$ et $\lambda > 0$, $\Delta_c(\lambda) > 0$;
3. Pour tout $c > c^*$, la fonction Δ_c a deux zéros notés λ_1 et λ_2 où $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. De plus, $\Delta_c(\lambda) > 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [\lambda_1, \lambda_2]$ et $\Delta_c(\lambda) < 0$ pour $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$

Démonstration. La preuve est assez technique. On commence par fixer $c > 0$. Remarquons d'abord que Δ_c tend vers ∞ en $\pm\infty$. Par conséquent, Δ_c admet un minimum sur \mathbb{R} . Par dérivation, Δ_c admet un extrémum en $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\Delta'_c(\lambda) = -pcr e^{-\lambda cr} + 2D_m\lambda - c = 0 \quad (10)$$

Or, $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto -pcr e^{-\lambda cr} + 2D_m\lambda - c$ est strictement croissante donc Δ_c admet un unique extrémum. C'est un minimum. On le note $\lambda_{min}(c)$. Par le théorème des fonctions implicites, comme Δ'_c est de dérivée non nulle (car strictement croissante), λ_{min} définit une fonction C^∞ de c . Remarquons pour la suite que $\lambda_{min}(c) > 0$ car $\Delta'_c(0) = -pc - c < 0$.

On note

$$f : c \mapsto \lambda_{min}(c)$$

et

$$g : c \mapsto \Delta_c(\lambda_{min}(c)) = \frac{2D_m f(c)}{cr} - \frac{1}{r} - [cf(c) + d_m - D_m f(c)^2] \quad (11)$$

On souhaite maintenant montrer qu'il existe $c^* > 0$ tel que $g(c^*) = 0$ et

$$\forall c > c^*, g(c) < 0 \quad \text{et} \quad \forall c < c^*, g(c) > 0 \quad (12)$$

Ceci permettra de conclure la démonstration. En effet, en posant $\lambda^* = f(c^*)$, on aura :

- Si $c = c^*$, alors Δ_{c^*} atteint son minimum en λ^* . Par conséquent, $\Delta'_{c^*}(\lambda^*) = 0$ et $\Delta_{c^*}(\lambda^*) = g(c^*) = 0$. Donc le premier point est vérifié.
- Si $c < c^*$, $g(c) > 0$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta_c(\lambda) > g(c) > 0$ ce qui montre le second point.
- Si $c > c^*$, alors $g(c) < 0$. Comme Δ_c tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, est décroissante sur $] -\infty; f(c)[$ et croissante sur $]f(c); \infty[$, on a l'existence de λ_1 et λ_2 annoncés dans le lemme. De plus, $0 < \lambda_1$ car $\Delta_c(0) > 0$.

Pour montrer (12), il suffit de montrer que g est monotone et d'examiner ses comportements asymptotiques. Des développements limités au premier ordre dans l'équation (10) permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$g(0) = p - d_m > 0$$

et

$$g(c) \underset{c \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{c^2}{4D_m} < 0$$

Ne reste plus qu'à prouver la monotonie de g . Un calcul simple dans l'équation (11) montre que :

$$g'(c) < 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{f(c)} < \frac{1}{c} \frac{2D_m + rc^2}{2D_m - rc^2 + 2D_mrcf(c)}$$

(on a utilisé ici le fait que $f > 0$ et que $2D_m - rc^2 + 2D_mrcf(c) = 2D_m + pc^2r^2e^{-f(c)cr} > 0$).

Dérivons maintenant logarithmiquement l'équation $pcr e^{-f(c)cr} = -c + 2D_m f(c)$ définissant f . Il vient :

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{c} \frac{2D_m + rc^2 - 2rcD_m f(c)}{2D_m - rc^2 + 2D_mrcf(c)}$$

L'inégalité annoncée est maintenant évidente, ce qui termine la preuve. \square

Dans toute la suite, on se place sous l'hypothèse $c > c^*$, c'est-à-dire que l'on cherche des ondes progressives solutions de (7) de vitesse strictement supérieure à c^* .

Cherchons, sous cette hypothèses supplémentaire, à construire des sur- et sous-solutions de (8).

La construction d'une sur-solution est relativement simple. On fixe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \lambda_1 < \lambda_1 + \epsilon < \lambda_2$. On définit alors $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \min\{w_2, w_2 e^{\lambda_1 t}\}$. On représente sur la figure 2 le graphe de la fonction f .

Proposition 12. *f est une sur-solution de (7). De plus, $f \in \Gamma$.*

Démonstration. Il faut montrer deux choses : $f \in \Gamma$ et f vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$cf'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) \geq 0^4$$

Le fait que $f \in \Gamma$ est clair.

Pour la seconde assertion, on sépare les cas selon si $t \in]0; +\infty[$ ou $t \in]-\infty; 0[$. Remarquons au préalable que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* . Il suffit de montrer $cf'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) \geq 0$ sur \mathbb{R} .

Cas 1 : $t \in]0; +\infty[$. On a $f(t) = w_2$ et donc $f'(t) = f''(t) = 0$. Par conséquent,

$$cf'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) = d_m w_2 - b(f(t - rc)) \geq 0$$

4. Au point de discontinuité, les dérivées sont prises au sens des distributions

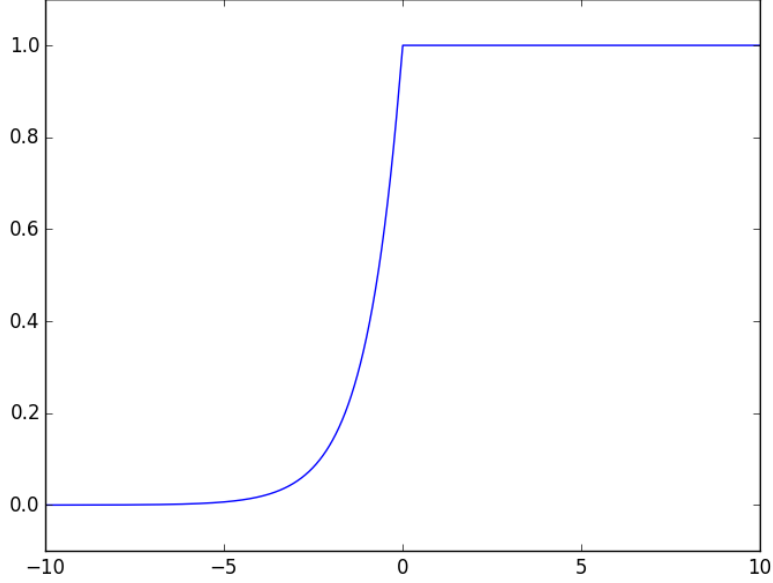


FIGURE 2 – Représentation graphique de la sur-solution f

car $b(x) \leq b(w_2) = d_m w_2$ pour $x \in [0; w_2]$ et $f(t - rc) \in [0; w_2]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Cas 2 : $t \in]-\infty; 0[$. On a alors $f'(t) = w_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$ et $f''(t) = w_2 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$. Par conséquent,

$$c f'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) = w_2 (c \lambda_1 - D_m \lambda_1^2 + d_m) e^{\lambda_1 t} - H(f)(t)$$

Mais, $H(f)(t) = b(f(t - rc)) = b(w_2 e^{\lambda_1(t-rc)}) \leq w_2 p e^{\lambda_1(t-rc)}$ ⁵. Donc

$$w_2 (c \lambda_1 - D_m \lambda_1^2 + d_m) e^{\lambda_1 t} - H(f)(t) \geq w_2 (c \lambda_1 - D_m \lambda_1^2 + d_m) e^{\lambda_1 t} - w_2 p e^{\lambda_1(t-rc)}$$

D'où

$$c f'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) \geq -w_2 e^{\lambda_1 t} \Delta_c(\lambda_1)$$

On conclut par le lemme précédent.

Cas 3 : $t = 0$: Alors $f''(t)$ est un delta de Dirac, négatif puisque la discontinuité de la pente passe d'une valeur positive à une valeur nulle. Donc l'inégalité est respectée (au sens des distributions). \square

On note $\bar{\rho}$ la sur-solution obtenue.

On construit maintenant une sous-solution de (8) par la proposition suivante.

Proposition 13. *On pose, pour $M > 1$, $g_M : t \in \mathbb{R} \mapsto \max\{0, w_2(1 - M e^{ct})e^{\lambda_1 t}\}$. Alors, pour M suffisamment grand, g_M est une sous-solution de (8) non identiquement nulle.*

Avant de démontrer cette proposition, énonçons et prouvons le

Fait 14. *Pour tout $M > 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq g_M(t) \leq \bar{\rho}(t) \leq w_2$.*

5. On rappelle que $b(w) = p w e^{-aw}$ donc $b(w) \leq p w$ dès que $w \geq 0$ ce qui est le cas ici

Démonstration. Le fait que $0 \leq g_M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ est clair par définition. De même, $\bar{\rho} \leq w_2$. Pour montrer que $g_M(t) \leq \bar{\rho}(t)$, on procède par disjonction de cas.

— $t > -\frac{1}{\epsilon} \ln M$. Alors $g_M(t) = 0 \leq \bar{\rho}(t)$.

— $t \leq -\frac{1}{\epsilon} \ln M$. Alors $g_M(t) = w_2[1 - Me^{\epsilon t}]e^{\lambda_1 t} \leq w_2e^{\lambda_1 t} = \bar{\rho}(t)$.

Ceci conclut la preuve. □

Prouvons maintenant la proposition précédente.

Démonstration de la proposition 13. Le fait que g_M soit non identiquement nulle est clair. On pose $t^* = -\frac{1}{\epsilon} \ln M$ où l'on fixe $M > 1$. On va montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, cf'(t) - D_m f''(t) + d_m f(t) - H(f)(t) \leq 0$$

On procède par disjonction de cas.

Cas 1 : $t = t^*$: De même que précédemment, $f''(t)$ est un delta de Dirac positif. Donc l'inégalité est respectée.

Cas 2 : $t \in]t^*; +\infty[$. Alors $g_M(t) = 0$. Par conséquent,

$$cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) - H(g_M)(t) = -H(g_M)(t) = -b(g_M(t - rc)) \leq 0$$

car $g_M(t) \geq 0$ sur \mathbb{R} et $b \geq 0$ sur \mathbb{R}^+ .

Cas 3 : $t \in]-\infty; t^*[$. Alors $g_M(t) = w_2[1 - Me^{\epsilon t}]e^{\lambda_1 t}$. Par conséquent,

$$g'_M(t) = w_2 e^{\lambda_1 t} [\lambda_1 - M(\lambda_1 + \epsilon)e^{\epsilon t}] \quad \text{et} \quad g''_M(t) = w_2 e^{\lambda_1 t} [\lambda_1^2 - M(\lambda_1 + \epsilon)^2 e^{\epsilon t}]$$

D'où

$$cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) = w_2 e^{\lambda_1 t} [c\lambda_1 - cM(\lambda_1 + \epsilon)e^{\epsilon t} - D_m \lambda_1^2 + D_m M(\lambda_1 + \epsilon)^2 e^{\epsilon t} + d_m - d_m M e^{\epsilon t}]$$

On regarde maintenant le terme $H(g_M)(t)$. On a $H(g_M)(t) = b(g_M(t - rc))$. Mais, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g_M(t) \geq w_2(1 - Me^{\epsilon t})e^{\lambda_1 t} := h_M(t)$. Or, b est croissante sur l'intervalle $[-\infty, 1/a]$. Comme

$$h_M(t) \leq g_M(t) \leq \bar{\rho}(t) \leq w_2 \leq \frac{1}{a}$$

car, par hypothèse, $p/d_m \leq e$, on obtient pour $t \in \mathbb{R}$,

$$b(h_M(t)) \leq b(g_M(t))$$

Par conséquent, en utilisant pour $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$, il vient

$$b(g_M(t - rc)) \geq b(h_M(t - rc)) \geq ph_M(t - rc)(1 - ah_M(t - rc))$$

En remplaçant h_M par sa valeur, on obtient

$$b(g_M(t - rc)) \geq pw_2 e^{\lambda_1(t-rc)} - pw_2 M e^{(\lambda_1 + \epsilon)(t-rc)} - apw_2^2 \left[1 - M e^{\epsilon(t-rc)}\right]^2 e^{2\lambda_1(t-rc)}$$

Majorons le terme $aw_2^2 [1 - Me^{\epsilon(t-rc)}]^2 e^{2\lambda_1(t-rc)}$ de cette inégalité. On remarque d'abord que, comme $t \leq t^* = -1/\epsilon \ln M$, on peut écrire $Me^{\epsilon(t-rc)} \leq e^{-erc}$. Par ailleurs, puisque $0 < \epsilon < \lambda_1$ et $t < t^* < 0$, $e^{2\lambda_1 t} \leq e^{(\lambda_1 + \epsilon)t}$. En combinant ces inégalités, on trouve

$$0 \leq aw_2^2 \left(1 - Me^{\epsilon(t-rc)}\right)^2 e^{2\lambda_1(t-rc)} \leq Ke^{(\lambda_1 + \epsilon)t}$$

où l'on a posé $K = aw_2^2 e^{-2\lambda_1 rc} (1 + e^{-2erc})$. On a donc une minoration adaptée de $H(g_M)(t)$:

$$H(g_M)(t) \geq pw_2 e^{\lambda_1(t-rc)} - pw_2 M e^{(\lambda_1 + \epsilon)(t-rc)} - Kpe^{(\lambda_1 + \epsilon)t}$$

On rappelle aussi

$$cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) = w_2 e^{\lambda_1 t} [c\lambda_1 - cM(\lambda_1 + \epsilon)e^{\epsilon t} - D_m \lambda_1^2 + D_m M(\lambda_1 + \epsilon)^2 e^{\epsilon t} + d_m - d_m M e^{\epsilon t}]$$

On peut maintenant conclure. En utilisant les notations du lemme 11, il vient

$$cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) - H(g_M)(t) \leq -w_2 e^{\lambda_1 t} \Delta_c(\lambda_1) + w_2 e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} \left(\frac{Kp}{w_2} + M\Delta_c(\lambda_1 + \epsilon) \right)$$

Or, le lemme 11 fournit $\Delta_c(\lambda_1) = 0$ et $\Delta_c(\lambda_1 + \epsilon) < 0$. D'où

$$cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) - H(g_M)(t) \leq w_2 e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} \left(\frac{Kp}{w_2} + M\Delta_c(\lambda_1 + \epsilon) \right)$$

Donc, pour M assez grand, on a bien $cg'_M(t) - D_m g''_M(t) + d_m g_M(t) - H(g_M)(t) \leq 0$ ce qui achève la preuve de cette proposition. \square

On a représenté sur la figure 3 la fonction g_M .

Remarque 15. *On a trouvé une sur-solution et une sous-solution de (7). Ces deux solutions vont encadrer la solution x de (7) et donc nous donner une idée du comportement de x au cours du temps.*

On note $\underline{\rho}$ une sous-solution quelconque de (7) non identiquement nulle (de telles solutions existent par la proposition précédente) et $\bar{\rho} \in \Gamma$ la sur-solution de (7) construite précédemment. Les conditions du théorème 6 sont alors vérifiées. Nous avons donc montré le

Théorème 16. *Supposons que $1 < \frac{p}{d_m} \leq e$. Alors il existe $c^* > 0$ tel que pour tout $c > c^*$ l'équation*

$$c\phi'(t) = D_m \phi''(t) - d_m \phi(t) + pb(\phi(t - cr))$$

admet une solution monotone vérifiant

$$\phi(-\infty) = 0 \quad ; \quad \phi(+\infty) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{p}{d_m} \right)$$

Par conséquent, pour tout $c > c^$, (7) admet une onde progressive monotone de vitesse c connectant les équilibres w_1 et w_2 comme solution. De plus, c^* vérifie les conditions du lemme 11.*

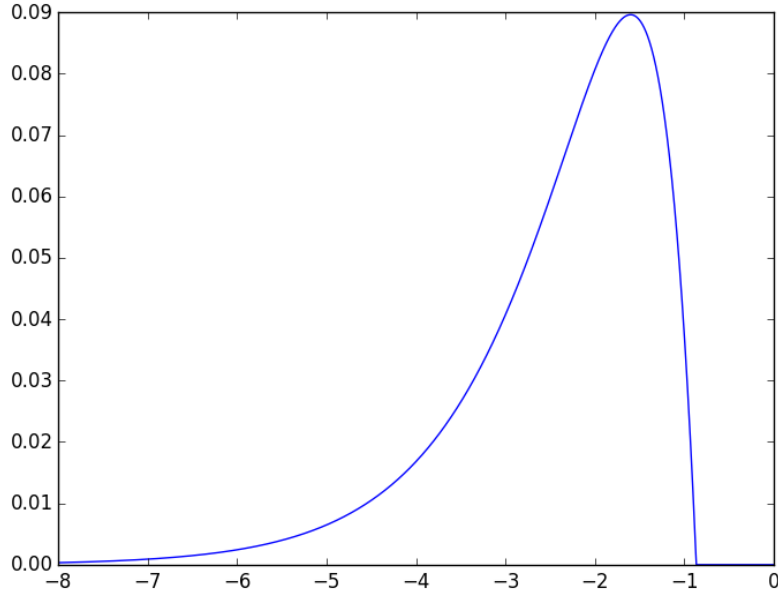


FIGURE 3 – Représentation graphique de la sous-solution g_M

Remarque 17. *Le théorème nous semble vrai pour $c = c^*$ mais nous n'avons pas formalisé ce résultat. Nous pensons qu'un passage à la limite à l'aide d'une suite de fronts monotones solutions pourrait être utilisé mais ce passage à la limite nous semble assez technique.*

Ce théorème prouve l'existence d'une onde progressive de célérité c solution de (7) pour c assez grand. De plus, cette onde est monotone. L'hypothèse cruciale dans notre étude est $p/d_m \leq e$. On verra en effet que si cette condition n'est plus vérifiée, un front d'onde non monotone apparaît et notre étude n'est plus valable. En particulier, l'opérateur H n'a plus les bonnes propriétés utilisées ci-dessus.

On peut remarquer que l'on a a priori toutes les vitesses d'ondes plus grandes que c^* comme solutions. D'autres théorèmes, que nous ne présenterons pas dans ce mémoire, précisent qu'en fait la vitesse $c = c^*$ est sélectionnée pour tout une gamme de conditions initiales en temps.

On propose maintenant une simulation numérique de la résolution de l'équation (7).

3 Modélisation numérique

Dans cette section, on propose une modélisation numérique à 1D de notre modèle, en utilisant la technique des différences finies. On va déjà adimensionner l'équation (7). En posant $\tilde{w} = aw$ et $\tilde{x} = x/\sqrt{D_m}$ et en omettant les tildes pour plus de lisibilité, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w) \quad (13)$$

où

$$f(w)(t, x) = -d_m w(t, x) + pw(t - r, x) e^{-w(t-r, x)}$$

On va ensuite discrétiser cette équation. Choisissons un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx . Pour la résolution numérique, on choisit le pas de temps de telle sorte que le retard r soit un multiple de Δt : $\frac{r}{\Delta t} = k \in \mathbb{N}$. On note $w_j^n = w(n\Delta t, j\Delta x)$ pour $n = 0, \dots, N - 1$ et $j = 0, \dots, J - 1$. Alors la discrétisation de l'équation (13) donne :

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + f(w_j^n) \quad (14)$$

On a choisi ici un schéma de type "implicite", c'est-à-dire que l'on fait intervenir w à l'instant $n + 1$ dans le terme de diffusion. Cela présente l'avantage de ne pas imposer une condition de stabilité numérique de type CFL (ce qui nécessiterait de prendre des intervalles de temps petits), mais impose de devoir résoudre un système linéaire à chaque étape de calcul.

Avant d'aller plus loin, nous devons préciser les conditions aux limites en x . Pour respecter la forme des solutions recherchées dans la partie mathématique (i.e, $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = \ln\left(\frac{p}{d_m}\right)$), nous avons choisi de prendre des condition de flux nul au bord :

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

et

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=x_{max}} = 0$$

Ceci se traduit sur la version discrétisée en ajoutant un "point fantôme" aux extrémités vérifiant $w_{-1}^n = w_0^n$ et $w_J^n = w_{J-1}^n$. Finalement, en combinant les données sous la forme d'un vecteur

$$W^n = {}^t(w_0^n, w_1^n, \dots, w_{J-1}^n)$$

on obtient l'équation suivante sur W^n :

$$AW^{n+1} = W^n + \Delta t f(W^n) \quad (15)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \beta & -\beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta & 1 + 2\beta & -\beta & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & -\beta & 1 + 2\beta & -\beta & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -\beta & 1 + 2\beta & -\beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\beta & 1 + \beta \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (16)$$

et

$$f(W^n) = -d_m W^n + p W^{n-k} \exp(-W^{n-k})$$

(l'exponentielle d'un vecteur est définie ici en prenant l'exponentielle des coefficients).

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation (15) à chaque pas de temps (comme c'est un système tridiagonal, il est plus avantageux de résoudre l'équation à chaque pas de temps plutôt que d'inverser la matrice A). Une implémentation de l'algorithme en Python est fournie en annexe A.

Dans les lignes suivantes, nous allons discuter de l'allure des solutions obtenues numériquement. Les paramètres numériques ont été choisis d'après [2], qui propose les valeurs suivantes (évaluées par des méthodes indépendantes de celle de la mesure de la vitesse de la vague d'expansion) : $D_m = 17 \text{ km}^2/\text{an}$, $a := p - d_m = 0.03 \text{ an}^{-1}$ et $r = 25 \text{ ans}$. On remarque que comme nous n'utilisons pas le même modèle que [2], nous n'avons accès qu'à a , le taux total de croissance, tandis qu'une résolution exacte de notre modèle demande d'accéder à p , le taux de naissance, et à d_m , le taux de mortalité. Pour obtenir une solution numérique correspondant au traitement mathématique, nous prenons $\frac{p}{d_m} = e$, mais la variation de ces paramètres entraîne la formation d'un autre type de solution que nous détaillerons plus loin. De même, dans le modèle de [2], r est le temps qui s'écoule entre deux vagues successives, que l'on assimile dans notre cas au temps de maturation.

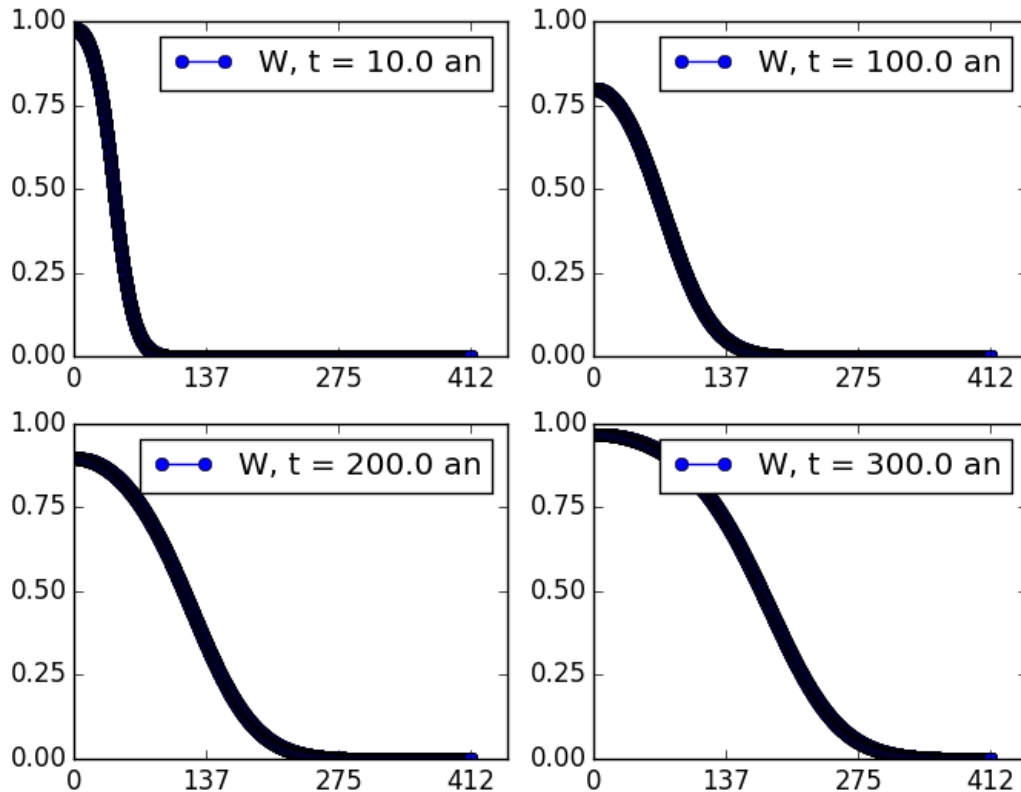


FIGURE 4 – Allure de la solution à différents temps. En abscisse la position en km, en ordonnée la densité de population en unité arbitraire.

La figure 4 montre l'évolution de la solution numérique au cours du temps. La solution initiale en temps est ici prise comme :

$$w(0, x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_{max}/10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la diffusion se chargeant de lisser rapidement cette fonction discontinue. On observe bien une onde se déplaçant de la gauche vers la droite au cours du temps (on a pris ici la convention d'une onde se propageant vers la droite, contrairement à la partie précédente).

Nous avons aussi mesuré numériquement la vitesse de cette onde. Pour cela, nous avons repéré la position du front pour laquelle $W(t, x) = W(t, 0)/2$ (en utilisant la propriété que le front d'onde est décroissant) et calculé la vitesse de cette position. Cette vitesse est tracée figure 5 : on observe qu'elle croît au cours du temps en convergeant vers une valeur limite proche de 0.8 km/an. La valeur de c^* donnée par le lemme 11 est (par résolution numérique) 0.78 km/an. La comparaison de ces valeurs avec les résultats archéologiques sera effectuée dans la section suivante.

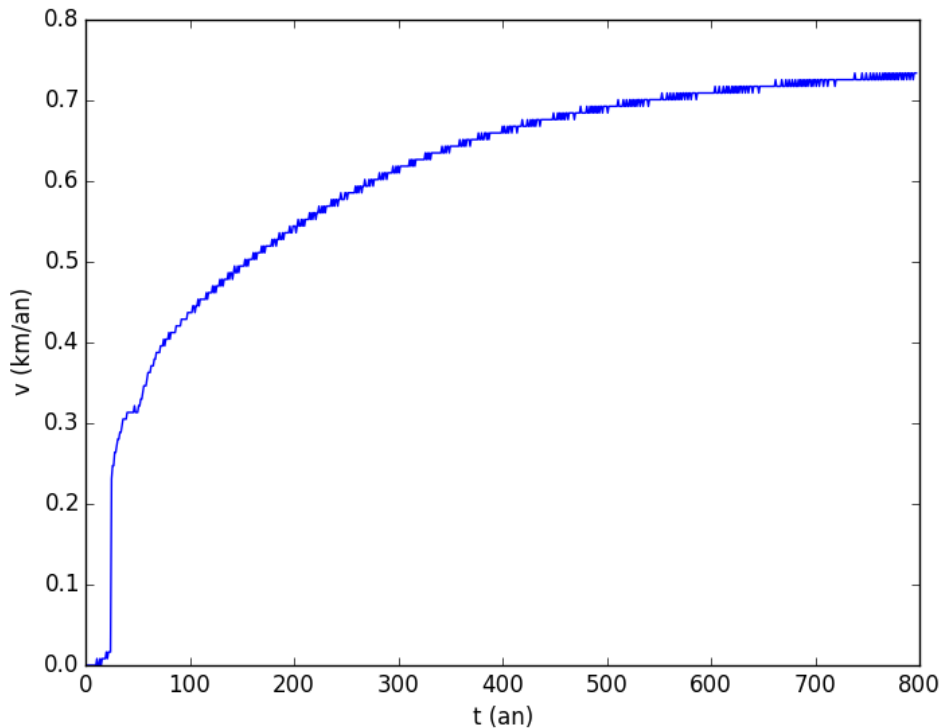


FIGURE 5 – Vitesse du front d'onde en fonction du temps

On peut justifier la convergence assez lente de la vitesse de propagation par le temps qu'il faut pour "remplir les queues de distribution", c'est-à-dire le temps nécessaire aux faibles populations à l'avant du front pour atteindre une valeur faible mais non-négligeable. En effet, il a déjà été signalé que la célérité de l'onde est majoritairement contrôlée par les faibles populations. Un tracé de W

en échelle logarithmique (figure 6) permet de réaliser que la convergence des faibles densités de population est elle aussi assez lente (comparée à la célérité de la vague).

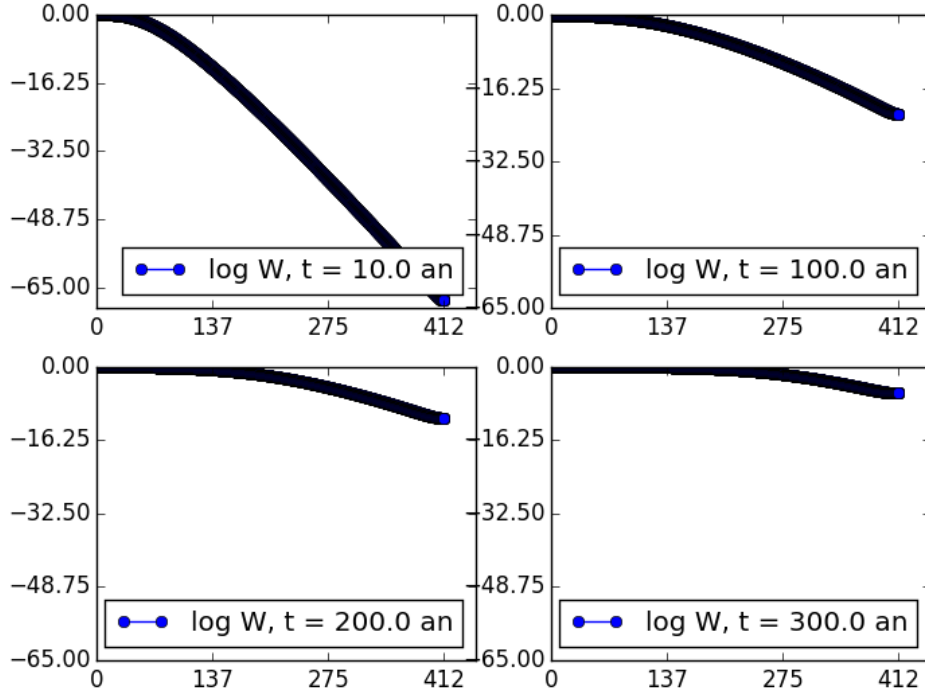


FIGURE 6 – Logarithme de la densité de population à différents instants

4 Discussion

Dans cette partie, nous discutons de notre modèle et le comparons avec les modèles utilisés dans les articles de physique [2] et de biologie [3]. Nous proposons aussi de regarder l'influence des paramètres sur notre modélisation numérique.

4.1 Comparaison des modèles

4.1.1 Étude de la vitesse asymptotique pour des faibles retards

Avant d'entrer en détail dans la comparaison de nos résultats avec ceux des articles [2] et [3], nous proposons de calculer c^* dans le cas particulier d'un retard r petit, ce qui est précisément le cadre de l'article [2]. Pour cela, nous reprenons les équations

$$pe^{-\lambda^*cr} - [c\lambda^* + d_m - D_m\lambda^{*2}] = 0$$

et

$$-pcr e^{-\lambda^*cr} + 2D_m\lambda^* - c = 0$$

définissant c^* et effectuons un développement limité pour $pr \ll 1$. Après calculs, nous obtenons, au premier ordre,

$$c^* = 2\sqrt{pD_m}[1 - pr] + o(r) \quad (17)$$

en prenant $d_m = 0$, comme dans l'article [2]. Si on considère que d_m est non nul, nous obtenons

$$c^* = 2\sqrt{(p - d_m)D_m}[1 - pr] + o(r) \quad (18)$$

Plusieurs remarques s'imposent. On constate d'abord que le retard r a tendance à diminuer la vitesse asymptotique de propagation. Ceci est cohérent car un grand âge de maturation entraîne bien une diminution de la vitesse de propagation de la vague d'expansion humaine. Par ailleurs, on remarque que c^* peut se réécrire, lorsque r est proche de 0,

$$c^* = 2\sqrt{(b'(0) - d_m)D_m}[1 - b'(0)r] + o(r)$$

La vitesse de propagation ne dépend donc que de la pente en 0 de la fonction de naissance : ce sont donc les populations à faible densité qui imposent la vitesse de propagation de l'ensemble de la vague.

Tentons maintenant de comparer la vitesse de propagation au premier ordre avec celle donnée dans [2] :

$$c^* = \frac{2\sqrt{b'(0)D_m}}{1 + b'(0)\frac{r}{2}} = 2\sqrt{b'(0)D_m}[1 - b'(0)\frac{r}{2}] + o(r)$$

Dans le modèle qu'utilise [2], le paramètre r est l'intervalle entre deux migrations successives (le modèle consistant en des flux migratoires espacés par des intervalles de temps r). On remarque la présence d'un facteur $1/2$ par rapport à notre modèle. Nous pensons qu'il s'agit d'un problème dans la modélisation de [2], qui s'explique comme suit : l'hypothèse (faite par [2]) de confondre le temps de discrétisation de l'équation, noté dt (nécessairement petit devant le temps de variation de w) et l'intervalle de temps entre deux migrations (plutôt de l'ordre du temps de variation de w dans le cas qui nous intéresse) n'est pas valide. Il s'ensuit que [2] effectue un développement limité d'ordre 2 en r , plutôt que de faire un développement limité d'ordre 1 en dt (équation 1) puis un développement limité d'ordre 1 en r (équation 18). En résumé, il s'agit d'un problème de séparation d'échelles.

Il est enfin intéressant de noter que pour les valeurs numériques prises pour la simulation, l'approximation $pr \ll 1$ est totalement fautive. C'est pourquoi nous prendrons par la suite pour c^* les valeurs numériques données par la résolution exacte des équations du lemme 11.

4.1.2 Comparaison avec les données archéologiques

La valeur de c^* que nous obtenons est de 0.78 km/an, soit une vitesse 20% plus faible que celle de [2] comme discuté dans la section précédente. En utilisant plusieurs méthodes de mesure (à partir d'environ 750 sites archéologiques en Europe et au Moyen-Orient) et en tenant compte de la précision de ces mesures, les archéologues ont estimé que la vitesse de propagation de la vague humaine du néolithique était comprise dans la fourchette 0.6-1.3 km/an [3]. Cette fourchette est malheureusement trop peu précise pour nous permettre de valider notre modèle par rapport à celui de [2] ; elle permet seulement d'affirmer que notre résultat est cohérent avec les données.

4.2 Influence des paramètres sur nos résultats

Cette section propose d'analyser de manière qualitative la forme des solutions lorsque l'on fait varier p et r . Premièrement, si l'on fait varier r en gardant p fixé à sa valeur de référence $p = 0.047$, on observe juste une variation de la vitesse de la vague qui correspond à la valeur de c^* donnée dans le lemme 11.

Des résultats plus intéressants émergent si l'on fait varier la valeur de p en gardant $r = 25$. En effet, si l'on augmente p , la condition $p/d_m < e$ nécessaire pour toute la démonstration n'est plus valide. On observe alors des fronts d'onde non monotones. Plus intéressant encore, on observe une similitude avec les équations différentielles du second ordre : le front d'onde monotone correspond à une solution amortie, tandis que des valeurs supérieures de p font apparaître des oscillations pseudopériodiques amorties. De plus, plus l'on augmente p , plus la hauteur de la première oscillation est importante. Ces résultats sont résumés figure 7. Nous les présentons uniquement à titre qualitatif, car le traitement des fronts d'onde non monotones est bien plus complexe que celui des fronts d'ondes monotones et nous n'avons pas tenté d'obtenir des résultats quantitatifs.

Enfin, faire varier r en gardant une valeur de $p = 2$ fixée change le "facteur de qualité" des oscillations pseudopériodiques de l'onde, comme l'illustre la figure 8.

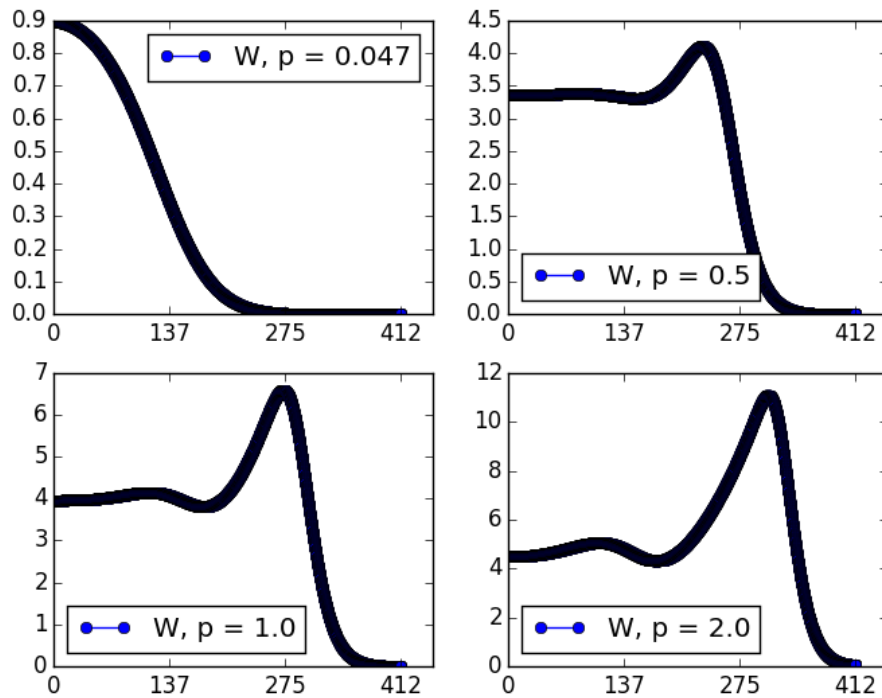


FIGURE 7 – Allure de la densité à $t=100$ ans pour différentes valeurs de p , en gardant $r = 25$

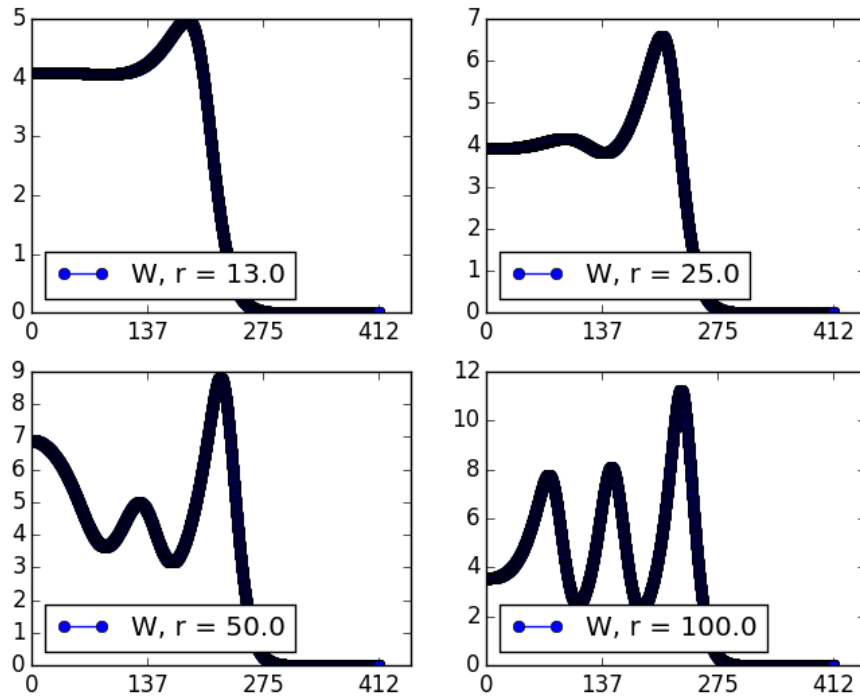


FIGURE 8 – Allure de la densité à $t=100$ ans pour différentes valeurs de r , en gardant $p = 2$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons établi un modèle pour une vague d'expansion humaine au néolithique, puis nous avons effectué une analyse mathématique de l'équation régissant la densité de population afin d'y faire ressortir une solution sous forme d'onde progressive, à l'aide de sur- et sous-solutions. Ce traitement mathématique, qui permet de calculer la vitesse de l'onde c^* , a été complété par une analyse numérique mettant en évidence une onde progressive si l'on utilise les paramètres archéologiques présentés dans [2]. La vitesse de l'onde obtenue, $c^* = 0.78$ km/an, est 20 % plus faible que celle présentée dans [2] car nous utilisons un modèle différent. Elle reste toutefois compatible avec les données archéologiques.

Appendix A : Code Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import sparse
from scipy.sparse import linalg

# PHYSICAL PARAMETERS
d = 0.017 #death rate yr-1
p = 0.047 #initial growth rate yr-1
r = 25.0 #maturation time (=time delay) yr
L = 100.0 #domain size. To obtain the real size of the domain (in km) multiply by sqrt(17) (c

# NUMERICAL PARAMETERS
NX = 1000 #number of grid points
k = 25 #number of time steps of the time delay
NT = 1000 #total number of time steps

dx = L/(NX) #grid step
dt = r/k #time step (r must be a multiple of dt)

"""
Principle : U is a (Nx,k) matrix that stores the spatial values in its first coordinate and the
second coordinate (needed to add the time delay)
"""

# FUNCTION FOR THE REACTION TERM
def f(U):
    return -d*U[:,0] + p*U[:,k]*np.exp(-U[:,k])

# SPARSE MATRIX
main = np.zeros(NX)
lower = np.zeros(NX-1)
upper = np.zeros(NX-1)

main[:] = 1. + 2*dt/dx**2
main[0] = 1. + dt/dx**2 #zero flux at the boundary
main[NX-1] = 1. + dt/dx**2 #zero flux at the boundary
lower[:] = -dt/dx**2
upper[:] = -dt/dx**2

A = sparse.diags([main, lower, upper], offsets=[0,-1,1], shape=[NX,NX])
```

```

# FUNCTION
def Timestep(U):
    #New array
    U_new = np.zeros((NX,k+1))
    rhs = U[:,0] + dt*f(U)

    #shift known time values
    U_new[:,1:] = U[:, :-1]

    #solve the linear system
    U_new[:,0] = linalg.spsolve(A, rhs)

    return (U_new)

### MAIN PROGRAM ###

# Initial condition in time
U = np.zeros((NX, k+1))
U[:NX/10,:] = 1

plt.ion() # interactive mode
plt.axis([0,1000,0,1])
plt.show()

# Main loop
for n in range(0,NT):

    #Plot every 1 step
    if (n%1==0):
        plt.figure(1)
        plotlabelU= "U, t = " + str(n*dt)
        plt.plot(U[:,0], 'o-', label=plotlabelU, hold=False)
        plt.legend()
        plt.draw()
        plt.pause(0.0001)

    U = Timestep(U)

```

Références

- [1] Vere Gordon Childe. *The dawn of European civilization*. Paladin, 1957.
- [2] Joaquim Fort and Vicenç Méndez. Time-Delayed Theory of the Neolithic Transition in Europe. *Physical Review Letters*, 82(4) :867–870, January 1999.
- [3] Ron Pinhasi, Joaquim Fort, and Albert J. Ammerman. Tracing the Origin and Spread of Agriculture in Europe. *PLOS Biol*, 3(12) :e410, November 2005.
- [4] Joseph W.-H. So, Jianhong Wu, and Xingfu Zou. A reaction–diffusion model for a single species with age structure. I Travelling wavefronts on unbounded domains. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2012) :1841–1853, July 2001.
- [5] Jianhong Wu and Xingfu Zou. Traveling Wave Fronts of Reaction-Diffusion Systems with Delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 13(3) :651–687, July 2001.