

## Temps de mélange

## Examen

Documents et calculatrices non autorisés. Le temps ne permet pas d'aborder les exercices 1 et 2, mais le barème en tient compte. On pourra donc traiter les questions de cours, et au choix, l'exercice 1 ou l'exercice 2.

## Questions de cours — Application directe du cours

Les questions de cette partie sont indépendantes.

1. Rappeler la définition de  $t_{\text{mix}}, \tau_{\text{couple}}$ , et expliquer la relation entre  $t_{\text{mix}}$  et  $\max_{x,y} \mathbb{E}[\tau_{\text{couple}}]$ .
2. Soit  $X$  une chaîne irréductible, réversible, de noyau  $P$  et de distribution stationnaire  $\pi$ . Rappeler (sans la justifier) l'expression de  $\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1$  à l'aide de la décomposition spectrale. Calculer alors

$$\sum_{x \in \Omega} \pi(x) \left\| \frac{P^t(x, \cdot)}{\pi} - 1 \right\|_{\ell^2(\pi)}^2.$$

3. Rappeler la définition de  $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)$ , et son lien avec  $G_{\tau_Z}(a, a)$ , le nombre moyen, partant de  $a$ , de visites en  $a$  avant d'atteindre  $Z$ . Rappeler alors l'argument qui permet d'affirmer que

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a] = c_{\mathcal{G}} \mathcal{R}(a \leftrightarrow b).$$

1. On a  $d(t) \leq \bar{d}(t) \leq \max_{x,y} \mathbb{P}[\tau_{\text{couple}} > t]$ , et donc  $t_{\text{mix}} \leq 4 \max_{x,y} \mathbb{E}[\tau_{\text{couple}}]$ .
2. D'après la décomposition spectrale,

$$\frac{P^t(x, \cdot)}{\pi} - 1 = \sum_{j=2}^n f_j(x) f_j(\cdot) \lambda_j^t.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \pi(x) \left\| \frac{P^t(x, \cdot)}{\pi} - 1 \right\|_{\ell^2(\pi)}^2 &= \sum_{x \in \Omega} \pi(x) \sum_{j=2}^n f_j(x)^2 \lambda_j^{2t} \\ &= \sum_{j=2}^n \lambda_j^{2t} \end{aligned}$$

où, aux deux dernières lignes on a utilisé le fait que les  $\{f_j, j = 1, \dots, n\}$  forment une base orthonormale de  $\ell^2(\pi)$ .

3. Soit  $I$  le courant unité de  $a$  à  $Z$ ,  $V$  le potentiel associé, i.e. tel que  $V$  est maximum en  $a$ , harmonique sur  $D = \Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$  et nul sur  $Z$ . Alors  $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) = V(a)$ .

Grâce à l'interprétation probabiliste de ce courant unité on avait par ailleurs vu que

$$G_{\tau_Z}(a, a) = R(a \leftrightarrow Z),$$

et en fait que le potentiel associé au courant unité de  $a$  à  $Z$  n'était autre que  $G_{\tau_Z}(a, \cdot)$ . Autrement dit pour tout  $x \in \Omega$

$$G_{\tau_Z}(a, x) = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \right] = V(x)$$

En particulier

$$\sum_{x \in \Omega} c(x)V(x) = \mathbb{E}_a[\tau_Z].$$

Lorsque  $Z = \{b\}$ , en gardant les mêmes notations, on a

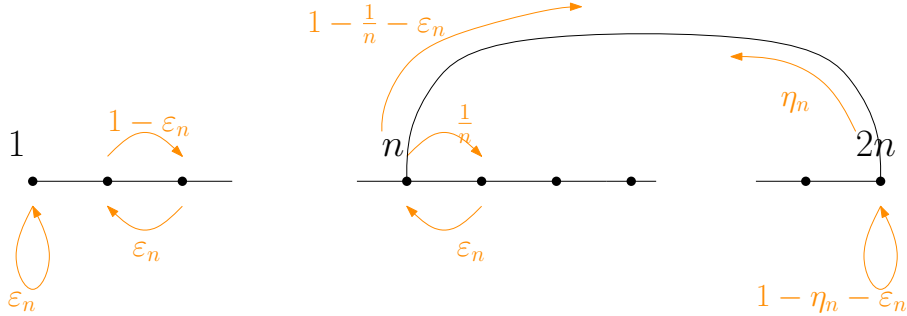
$$\sum_{x \in \Omega} c(x)V(x) = \mathbb{E}_a[\tau_b].$$

Mais il faut noter que  $V' := V(a) - V$  reste harmonique sur  $D$ , est nul en  $a$ , et vaut  $\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$  en  $b$ , et donc  $V' = G_{\tau_a}(b, \cdot)$ , de sorte que

$$\sum_{x \in \Omega} c(x)V'(x) = \mathbb{E}_b[\tau_a].$$

Reste à sommer les deux expressions pour obtenir le résultat souhaité.

**Exercice 1** On considère la chaîne  $X$  sur  $\Omega = \{1, \dots, 2n\}$  dont le diagramme est représenté par la figure ci-dessous, et dont le noyau  $P$  est précisé juste après. On prendra  $\varepsilon_n = \frac{1}{2n^2+1}$ . On reparlera du choix de  $\eta_n$  à la question 2 ci-dessous, mais en tous cas  $\eta_n \leq 1 - \varepsilon_n$ .



$$\begin{aligned} P(k, k+1) &= 1 - \varepsilon_n, \quad \forall k \in \{1, \dots, 2n-1\} \setminus \{n\}, P(n, n+1) = \frac{1}{n}, \\ P(1, 1) &= \varepsilon_n, \quad P(k, k-1) = \varepsilon_n \quad \forall k \in \{2, \dots, 2n\}, \\ P(n, 2n) &= 1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_n, \quad P(2n, n) = \eta_n, \quad P(2n, 2n) = 1 - \varepsilon_n - \eta_n. \end{aligned}$$

1. La chaîne  $X$  est-elle irréductible? aperiodique?
2. Montrer que pour un choix judicieux de  $\eta_n$  (que l'on fera dans toute la suite) la chaîne est réversible. Justifier alors que pour  $n \rightarrow \infty$  on a

$$\eta_n \sim n2^{-n^3}, \quad 1 - \pi(2n) \sim \varepsilon_n.$$

3. Montrer que

$$P^{n-1}(1, 2n) = 0, \quad P^n(1, 2n) = (1 - \varepsilon_n)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_n\right),$$

en déduire un équivalent de  $t_{\text{mix}}$ , et tracer l'allure du graphe de  $t \rightarrow d(t)$  pour une très grande valeur de  $n$ . Peut-on parler d'un phénomène de cutoff pour la chaîne  $X$ ?

4. Dans cette question on introduit la chaîne produit  $Y = (X_1, \dots, X_n)$  sur  $\Omega^n$ , de noyau  $Q$ , pour laquelle le choix de la coordonnée que l'on change à une étape donnée est uniforme et où les  $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  sont toutes de noyau  $P$ .

- (a) Montrer que  $Y$  reste réversible, vis-à-vis de la distribution stationnaire  $\pi^{\otimes n}$ .
- (b) Justifier rapidement (i.e. sans nécessairement rentrer dans les détails de preuve) qu'au temps  $t = \lceil (1 + \alpha)n^2 \rceil$ , où  $\alpha \in (0, 1)$ , la probabilité que chacune des  $n$  coordonnées de  $Y$  a été déplacée d'au moins une unité vers la droite au moins  $n$  fois et au plus  $2n - 2$  fois tend vers 1.  
 Décrire de manière similaire les comportements typiques des différentes coordonnées de la chaîne  $Y$  aux temps  $t = \lceil (1 - \alpha)n^2 \rceil$ ,  $t = \lceil (2 + \alpha)n^2 \rceil$ .
- (c) En déduire que pour un  $\alpha \in (0, 1)$  fixé, et  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} Q^t((1, \dots, 1), (2n, \dots, 2n)) &\rightarrow 0 \text{ si } t = \lceil (1 - \alpha)n^2 \rceil \\ &\rightarrow \exp(-1) \text{ si } t = \lceil (1 + \alpha)n^2 \rceil \\ &\rightarrow 1 \text{ si } t = \lceil (2 + \alpha)n^2 \rceil \end{aligned}$$

Tracer alors l'allure du graphe de  $t \rightarrow d(t)$  pour la chaîne  $Y$ . Peut-on parler de phénomène de cutoff pour la chaîne  $Y$  ?

1. La chaîne est clairement irréductible (cf  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \dots \leftrightarrow 2n$ ), et apériodique (cf  $P(1, 1) > 0$ ).
2. Il existe une unique distribution invariante  $\pi$  qui attribue, disons, la masse  $c$  à 0, et la masse  $c'$  à  $n + 1$ . Pour qu'elle satisfasse les équations de balance détaillée entre  $i$  et  $i + 1$ ,  $i \neq n$  on doit nécessairement avoir, pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,  $\pi(k) = 2^{n^2(k-1)}c$ ,  $\pi(n + k) = 2^{n^2(k-1)}c'$ .  
 Reste à écrire les équations de balance détaillée entre  $n$  et  $n + 1$ ,

$$2^{n^2(n-1)}c \frac{1}{n} = \varepsilon_n c'$$

ce qui fournit la valeur de  $c' = \frac{2^{n^2(n-1)}c}{n\varepsilon_n}$ , puis entre  $n$  et  $2n$  :

$$2^{n^2(n-1)}c \left(1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_n\right) = 2^{n^2(n-1)} \frac{2^{n^2(n-1)}c}{\varepsilon_n n} \eta_n,$$

et on obtient alors que pour que la chaîne soit réversible il faut et il suffit que

$$\eta_n = n\varepsilon_n 2^{-n^2(n-1)} \left(1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_n\right),$$

on retiendra qu'effectivement  $\eta_n \sim n2^{-n^3}$ , et que pour ce choix de  $\eta_n$  la masse de la distribution stationnaire se concentre effectivement en  $2n$ . En fait  $\pi(2n) = 2^{n^2} \pi(2n - 1)$ ,  $\pi(k) \leq 2^{-n^2} \pi(2n - 1)$ ,  $k = 1, \dots, 2n - 2$ , de sorte qu'on a bien,  $1 - \pi(2n) \sim \pi(2n - 1) \sim \varepsilon_n$ .

3. La distance de graphe de 1 à  $2n$  est égale à  $n$  et donc  $P^{n-1}(1, 2n) = 0$ . Pour aller de 1 à  $2n$  en  $n$  pas il faut nécessairement effectuer le chemin  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 2n$ , qui a la probabilité voulue

$$P^n(1, 2n) = (1 - 2^{-n^2})^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} - 2^{-n^2}\right),$$

qui tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Autrement dit, puisque  $\pi(2n) \rightarrow 1$ ,

$$\|P^{n-1}(1, \cdot) - \pi\|_{TV} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \|P^n(1, \cdot) - \pi\|_{TV} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par un raisonnement similaire pour tout  $k \neq 1$  on a

$$\|P^{n-1}(k, \cdot) - \pi\|_{TV} \rightarrow 0,$$

et on conclut que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé et  $n$  suffisamment grand,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = n$ . On a donc bien cutoff en  $n$  pour la chaîne  $X$ .

4. (a) Fixons  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n) \in \Omega^{n-1}$  et enfin  $i, j$  tels que  $P(i, j) > 0$ . Notons alors  $x = (i_1, \dots, i_{k-1}, i, i_{k+1}, \dots, i_n)$ ,  $y = (i_1, \dots, i_{k-1}, j, i_{k+1}, \dots, i_n)$ . On a, grâce à la réversibilité de  $P$ ,

$$\begin{aligned} \pi^{\otimes n}(x)Q(x, y) &= \prod_{\ell \neq k} \pi(i_\ell) \frac{1}{n} \pi(i) P(i, j) \\ &= \prod_{\ell \neq k} \pi(i_\ell) \frac{1}{n} \pi(j) P(j, i) = \pi^{\otimes n}(y)Q(y, x), \end{aligned}$$

et donc la chaîne  $Y$  reste bien réversible vis-à-vis de la distribution stationnaire  $\pi^{\otimes n}$ .

- (b) Pour  $m$  déplacements de  $Y$ , notons  $n_i^{(m)}$  le nombre de fois où la coordonnée  $i$  a été sélectionnée. Il est clair que  $N^{(m)} := (n_1^{(m)}, \dots, n_n^{(m)})$  suit une loi multinômiale de paramètres  $m, (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ . L'idée est que pour  $m \gg n$  cette loi possède d'agréables propriétés de concentration. Plus précisément, si  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $m = [(1 + \alpha)n^2]$ , et  $\eta \in (0, \min(\alpha/2, (1 - \alpha)/2))$ , on a par exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n \geq \eta n\right) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\lambda\left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right)\right) \geq \exp(\lambda\eta n)\right) \\ &\leq \exp(-\lambda\eta n) \mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda\left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$  on obtient

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda\left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right)\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o(n^{-2})\right)^{n^2} \rightarrow \exp(-1/2),$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right) \geq \eta n\right) \leq \exp(-1/2 - \eta n^{1/2}).$$

On en déduit

$$\mathbb{P}\left(\exists 1 \leq i \leq n : \left(n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right) \geq \eta n\right) \leq n \exp(-1/2 - \eta n^{1/2}) \rightarrow 0.$$

L'inégalité correspondante pour la quantité opposée s'obtient de manière similaire, et on déduit finalement que

$$\mathbb{P}\left(\exists 1 \leq i \leq n : \left|n_i^{(m)} - (1 + \alpha)n\right| \geq \eta n\right) \leq n \exp(-1/2 - \eta n^{1/2}) \rightarrow 0.$$

On conclut qu'avec probabilité  $\geq 1 - n \exp(-\eta n^{1/2})$ , en un temps  $m = [(1 + \alpha)n^2]$ , chacune des coordonnées a été sélectionnée au moins  $(1 + \alpha - \eta)n$  fois et au plus  $(1 + \alpha + \eta)n$  fois. Reste à constater que la probabilité qu'un "déplacement vers la gauche" ait été effectué au moins une fois pour l'un des déplacements de ces coordonnées est bornée par  $2^{-n^2} (1 + \alpha + \eta)n^2$ , et on obtient la conclusion souhaitée. Finalement, jusqu'au temps  $[(1 + \alpha)n^2]$ , avec probabilité proche de 1, pour tout  $i$ , la coordonnée  $i$  ne va effectuer que des déplacements vers la droite tant qu'elle n'est pas en  $2n$ , et y rester si elle l'atteint. La  $i$ -ème coordonnée, en ce temps, se situera donc en  $2n$  avec probabilité  $1 - 1/n$ , et quelque part strictement entre  $n$  et  $2n$  avec probabilité  $1/n$ .

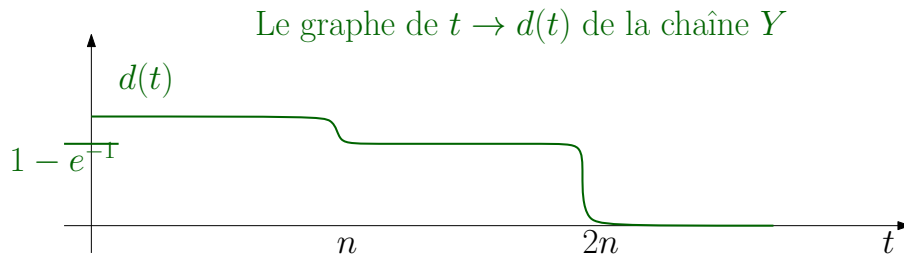
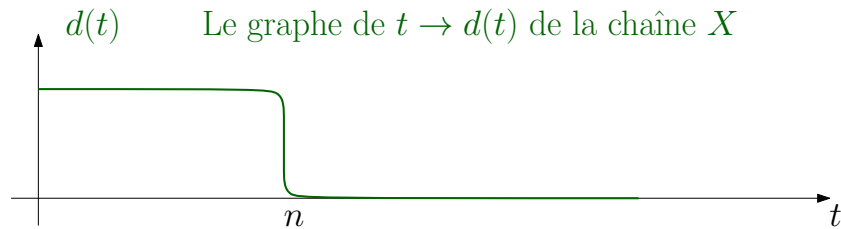
De manière similaire au temps  $[(1 - \alpha)n^2]$ , avec probabilité proche de 1, les  $n$  coordonnées se situeront strictement à gauche de  $n$ .

Enfin au temps  $[(2 + \alpha)n^2]$ , avec probabilité proche de 1, les  $n$  coordonnées se situeront en  $2n$

- (c) Reste à voir que la proportion des coordonnées qui emprunte le détour  $n \rightarrow n+1 \rightarrow n+2 \dots$  tend en loi vers une variable de Poisson de paramètre 1. En particulier les  $n$  coordonnées se situent en  $2n$  avec une proba qui approche  $\exp(-1)$ , avec la probabilité complémentaire il y en a au moins une qui n'a pas atteint ce site. Comme  $\pi(2n, \dots, 2n) \rightarrow 1$ , on conclut que

$$Q^t((1, \dots, 1), (2n, \dots, 2n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t = [(1 - \alpha)n^2] \\ \exp(-1) & \text{si } t = [(1 + \alpha)n^2] \\ 1 & \text{si } t = [(2 + \alpha)n^2] \end{cases}$$

et on déduit l'allure du graphe de  $t \rightarrow d(t)$ . On remarque en particulier que  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = n$  pour tout  $\varepsilon > 1 - \exp(-1)$ , tandis que  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = 2n$  pour tout  $\varepsilon < 1 - \exp(-1)$ , ce qui implique qu'il n'y a pas de phénomène de cutoff pour la chaîne  $Y$ .



### Exercice 2

Dans cet exercice on considère  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $q = 1 - p$ ,  $r_n \in (0, 1/2)$  tel que  $r_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et enfin la chaîne  $X$  sur  $\Omega = \mathbb{Z}_n := \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  telle que

$$\begin{aligned} \forall i \in \Omega \setminus \{0\}, \quad P(i, i+1) = p/2, \quad P(i, i-1) = q/2, \quad P(i, i) = 1/2 \\ P(0, 0) = 1 - r_n, \quad P(0, 1) = pr_n, \quad P(0, n-1) = qr_n \end{aligned}$$

1. La chaîne  $X$  est-elle irréductible ? aperiodique ?
2. Pour quelles valeurs de  $p$  la chaîne est-elle réversible ?
3. Montrer que quelque soit  $p$ , la mesure  $\pi$  telle que

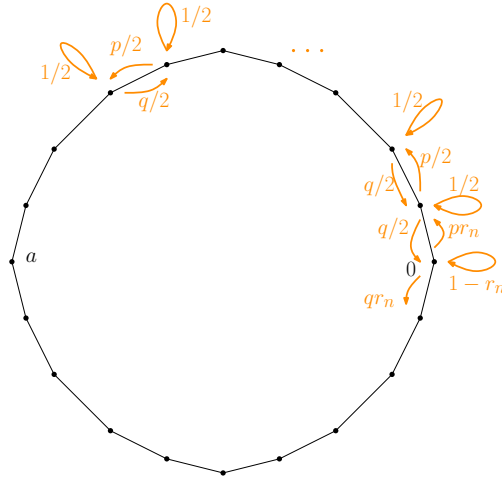
$$\pi(0) = \frac{1}{1 + r_n(n-1)}, \quad \pi(k) = \frac{r_n}{1 + r_n(n-1)}, \quad k \in \Omega \setminus \{0\}$$

une distribution stationnaire de la chaîne.

Si  $\mu$  est une proba sur  $\Omega$ , que peut-on dire de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k \in \Omega} \mu(k) \sum_{j \in \Omega} |P^t(k, j) - \pi(j)| ?$$

Que se passe-t-il pour  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(0)$  suivant que  $r_n = o(1/n)$ , ou que  $r_n = K/n$  pour un  $K > 0$ , ou encore que  $1/n = o(r_n)$  ?



4. Dans cette question on suppose  $p > 1/2$  et  $r_n = o(1/n)$ , et on considère  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

(a) Choisissons  $x_n$  tel que  $x_n \rightarrow \infty, x_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ . Etablir que pour  $\eta \in (0, 1/2)$

$$\mathbb{P}_{x_n} \left( \left| \tau_0 - \frac{2n}{|p-q|} \right| > n^{1-\eta} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

En déduire une borne inférieure sur  $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$ .

(b) Fixons  $x, y \in \Omega$ , et considérons  $(X, Y)$  le couplage indépendant coalescent de chaînes de noyau  $P$ . Montrer que

$$\mathbb{P}_{x,y}(\tau_{\text{couple}} > \frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et en déduire une borne supérieure sur  $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$ .

(c) Dessiner pour une très grande valeur de  $n$ , l'allure du graphe de  $t \rightarrow d(t)$ .

5. Dans cette question on suppose  $p > 1/2$ ,  $r_n = K/n$  avec  $K > 0$  fixé. Expliquer d'abord pourquoi  $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$ .

Dessiner pour une très grande valeur de  $n$ , l'allure du graphe de  $t \rightarrow d(t)$  (on s'attachera, pour une valeur de  $K$  judicieuse, à faire le dessin le plus pertinent possible, mais il n'est pas demandé de justifier les détails de ce dessin).

6. Dans cette question on suppose  $p > 1/2$ , et  $r_n = n^{-\alpha}$ , pour un  $\alpha \in [0, 1)$ .

On considère  $a = \lfloor n/2 \rfloor$ , et  $T_k$  le premier temps auquel la marche  $X$  est revenue en  $a$  après avoir effectué un total algébrique de  $k$  tours dans le sens trigonométrique (on compte  $-1$  pour chaque –improbable– tour effectué dans le sens antitrigonométrique).

Etablir que, pour des constantes  $C, C'$  qu'on ne cherchera pas à calculer de façon explicite,

$$\mathbb{E}[T_{\beta n}] = \beta n \left( \frac{n}{|2p-1|} + Cn^\alpha \right) + o(n),$$

tandis que

$$\text{Var}[T_{cn}] \leq C' \beta n^2.$$

Quel est l'ordre de grandeur de  $t_{\text{mix}}$  en fonction de  $\alpha$  ?

7. Dans le cas symétrique ( $p = 1/2$ ), expliquer, sans rentrer dans les détails de la preuve, pourquoi, pour ces différents choix de  $r_n$  on a systématiquement  $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$ .

1.  $X$  est clairement irréductible (on a  $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow 0$ ) et apériodique car  $P(0,0) > 0$ .
2. Lorsque  $p = 1/2$  la chaîne est clairement réversible vis-à-vis de  $\pi$ , uniforme sur  $\{2, \dots, n-1\}$  et  $1/r_n$  fois plus massive en 0, dont l'expression est détaillée dans l'énoncé de la question 3. La balance détaillée est immédiate entre deux états voisins qui ne sont pas l'origine. Reste à vérifier que  $P(0,1)\pi(0) = P(1,0)\pi(1)$ ,  $P(n-1,0)\pi(n-1) = P(0,n-1)\pi(0)$ , mais c'est évident d'après la définition de  $\pi$ .  
Lorsque  $p \neq 1/2$  la chaîne ne peut être réversible : par l'absurde si un tel  $\pi$  existait on aurait  $\pi(n-1) = (p/q)^{n-1}\pi(1)$ . Ecrire la balance détaillée entre 0 et 1 puis entre 0 et  $n-1$  conduit alors à une contradiction.
3. Il est immédiat de vérifier que pour tout  $p$ , et pour tout  $k \in \mathbb{Z}_n$  on a bien

$$\pi(k-1)P(k-1,k) + \pi(k+1)P(k,k-1) + \pi(k)P(k,k) = \pi(k)$$

A  $n$  fixé, le comportement asymptotique en  $t$  est clair :  $\pi$  est l'unique distribution stationnaire de notre chaîne irréductible apériodique sur un espace d'état fini. Le théorème de convergence permet d'assurer que  $d(t) \rightarrow 0$  (et même que la vitesse de convergence est exponentielle). Or

$$\sum_{k \in \Omega} \mu(k) 2 \left\| P^t(k, \cdot) - \pi \right\|_{TV} \leq 2d(t),$$

et on conclut que la limite demandée est nulle.

Lorsque  $r_n = o(1/n)$ ,  $r_n(n-1) = o(1)$  et donc  $\pi(0) \rightarrow 1$ .

Lorsque  $r_n = K/n$ ,  $\pi(0) \rightarrow 1/(1+K)$ .

Enfin lorsque  $1/n = o(r_n)$ ,  $\pi(0) \rightarrow 0$ .

4. Dans cette question  $p > 1/2$  et  $r_n = o(1/n)$ , de sorte que  $\pi(0) \rightarrow 1$ .
  - (a) Soit  $S$  la marche aléatoire  $\mathbb{Z}$  de noyau  $Q$  tel que  $Q(k,k) = 1/2$ ,  $Q(k,k+1) = 1/2 - Q(k,k-1) = p/2$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . et  $\mathbb{Q}_k$  la loi de  $S$  issue de  $k$ . Il est clair que la loi de  $\tau_0$  sous  $\mathbb{P}_{x_n}$  est égale à celle de  $\tau_0 \wedge \tau_n$  sous  $\mathbb{Q}_{x_n}$ . Grâce au résultat de la ruine du joueur

$$\mathbb{Q}_{x_n}(\tau_0 < \tau_n) = \frac{(q/p)^{x_n} - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N} \sim \left(\frac{q}{p}\right)^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de sorte que  $\mathbb{Q}_{x_n}(\tau_0 \wedge \tau_n = \tau_n) \rightarrow 1$ . Le TCL permet d'affirmer que  $S_{cn} = \frac{|p-q|}{2}cn + O(\sqrt{n})$ , et plus précisément, que si  $\eta < 1/2$ ,

$$\mathbb{Q}_{x_n} \left( \left| \tau_n - \frac{2n}{|p-q|} \right| > n^{1-\eta} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui conduit au résultat souhaité.

On en déduit que  $P^{\frac{2n}{|p-q|} - n^{1-\eta}}(x_n, 0) \rightarrow 0$ , et donc pour  $n$  assez grand,

$$d(t) \geq \pi(0) - P^{\frac{2n}{|p-q|} - n^{1-\eta}}(x_n, 0) > \varepsilon,$$

de sorte que  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \frac{2n}{|p-q|} - n^{1-\eta}$ .

- (b) D'après le raisonnement de la question précédente

$$\mathbb{P}_x(\tau_0 \geq \frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs le temps de retenue en 0 est géométrique de paramètre  $r_n = o(1/n)$ , de sorte que

$$\mathbb{P}(X_{\frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}} = 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

et comme il en est de même pour  $Y$ , on conclut que

$$d\left(\frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}\right) \leq \mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > \frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

de sorte que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \frac{2n}{|p-q|} + n^{1-\eta}.$$

- (c) On conclut qu'il y a un phénomène de cutoff pour la chaîne  $X$  au temps  $\frac{2n}{|p-q|}$ , avec fenêtre  $n^{1-\eta}$  pour tout  $\eta < 1/2$ . Avec un peu plus d'attention aux détails on pourrait montrer que la fenêtre est en fait d'ordre  $\sqrt{n}$ .

Fixons  $C > 2/|p-q|$ . Il est clair, par LFGN, que

$$\mathbb{P}_x(\tau_0 \geq Cn) \rightarrow 0.$$

Comme notre chaîne reste un temps géométrique de paramètre  $r_n$  à l'origine, on déduit que

$$\mathbb{P}_x(X_{Cn} \neq 0) \rightarrow 0.$$

Quitte à utiliser le couplage indépendant coalescent on déduit que

$$\mathbb{P}_{x,y}(\tau_{\text{couple}} > Cn) \rightarrow 0$$

et on déduit que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq Cn$ .

Fixons désormais  $c < 2/|p-q|$ , et prenons  $\eta < 1/|p-q| - c/2$ . Il est alors clair, toujours par LFGN, que  $\mathbb{P}_{\eta n}(\tau_0 < cn) \rightarrow 0$ . Mais comme  $\pi(0) \rightarrow 1$  on déduit que  $\pi(0) - P^{cn}(\eta n, 0) \rightarrow 1$ , et donc pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq cn$ , ce qui, avec ce qui précède, conduit à la conclusion souhaitée.

5. Par un raisonnement similaire à celui qu'on vient de faire il est clair que pour tout  $c < 2/|p-q|$  et  $\varepsilon \in (0, 1)$  on a  $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq cn$ .

A l'inverse, fixons  $C = 2/|p-q| + \eta$ . On a toujours par LFGN,  $\max_{x \in \Omega} \mathbb{P}_x(\tau_0 \geq Cn) \rightarrow 0$ . Notre chaîne ne reste désormais qu'un temps géométrique, de paramètre  $K/n$  à l'origine. Cependant, si  $G \sim \text{Geom}(K/n)$  on a tout de même lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{P}(G > Cn) \rightarrow \exp(-KC) > 0$ .

Si  $(X, Y)$  est un couplage indépendant de chaînes de noyau  $P$ , issues de  $x, y$  quelconques, on déduit que pour  $n$  suffisamment grand, avec probabilité disons, au moins  $\exp(-KC)/2$ , nos deux chaînes vont atteindre 0 et s'y rencontrer avant le temps  $Cn$ . On déduit alors que  $\tau_{\text{couple}}$  est borné par  $Cn\tilde{G}$ , où  $\tilde{G} \sim \text{Geom}(\exp(-KC)/2)$ , ce qui suffit bien sûr à assurer que  $t_{\text{mix}} \leq \text{Cste } n$ , et donc  $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$ .

Pour être plus précis, il faudrait commencer par remarquer que nécessairement, les pires points de départ pour mélanger se situent en un  $k_n$  tel que  $1 \ll k_n \ll n$ . Partant de ce point, la masse de la loi de notre chaîne voyage essentiellement à vitesse  $|p-q|/2$ . Comme on l'a vu plus tôt, en un temps  $cn$  avec  $c < 2/|p-q|$ , la distance en variation totale à  $\pi$  tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . A un temps proche de  $2n/|p-q|$ , la masse atteint 0, et quoiqu'il en soit en un temps  $2n/|p-q| + \eta n$  avec  $\eta$  suffisamment petit, la quasi-intégralité de la masse de la loi de la chaîne se trouve en 0. A ce stade la distance en variation totale chute à une valeur proche de  $1 - \pi(0) = \frac{1}{1+K}$ . La masse à l'origine est alors progressivement relâchée, mais la façon dont la courbe de  $t \rightarrow d(t)$  va être influencée dépend de la valeur de  $K$  :

- si  $K$  est grand la masse est relâchée lentement, mais la convergence vers l'équilibre ne nécessite qu'un "tour" de plus.
- Si  $K$  est très petit, l'essentiel de la masse est relâchée trop rapidement pour bien se répartir sur le cercle, et va continuer à former une "onde". On va constater des chutes de moins en moins brutales de distance en variation totale sur des fenêtres de temps de moins en moins étroites et de plus en plus décalées à droite des multiples successifs de  $2n/|p-q|$ .



6. Soit  $Y$  la marche aléatoire  $\mathbb{Z}$  de noyau  $Q$  tel que  $Q(k, k+1) = 1 - Q(k, k-1) = p$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . et  $\tilde{\mathbb{P}}_k$  la loi de  $Y$  issue de  $k$ .

Par ailleurs on considère  $Z$  la version "dépliée" de  $X$ , i.e la version qui est  $1/2$ -paresseuse en tout site, sauf en les multiples de  $n$ , où elle est  $1 - r_n$ -paresseuse.

Introduisons

$$\tilde{T}_1 = \inf\{t \geq 0 : Y_t = a\} \quad , \quad \mathcal{V} = \sum_{t=0}^{\tilde{T}_1} \mathbb{1}_{\{Y_t=0\}}$$

Il est bien connu que (on peut par exemple retrouver ceci en utilisant le modèle de conductances associé)

$$\tilde{\mathbb{E}}_{a-n}(\tilde{T}_1) = \frac{n}{|p-q|}, \quad \tilde{\mathbb{E}}[\mathcal{V}] = c < \infty.$$

Ecrivons alors

$$\hat{T}_k = \inf\{t \geq 0 : Z_t = a + (n-1)k\},$$

de sorte que  $\hat{T}_k$  a même loi sous  $\hat{P}_{a-n}$  que  $T_k$  sous  $\mathbb{P}_a$ .

Quitte à coupler les déplacements de  $Z$  avec ceux de  $Y$  issus tous deux de  $a-n$ , on peut écrire

$$\hat{T}_1 = \tilde{T}_1 + \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} G_i + \sum_{j=1}^{\tilde{T}_1 - \mathcal{V}} g_j,$$

où les  $\{G_i, i \geq 1\}, \{g_j, j \geq 1\}$  sont indépendantes et indépendantes de  $\tilde{T}_1, \mathcal{V}$ , et suivent des lois géométriques de paramètres respectifs  $r_n, 1/2$ .

Par Markov aux temps successifs de visite en  $a, a+n, a+2n, \dots$ , on a par ailleurs

$$\hat{T}_k = \sum_{i=1}^k \hat{T}_1^{(i)},$$

où les  $\hat{T}_1^{(i)}$  sont des copies indépendantes de  $\hat{T}_1$ .

L'estimée voulue sur espérance et variance de  $\hat{T}_k$  suit facilement :

$$\mathbb{E}[T_{\beta n}] = \frac{\beta n^2}{|2p-1|} + \beta C n^{1+\alpha} + o(n),$$

tandis que

$$\text{Var}[T_{\beta n}] \leq C' \beta n^2.$$

Pour  $\varepsilon$  et  $\eta$  fixés et  $\beta = \beta(\varepsilon, \eta)$  suffisamment petit on déduit que

$$\mathbb{P}\left(\left|T_{\beta n} - \frac{\beta n^2}{|2p-1|} - \beta C n^{1+\alpha}\right| \geq \eta n\right) \leq \varepsilon/4.$$

Ceci implique par exemple que, en posant par exemple  $A = \{n/2 - \eta n, n/2 + \eta n\}$

$$P^{\frac{\beta n^2}{|2p-1|} + \beta C n^{1+\alpha}}(a, A) \geq 1 - \varepsilon/2,$$

de sorte que  $t_{\text{mix}}(1 - \varepsilon) \geq \frac{\beta n^2}{|2p-1|}$ .

A l'inverse, on constate que le temps de couplage de deux versions de  $X$  indépendantes est d'espérance d'ordre  $n^2$  (par le même argument que précédemment, il ne diffère du temps de couplage de deux marches simples asymétriques paresseuses que par les temps de retenue en les multiples de  $n$ , qui sont d'un ordre inférieur). On conclut finalement que  $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$ .

En poussant plus précisément l'étude, on pourrait démontrer qu'il n'y a pas de phénomène de cutoff dans ce cadre : le mélange est ici principalement dû à l'étalement gaussien (d'ordre  $\sqrt{\beta n}$  en un temps d'ordre  $\beta n^2$ ) autour de la moyenne.

7. Pour la borne supérieure on peut reprendre les raisonnements précédents. L'espérance du temps de couplage de deux marches indépendantes reste systématiquement d'ordre  $n^2$  :
- dans les cas  $1/n = o(r_n)$  ou  $r_n = K/n$  on peut simplement remarquer que  $t_{\text{hit}}$  est d'ordre  $n^2$ , et comme on est dans un cadre réversible et paresseux, on conclut.
  - dans le cas  $r_n = o(1/n)$  on peut faire le même raisonnement que dans le cas asymétrique et borner le temps de couplage de deux versions indépendantes par leur temps de rencontre en 0. Mais comme ici la marche est symétrique, le maximum des espérances de ce temps d'atteinte est obtenu pour une chaîne issue de  $a$  et est alors d'ordre  $n^2$ .

Pour la borne inférieure il suffit de remarquer que partant de  $a$ , la distribution de la chaîne en un temps  $\beta n^2$ , avec  $\beta$  suffisamment petit, est concentrée sur la moitié gauche du cercle. Evidemment ce raisonnement ne dépend pas du choix de  $r_n$ .

On conclut donc que  $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$ . Comme dans la question précédente, le mélange est dû à l'étalement gaussien autour de la moyenne, qui se passe justement sur des échelles de temps d'ordre  $n^2$ , on ne peut donc pas espérer un phénomène de cutoff.

