Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange — Chaînes de Markov

Exercices 1 : des exemples classiques, quelques calculs explicites, et des compléments.

1 Des calculs explicites pour deux exemples simples

Exercice 1 On fixe $p, q \in [0,1]$, et on considère la chaîne X à deux états $\{1,2\}$, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de p, q la chaîne est-elle irréductible ? apériodique ?
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des distributions invariantes de X en fonction de p, q.
3. Calculer $P^t, t \in \mathbb{N}$.
4. Lorsque X est irréductible, calculer
$$d_1(t) := \frac{1}{2}\left(|\mathbb{P}_1(X_t = 1) - \pi(1)| + |\mathbb{P}_1(X_t = 2) - \pi(2)|\right).$$
puis
$$d_2(t) := \frac{1}{2}\left(|\mathbb{P}_2(X_t = 1) - \pi(1)| + |\mathbb{P}_2(X_t = 2) - \pi(2)|\right).$$
5. Représenter alors $t \to d_i(t), i = 1,2$ pour $p = q = 0.5$, pour $p = 0.4, q = 0.1$, pour $p = 0.9, q = 0.95$ et enfin pour $p = q = 1$.

1. irréductible ssi $p > 0, q > 0$, apériodique si $(p,q) \neq (1,1)$.
2. Si $p = q = 0$, $\mathcal{D} = \{\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2, \alpha \in [0,1]\}$.
Sinon $\mathcal{D} = \{\frac{q}{p+q}\delta_1 + \frac{p}{p+q}\delta_2\}$
3. Si $p = q = 0$, $P^t = I_2$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.
Sinon $P = A^{-1}DA$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
et on trouve finalement que
$$P^t = AD^tA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} + (1-p-q)^t \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & \frac{-p}{p+q} \\ \frac{-q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}.$$
4. On a pour $t \in \mathbb{N}$,
$$d_1(t) = \frac{1}{2}\left(\left|P^t(1,1) - \pi(1)\right| + \left|P^t(1,2) - \pi(2)\right|\right) = \frac{p}{p+q}|1-p-q|^t.$$
Par un argument de symétrie
$$d_2(t) = \frac{q}{p+q}|1-p-q|^t.$$

Exercice 2 Soit la chaîne X sur l'espace d'état $\{0, 1, ..., n\}$ et de matrice de transition P telle que

$$P(0,k) = \frac{1}{2^{k+1}}, k \in \{0, ..., n-1\}, \quad P(0,n) = \frac{1}{2^n}$$
$$P(k, k-1) = 1, 1 \leq k \leq n-1, \quad P(n,n) = P(n, n-1) = 1/2.$$

1. Montrer que la chaîne possède une unique distribution stationnaire π et la calculer.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $P^{(x_0+1)}(x_0, \cdot) = \pi$.
3. Montrer que pour tout $x_0 \in \{0, 1, ..., n\}$, $P^{(n)}(x_0, \cdot) = \pi$.
4. Pour $t \geq 0$ calculer
$$d(t) := \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{n} \left| P^{(t)}(n,x) - \pi(x) \right|,$$
et tracer $t \to d(t)$.

1. La chaîne est clairement irréductible ($n \to n-1 \to .... \to 0 \to n$) et apériodique ($0 \to 0$). Elle possède donc une unique distribution invariante π telle que $\pi(k) - \pi(k+1) = \frac{\pi(0)}{2^{k+1}}, k = 0, ..., n-1$, $\pi(n) = \frac{\pi(0)}{2^n}$. On obtient donc
$$\pi(k) = \frac{\pi(0)}{2^k}, k = 0, ..., n-1, \quad \pi(n) = \frac{\pi(0)}{2^n},$$
donc $\pi(0) = 1/2$, et finalement
$$\pi(k) = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, ..., n-1, \quad \pi(n) = \frac{1}{2^n}.$$
2. Il est clair d'après la question précédente que $P(0, \cdot) = \pi$, ce qui est l'assertion pour $x_0 = 0$.
Si $x_0 \in \{1, ..., n-1\}$, les x_0 premiers pas de la chaîne sont en fait déterministes (ce sont x_0 pas vers la gauche), et $P^{x_0}(x_0, 0) = 1$ de sorte que $P^{x_0+1}(x_0, \cdot) = P(0, \cdot) = \pi$, comme souhaité.
3. D'après la question précédente si $x_0 = 0, ..., n-1$,
$$P^n(x_0, \cdot) = P^{n-x_0-1}\pi = \pi.$$
Sous $\mathbb{P}_n$, la variable $G = \inf\{n \geq 1 : X_n = n-1\}$ est géométrique de paramètre 1/2. Il est alors facile de voir que sous $\mathbb{P}_n$ on peut écrire
$$X_n = (G-1)\mathbb{1}_{\{G \leq n\}} + n\mathbb{1}_{\{G > n\}}.$$
Ainsi
$$P^t(n,k) = \mathbb{P}_n(X_n = k) = \mathbb{P}_n(G = k+1) = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, ..., n-1,$$
$$P^t(n,n) = \mathbb{P}_n(X_n = n) = \mathbb{P}_n(G > n) = \frac{1}{2^n},$$
de sorte que $P^n(n, \cdot) = \pi$.

4. Si $t \geq n$, $P^t(n,\cdot) = \pi$ et donc $d(t) = 0$.
   Supposons donc $t \leq n-1$. Par la même analyse qu'à la question précédente on a sous $\mathbb{P}_n$,
   $$X_t = (n-t+G-1)\mathbb{1}_{\{G\leq t\}} + n\mathbb{1}_{\{G>t\}},$$
   de sorte que
   $$P^t(n,k) = \mathbb{P}_n(G = k-n+t+1) = \frac{1}{2^{k-n+t+1}}, k = n-t, ..., n-1, \quad P^t(n,n) = \mathbb{P}_n(G > t) = \frac{1}{2^t}.$$
   On trouve donc pour $t \leq n-1$,
   $$d(t) = \sum_{x=0}^{n-t-1} \pi(x) = 1 - \frac{1}{2^{n-t}}.$$

2 Exemples classiques de chaînes de Markov

Exercice 3

1. Soit $p \in [0,1]$ fixé et des variables $(X_i, i \geq 1)$ i.i.d avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p$. On note $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_i$, et $\mathbb{P}_k$ la loi du processus $(S_n)_{n\geq 0}$ avec $S_0 = k$.
   Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note $\tau^N = \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{0, N\}\}$. Calculer $\mathbb{P}_k(S_{\tau^N} = N)$. On distinguera les cas $p = 1/2$, $p \neq 1/2$.
2. Pourquoi la question précédente permet de retrouver que S est récurrente ssi $p = 1/2$? Lorsque $p = 1/2$, la chaîne S est-elle récurrente positive ou récurrente nulle ?
3. Reprendre la question 1. pour une marche paresseuse : $p \in [0,1]$, $q \in [0, 1-p)$, et on considère ici des pas i.i.d suivant la loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \mathbb{P}(X_1 = 0) = q, \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p - q$.
4. Soit $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_T = 1\}$. Pour $p > 1/2$, et $s > 0$, calculer $\mathbb{E}_0[\exp(-sT_1)]$ (on pourra introduire une martingale exponentielle).

1. Dans les deux cas il est facile que τ^N est borné par NG où G est une variable géométrique de sorte que $\mathbb{E}[\tau^N] < \infty$.
   Si $p = 1/2$, alors $(S_{n\wedge\tau^N}, n \geq 0)$ est une martingale, le théorème de Doob permet alors de conclure que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$,
   $$\mathbb{P}_k(S_{\tau^N} = N) = \frac{k}{N}.$$
   Si $p \neq 1/2$, alors $\left(Y_n := \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n\wedge\tau^N}}, n \geq 0\right)$ est une martingale, et le théorème de Doob permet de conclure que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,
   $$\mathbb{P}_k(S_{\tau^N} = N) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

2. Lorsque $p > 1/2$, on a $(1-p)/p < 1$ et donc

$$\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty) = \mathbb{P}_1(\bigcap_N S_{\tau^N} = N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_1(S_{\tau^N} = N) = \frac{2p-1}{p} > 0,$$

et donc la marche est alors transiente. Par symétrie elle l'est également lorsque $p < 1/2$.
En revanche lorsque $p = 1/2$,

$$\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_1(S_{\tau^N} = N) = 0,$$

et la marche est alors récurrente.
Puisqu'une marche issue de 2 doit forcément passer par 1, et que $\mathbb{E}_2[T_1] = \mathbb{E}_1[T_0]$, la propriété de Markov au temps 1 permet d'affirmer par ailleurs que

$$\mathbb{E}_1[T_0] = \frac{1}{2}\left(1 + 2\mathbb{E}_1[T_0]\right),$$

ce qui implique que $\mathbb{E}_1[T_0] = +\infty$, de sorte que la marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est récurrente nulle.

3. Quitte à oublier les pas que la marche paresseuse effectue sur place, on retrouve la chaîne précédente avec $p' = \frac{p}{1-q}, 1-p' = \frac{1-p-q}{1-q}$.

4. Notons $g(\lambda) = \ln\left(p\exp(\lambda) + (1-p)\exp(-\lambda)\right)$. On vérifie alors que

$$\left(M_n^\lambda = \exp\left(\lambda S_n - ng(\lambda)\right), n \geq 0\right)$$

est une martingale, et on vérifie que $M_{n\wedge T_0}^\lambda$ est uniformément intégrable pourvu que $\lambda > 0$. On a alors, par Doob,

$$\mathbb{E}_0[\exp(-T_1 g(\lambda))] = \exp(-\lambda),$$

Reste alors à calculer $\lambda(s)$ tel que $g(\lambda(s)) = s$ pour conclure.

Exercice 4 Un jeu organisé par une compagnie consiste à réunir une collection complète de n coupons afin d'obtenir un lot. On suppose que le client qui cherche à collectionner consomme chaque jour un paquet du produit vendu par la compagnie et reçoit du coup chaque jour un nouveau coupon, qu'on supposera choisi uniformément parmi les n, indépendamment. On note τ le temps nécessaire (en jours) à la collection des n coupons distincts.

1. Montrer qu'on peut écrire $\tau = \tau_1 + ... + \tau_n$ où $\tau_i \sim \mathrm{Geom}(\frac{n-i+1}{n})$.
2. Soit $c > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}(\text{ ne pas tirer le coupon 1 en } \lfloor n\log(n) + cn \rfloor \text{ essais }) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor n\log(n)+cn\rfloor}$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}(\tau > \lfloor n\log(n) + cn \rfloor) \leq \exp(-c)$$

3. Calculer $\mathbb{E}[\tau], \mathrm{Var}[\tau]$, dont on donnera des équivalents, puis en déduire une borne sur

$$\mathbb{P}(|\tau - \mathbb{E}[\tau]| > A\sqrt{\mathrm{Var}[\tau]}).$$

Conclure.

1. Notons c_k le numéro du coupon obtenu le jour $k \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{C}_k = \{i : \exists l \leq k \; c_l = i\}$ l'enemble des numéros de coupons collectionnés au jour $k \in \mathbb{N}^*$. Notons alors

$$\sigma_0 = 0, \sigma_i = \inf\{k : |\mathcal{C}_k| = i\}, i = 1, ..., n$$

de sorte que $\tau_i := \sigma_i - \sigma_{i-1}$ est le nombre de jours qui séparent le temps de collection de $i-1$ coupons distincts au temps de collections de i coupons distincts. Comme les coupons sont tirés indépendamment et uniformément, les variables $\tau_i, i = 1, ..., n$ sont bien indépendantes et géométriques de paramètres respectifs $\frac{n-i+1}{n}, i = 1, ..., n$.

2. La première égalité est évidente puisque les choix de coupons sont indépendants et uniformes. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau > \lfloor n\log(n) + cn \rfloor) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{ne pas tirer le coupon } i \text{ en } \lfloor n\log(n) + cn \rfloor \text{ essais}\right) \\
&\leq n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor n\log(n)+cn \rfloor} \\
&= n\exp\left(\lfloor n\log(n) + cn \rfloor \log\left((1 - \frac{1}{n})\right)\right) \leq \exp(-c).
\end{aligned}$$

3. On a

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\tau_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} \sim_{n\to\infty} n\log(n).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\tau] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[\tau_i] = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{n-i+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{(n-i+1)^2} \sim_{n\to\infty} \frac{n^2\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Par exemple par Chebychev,

$$\mathbb{P}(|\tau - \mathbb{E}[\tau]| > A\sqrt{\mathrm{Var}[\tau]}) \leq \frac{1}{A^2}.$$

Une inégalité de Chernoff (Chebychev exponentielle) permettrait de récupérer une inégalité encore plus précise.
Quoiqu'il en soit on constate que τ est proche de son espérance, elle-même environ $n\log(n)$; et qu'avec probabilité qui tend vers 1 lorsque $A \to \infty$, les fluctuations ne dépassent pas An.

Exercice 5 Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \mathbb{N}$ de noyau de transition P tel que

$$P(0,0) = r_0,\; P(0,1) = p_0,\; \text{et } \forall i \geq 1,\; P(i,i-1) = q_i,\; P(i,i) = r_i,\; P(i,i+1) = p_i,$$

avec $p_0, r_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$ et pour tout $i \geq 1$, $p_i > 0, q_i > 0, p_i + r_i + q_i = 1$.

1. Montrer que X est irréductible, apériodique.
2. Si $\sum_{i\geq 1} \frac{p_0\cdots p_{i-1}}{q_1\cdots q_i} < \infty$, montrer que X est réversible et exprimer sa distribution stationnaire en fonction des $\{p_i, i \geq 0, \{q_i, i \geq 1\}$.
3. Considérer le cas particulier $p_i = p > 0$, $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}_i[T_i^+]$, pour tout état $i \in E$.

1. L'irreductibilité découle directement de $p_i > 0, i \in \mathbb{N}, q_i > 0, i \in \mathbb{N}^*$. L'apériodicité est une conséquence de $r_0 > 0$.
2. Pour que la chaîne soit réversible il faut vérifier les équations de balance détaillée et donc
$$\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{p_i}{q_{i+1}}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$
Mais alors pour tout $i \geq 1$,
$$\pi_i = \pi_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}.$$
Pour qu'on puisse définir un tel π qui soit une distribution il faut et il suffit que
$$S = \sum_{i\geq 1} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}} < \infty.$$
Dans ce cas on a $\pi_0 = \frac{1}{1+S}$,
$$\pi_i = \frac{1}{1+S} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}, i \geq 1,$$
et la chaîne est bien réversible.
3. Lorsque $p_i = p, q_i = q$ on a
$$S = \sum_{i\geq 1} \left(\frac{p}{q}\right)^i$$
qui est finie ssi $p < q$ (sans surprise, puisqu'on est en train d'étudier une marche simple réfléchie, et cette condition correspond au cas où elle est récurrente positive).
Lorsque $p < q$ on a donc $1 + S = \frac{1}{1-p/q} = \frac{q}{q-p}$, et
$$\pi_i = \frac{q}{q-p} \left(\frac{p}{q}\right)^i, i \geq 0,$$
de sorte que $\mathbb{E}_i[T_i^+] = \frac{1}{\pi_i} = \frac{q-p}{q} \left(\frac{q}{p}\right)^i$.
Enfin, lorsque $p = q$ notre chaîne est récurrente nulle, et lorsque $p > q$ elle est transiente, dans les deux cas $\mathbb{E}_i[T_i^+] = \infty$.

Exercice 6

1. On considère le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ connexe, localement fini (i.e. $\mathcal{V}$ est au plus dénombrable et chaque sommet a un degré fini). On note $x \sim y$ ssi $(x, y) \in \mathcal{E}$. A chaque arête $e \in \mathcal{E}$ on attribue une conductance $c_e > 0$.

   On suppose que le noyau de transition de la chaîne X satisfait

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{\sum_{z \sim x} c(x, z)}, \forall y \sim x.$$

   Montrer que X est irréductible et réversible et déterminer son unique distribution invariante.

2. Soit X une chaîne irréductible et réversible sur l'espace d'état E au plus dénombrable. On suppose que pour tout $x \in E$ il n'existe qu'un nombre fini de $y \in E$ tels que $P(x, y) > 0$. Montrer qu'on peut trouver un graphe $\mathcal{G}$ connexe et localement fini et des conductances $(c_e, e \in \mathcal{E})$ tels que le noyau P s'exprime comme dans la question 1.

1. L'irréductibilité de X découle de la connexité de $\mathcal{G}$. Par ailleurs si on pose $c(x) := \sum_{y \sim x} c(x, y), x \in \mathcal{V}$, et $c_{\mathcal{G}} = \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x)$ alors X est réversible avec $\pi(x) = \frac{c(x)}{c_{\mathcal{G}}}, x \in \mathcal{V}$

2. Le graphe est l'habituel graphe associé à la chaîne, il est connexe car X irréductible. Choisissons (peu importe comment) $x_0 \in \mathcal{V}, y_0 \sim x_0$, et fixons $c(x_0, y_0) = 1$. On va raisonner en s'éloignant de x_0 pour $d_{\mathcal{G}}$.

   Pour que le noyau P s'exprime comme en 1 il faut que pour tout $y \sim x, y \neq y_0$ on ait $c(x_0, y) = P(x_0, y)/P(x_0, y_0)$. Ceci détermine $c(x_0) = \sum_{y \sim x_0} P(x_0, y)/P(x_0, y_0)$ (cette somme est évidemment finie grâce aux hypothèses de l'énoncé), et la réversibilité de X entraîne alors la détermination unique de $c(y)$ pour tout $y \sim x_0, y \neq x_0$, i.e. pour tout $y : d_{\mathcal{G}}(x_0, y) = 1$. Enfin pour tout $y : d_{\mathcal{G}}(x_0, y) = 1$, et $z \sim y$, $d_{\mathcal{G}}(x_0, z) = 2$, on pose alors $c(y, z) = P(y, z)c(y)$.

   Par le même raisonnement, si on suppose que $\{c(z), c(z, z') : z \sim z', d_{\mathcal{G}}(x_0, z) = k, d_{\mathcal{G}}(x_0, z') = k + 1\}$ sont déterminés, alors la réversibilité entraîne la connaissance des $\{c(z') : d_{\mathcal{G}}(x_0, z') = k + 1\}$, enfin la connaissance du noyau de transition permet de fixer $c(z', z'')$ pour tous $z' \sim z''$ tels que $d_{\mathcal{G}}(x_0, z') = k + 1, d_{\mathcal{G}}(x_0, z'') = k + 2$.

Exercice 7 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini, μ une distribution sur G, et la chaîne X de noyau P tel que $P(g, h \cdot g) = \mu(h)$. On dit que X est une marche aléatoire sur le groupe G de noyau de saut μ.

1. Expliquer pourquoi la marche simple sur $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^d$ est un exemple d'une telle chaîne.
2. On considère le mélange suivant d'un paquet de $n \geq 2$ cartes : on tire uniformément deux des n cartes et on échange leurs positions respectives dans le paquet. Montrer qu'on a là un deuxième exemple d'une marche aléatoire sur un groupe.
3. Montrer que la distribution uniforme sur G est stationnaire.
4. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de G engendré par $\{h \in G : \mu(h) > 0\}$. Que peut-on dire de X suivant que $\mathcal{H} \subsetneq G$ ou $\mathcal{H} = G$? Trouver deux exemples de chaînes X qui correspondent à ces deux cas.

5. Montrer que si X est réversible si et seulement si μ vérifie que

$$\mu(h^{-1}) = \mu(h) \quad \forall h \in G.$$

6. Trouver un exemple d'une telle chaîne X, irréductible, mais non réversible (on pourra penser à un mélange de cartes approprié).

1. La marche simple sur $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ est obtenue avec $\mu(e_i) = \mu(-e_i) = \frac{1}{2d}, i = 1, ..., d$.
2. Ici on considère $G = \mathfrak{S}_n$ et $\mu_{(ij)} = \frac{1}{n(n-1)}, i \neq j \in \{1, ..., n\}^2$, où (ij) est la transposition de i et j.
3. Soit π la distribution uniforme sur G. Notons que $g = hg' \Leftrightarrow h = g(g')^{-1}$, et donc

$$\pi P(g) = \sum_{g' \in G} \pi(g')P(g', g) = \frac{1}{|G'|} \sum_{g' \in G} P(g', gg'^{-1}g') = \frac{1}{|G'|} \sum_{g' \in G} \mu(gg'^{-1}) = \frac{1}{|G'|},$$

car μ est une distribution sur G.

4. Une marche sur G de noyau de saut μ issu de id_G ne peut atteindre que des éléments de $\mathcal{H}$, et donc si $\mathcal{H} \subsetneq G$ cette marche ne peut pas être irréductible. Si on reprend l'exemple du mélange d'un tas de $n \geq 3$ cartes et cette fois $\mu((12)) = 1$ (i.e le mélange consiste systématiquement à échanger les deux premières cartes du paquet), il est clair qu'on est dans ce cas.

   Puisque G est fini tout élément de G est d'ordre fini, ainsi l'inverse d'un élément h tel que $\mu(h) > 0$ s'écrit $h^{-1} = h^{k-1}$ pour un certain entier k. Si $\mathcal{H}$ engendre G, il s'ensuit que tout élément de $g \in G = \mathcal{H}$ peut être écrit comme un produit de puissances positives déléments chargés par μ, disons $g = h_1^{k_1} ... h_j^{k_j}$. Mais alors on a $P^{k_1 + ... k_j}(id_G, g) > 0$.
   On vient donc de montrer que la classe de communication de id_G est précisément G, on conclut que la chaîne est bien irréductible lorsque $\mathcal{H} = G$.
   Les exemples des deux premières questions sont de ce type.
5. Si X est réversible, la distribution stationnaire est unique, or la distribution uniforme est stationnaire et les équations de balance détaillée s'écrivent alors

$$P(g, g') = P(g', g) \forall g, g' \in G,$$

   ce qui entraîne bien que pour tout $h \in G$,

$$\mu(h) = P(g, hg) = P(hg, h^{-1}hg) = \mu(h^{-1}),$$

   Réciproquement, si $\mu(h) = \mu(h^{-1})$ pour tout $h \in G$, alors pour tous $g, g' \in G$,

$$P(g, g') = \mu(g'g^{-1}) = \mu(gg'^{-1}) = P(g', g),$$

   et donc on a bien les équations de balance détaillée pour la distribution uniforme sur G.
6. Si on prend $n \geq 3$, $G = \mathfrak{S}_n$ et si un saut de la chaîne revient à placer la première carte du paquet en l'une des n positions choisie uniformément au hasard (i.e. $\mu((1k(k-1)...2)) = \frac{1}{n}, k = 1, ..., n$. Il est alors clair que la chaîne n'est pas réversible : pour tout $k \geq 3, \mu((1k(k-1)...2)^{-1}) = \mu(12...k)) = 0$.

Exercice 8 Un q-coloriage du graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est une application $\chi : \mathcal{V} \to \{1, ..., q\}$ telle que toute paire de noeuds x, y connectés par une arête (i.e. $(x, y) \in \mathcal{E}$) doit vérifier $\chi(x) \neq \chi(y)$.

1. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un arbre il possède un q-coloriage, pour tout $q \geq 2$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $\mathcal{T}$ un arbre fini. On considère alors $\mathbb{G}_q(\mathcal{T})$ le graphe dont les noeuds sont les q-coloriages et dont les arêtes sont placées entre les paires de coloriages qui ne différent qu'en un seul noeud. Combien de noeuds possède le graphe $\mathbb{G}_2(\mathcal{T})$? Est-il connexe ? Si $\mathcal{T}$ est fini, le graphe $\mathbb{G}_3(\mathcal{T})$ est-il connexe ?

1. Quitte à supposer que les couleurs sont blanc et noir, le coloriage suivant est admissible : on colorie les noeuds à hauteur paire (dont la racine) en blanc, et ceux à hauteur impaire en noir. La réciproque est fausse : un cycle de longueur paire n'est pas un arbre, mais il admet un 2-coloriage.
2. $\mathbb{G}_2$ possède 2 noeuds, l'un correspondant au coloriage décrit dans la question précédente, et l'autre à son "négatif". Si $\mathcal{T}$ est réduit à sa racine le graphe $\mathbb{G}_2$ est connexe.

   Sinon $\mathcal{T}$ possède au moins 2 noeuds, et comme les couleurs de chacun des noeuds de $\mathcal{T}$ diffèrent dans les deux coloriages admissibles, on déduit que les 2 noeuds de $\mathbb{G}_2$ sont isolés.

   Par récurrence sur la profondeur de $\mathcal{T}$, on peut en revanche montrer que $\mathbb{G}_3$ est connexe. Précisément on va montrer que si $\mathcal{T}$ est de profondeur n et si c_1 et c_2 sont deux coloriages admissibles de $\mathcal{T}$, alors
   - si c_1 et c_2 coïncident en la racine de $\mathcal{T}$, on peut aller de c_1 à c_2 dans $\mathbb{G}_3(\mathcal{T})$ sans modifier la couleur de la racine.
   - si c_1 et c_2 diffèrent en la racine de $\mathcal{T}$, on peut aller de c_1 à c_2 dans $\mathbb{G}_3(\mathcal{T})$ sans jamais utiliser la troisième couleur restante pour la racine.

   Si $n = 0, \mathcal{T}$ est réduit à sa racine et l'assertion est évidente.

   Supposons alors que l'assertion est vraie pour tout arbre de profondeur au plus n. Fixons alors $\mathcal{T}$ de profondeur $n + 1$ et deux coloriages admissibles de $\mathcal{T}$, disons $c_1, c_2 : \mathcal{T} \to \{1, 2, 3\}$.

   Notons $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_d$ les sous-arbres de $\mathcal{T}$ issus de sa racine.

   Si $c_1(\emptyset) = c_2(\emptyset)$, on peut facilement se convaincre qu'il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{T}_i, i = 1, ..., d$ pour voir que c_1 et c_2 sont connectés dans $\mathbb{G}_3(\mathcal{T})$ sans avoir à toucher à la couleur de la racine (il faut bien noter qu'au cas où on est amené à changer la couleur d'un noeud à la profondeur 1, par hypothèse de récurrence on peut le faire sans jamais utiliser la troisième couleur pour ce noeud, et comme c_1, c_2 sont tous deux admissibles cette troisième couleur est forcément de la couleur de la racine).

   Si $c_1(\emptyset) \neq c_2(\emptyset)$ (pour fixer les idées, et sans perte de généralité, supposons par exemple que $c_1(\emptyset) = 1, c_2(\emptyset) = 2$). Partons de c_1. Par ce qui précède (cas de deux coloriages admissibles qui coïncident en la racine), on peut atteindre le coloriage suivant sans jamais changer la couleur de la racine : tous les noeuds à des hauteurs impaires utilisent la couleur 3, tous les noeuds à hauteur paire la couleur 1.

   L'étape suivant est de changer la couleur de la racine en 2.

A nouveau par ce qui précède, on peut alors atteindre le coloriage suivant sans changer la couleur de la racine : tous les noeuds à des hauteurs impaires utilisent la couleur 3, tous les noeuds à hauteur paire la couleur 2.

Encore une fois par le même raisonnement, on peut alors atteindre c_2 sans avoir à toucher à la couleur de la racine.

Finalement on a pu aller de c_1 à c_2 sans jamais utiliser la troisième couleur (couleur 3 dans notre exemple) pour la racine, ce qui achève la preuve de l'assertion.

3 Compléments

Exercice 9 Soient E un espace fini, $(Z_n, n \geq 1)$ des variables i.i.d à valeurs dans Λ et une fonction $\phi : E \times \Lambda \to E$. On considère alors la chaîne X à valeurs dans E telle que

$$X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1}),\ n \geq 0,$$

et $\mathbb{P}_{x_0}$ la loi de X lorsque $X_0 = x_0$.

1. Déterminer le noyau de transition P de X.
2. Dans cette question $Z_n = (j_n, B_n)$ avec $j_n \sim \mathrm{Unif}\{1, ..., N\}$ indépendante de $B_n \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. Comment choisir la fonction ϕ pour retrouver la marche paresseuse sur l'hypercube ?
3. Quelle différence y a-t-il entre les filtrations $(\mathcal{F}_n), (\mathcal{G}_n)$ $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n), n \geq 0$ et $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, Z_1, ..., Z_n), n \geq 0$.
4. Montrer que
$$T = \inf\{n \geq 0 : \{j_1, ..., j_n\} = \{1, ..., N\}\}$$
est un $(\mathcal{G}_n)$-temps d'arrêt. S'agit-il d'un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt ?
5. On a étudié T dans un exercice précédent. Lequel ? Quel est son ordre de grandeur ?
6. En général si $f : E \to F$ le processus $(Y_n := f(X_n), n \geq 0)$ est-il une chaîne de Markov à valeurs dans E ?

1. Fixons $x, y \in E$. On introduit $A_{x,y} = \{z \in E : \phi(x, z) = y\}$. On a alors $P(x, y) = \int_{A_{x,y}} d\mathbb{P}_{Z_1}(z)$.
2. L'hypercube est $E = \{0, 1\}^n$. Pour retrouver la marche paresseuse sur l'hypercuble (qui lors d'un pas, reste en sa position avec probabilité $1/2$ et sinon se déplace en l'un des noeuds voisins choisi uniformément) Il suffit de prendre
$$\phi : \begin{cases} E \times \{1, ..., n\} \times \{0, 1\} \to E \\ (x, j, b) \to (x_1, ..., x_{j-1}, b, x_{j+1}, ..., x_n) \end{cases},$$
i.e. ϕ remplace la $j$ème coordonnée de x par b.
3. $X_n = \phi(...\phi(\phi(X_0, Z_1), Z_2)..., Z_n)$ est une fonction de $X_0, Z_1, ..., Z_n$, la filtration $(\mathcal{G}_n)$ est donc plus fine que $(\mathcal{F}_n)$.
4. T est clairement un $(\mathcal{G}_n)$-temps d'arrêt. En revanche ce n'est pas un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt. Pour cela, il suffit par exemple de constater que pour $x \in E$, l'événement élémentaire de $\mathcal{F}_n$, $\{X_0 = X_1 = ... = X_n = x\}$ intersecte à la fois $\{\tau = n\}$ et $\{\tau > n\}$.

5. Le temps T est le temps nécessaire à la collection de n coupons. On a vu dans l'exercice correspondant que $T = n\log(n) + o(n\log(n))$ avec probabilité qui tend vers 1 lorsque $n \to \infty$.
6. Non, on n'a pas affaire en général à une chaîne de Markov. Par exemple si X est la marche simple sur $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ absorbée en 0 et si $f \equiv \text{mod}2$, alors $(Y_n = f(X_n), n \geq 0)$ n'est pas une chaîne sur $\{0,1\}$ (on pourrait par exemple vérifier que $\mathbb{P}_1(Y_4 = 1 \mid Y_1 = 0, Y_2 = 1, Y_3 = 0) > 0$ tandis que $\mathbb{P}_1(Y_4 = 1 \mid Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0) = 0$).

Exercice 10 On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P), que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est la filtration naturelle de la chaîne, et que T est un $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ temps d'arrêt.

1. On définit la tribu trace $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$. Montrer que $\mathcal{F}_T = \sigma(X_0, ..., X_T)$.
2. Montrer que si $B \in \mathcal{F}_T$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in E$ on a
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\lambda(X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n=j_n} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\})\\ &\quad = \mathbb{1}_{\{j_0=i\}}\mathbb{P}_i(X_1 = j_1, ..., , X_n = j_n)\mathbb{P}_\lambda(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\})\end{aligned}$$
3. En déduire que
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\lambda(X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n=j_n} \cap B \mid T < \infty, X_T = x)\\ &\quad = \mathbb{P}_\lambda(B \mid T < \infty, X_T = x)\mathbb{1}_{\{j_0=i\}}\prod_{k=0}^{n-1} P(j_k, j_{k+1}).\end{aligned}$$
4. Quelle est la loi de $(X_{T+n}, n \geq 0)$ sachant $\{T < \infty, X_T = x\}$?

1. C'est évident car affirmer que $A \in \sigma(X_0, ..., X_T)$ revient exactement à affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T = n\} \in \sigma(X_0, ..., X_n) = \mathcal{F}_n$. La tribu $\mathcal{F}_T$ est donc la tribu des événements antérieurs à T.
2. C'est exactement la propriété de Markov simple puisque $B \cap \{T = m\} \in \mathcal{F}_m$.
3. En sommant sur $m \in \mathbb{N}$ les deux membres de la relation obtenue à la question précédente (la somme infinie ne pose pas de problème puisque tous les termes sont positifs) on trouve
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\lambda(X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n=j_n} \cap B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = x\})\\ &\quad = \mathbb{1}_{\{j_0=i\}}\mathbb{P}_i(X_1 = j_1, ..., , X_n = j_n)\mathbb{P}_\lambda(B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = x\})\end{aligned}$$
En divisant par $\mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$ on trouve alors l'égalité souhaitée.
4. Sachant $\{T < \infty, X_T = x\}$, $(X_{T+n}, n \geq 0)$ est, d'après la question qui précède, Markov (δ_x, P)

Exercice 11 Soit X une chaîne de Markov à valeurs dans E, de noyau P. Pour $x \in E$, on note $\mathcal{T}(x) := \{t \in \mathbb{N}^* : P^t(x, x) > 0\}$, et $d(x) = \text{pgcd}(\mathcal{T}(x))$

1. Montrer que si les états x et y sont dans la même classe de communication on a $d(x) = d(y)$ (on pourra commencer par remarquer que si s, t sont tels que $P^{(s)}(x, y) > 0, P^{(t)}(y, x) > 0$ alors $d(x)$ et $d(y)$ divisent $s + t$).

2. Montrer que si E est fini et si X est irréductible, alors on peut trouver $r > 0$ tel que $P^((r))(x,y) > 0$ quelque soient $x, y \in E$.

1. Comme suggéré considérons s, t tels que $P^{(s)}(x,y) > 0, P^{(t)}(y,x) > 0$. Alors $P^{(s+t)}(x,x) \geq P^{(s)}(x,y)P^{(t)}(y,x) > 0$ de sorte que $d(x)$ divise $s+t$. De même $P^{(s+t)}(y,y) \geq P^{(t)}(y,x)P^{(s)}(x,y) > 0$ et $d(y)$ divise également $s+t$.
   Par ailleurs si $P^{(n)}(x,x) > 0$ on a également $P^{(n+t+s)}(y,y) \geq P^{(t)}(y,x)P^{(n)}(x,x)P^{(s)(x,y)} > 0$, de sorte que si $n \in \mathcal{T}(x)$, $n+t+s \in \mathcal{T}(y)$, et donc $d(y)$ divise $n+t+s$. Comme on sait déjà que $d(y)$ divise $t+s$ on déduit que $d(y)$ divise n. Enfin comme ce raisonnement est valable pour tout n on conclut que $d(y)$ divise $d(x)$.
   Par un argument symétrique $d(x)$ divise $d(y)$ et on conclut finalement que $d(x) = d(y)$.
2. Soit $x \in E$. Comme $\text{pgcd}(\mathcal{T}(x)) = 1$, on va montrer l'existence de $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{T}(x) \supset \{n_x, n_x+1, n_x+2, ...\}$.
   En effet la suite $(\text{pgcd}(\mathcal{T}(x) \cap \{1, ..., m\}))_m$ est à valeurs entières et décroissante. Elle est constante à partir d'un certain rang, et donc on peut trouver m_0 tel que $\text{pgcd}(\mathcal{T}(x) \cap \{1, ..., m_0\}) = 1$. Notons $\mathcal{T}(x) \cap \{1, ..., m_0\} = \{k_1, ..., k_r\}$. Par Bezout on peut trouver des entiers $a_1, ..., a_r$ tels que $\sum_{i=1}^r a_i k_i = r$. Mais alors quitte à prendre $K \geq k_1 \max |a_i|$, un $K' \geq 0$ et un $k < k_1$ on peut écrire tout entier $n \geq n_x = K \sum_{i=1}^r k_i$ sous la forme
$$n = K \sum_{i=1}^r k_i + K' k_1 + k(\sum_{i=1}^r a_i k_i),$$
   de sorte que
$$n = (K + K' + ka_1)k_1 + \sum_{i=2}^r (K + ka_i)k_i,$$
   avec les entiers $K + K' + ka_1, K + ka_2, ..., K + ka_r$ tous positifs ou nuls. On a donc bien $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq n_x$, comme souhaité.
   Cependant, puisque E est fini, $N := \max_x n_x$ l'est également et $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq N$, et pour tout $x \in E$. Si on note $n_{x,y} := \min\{k : P^k(x,y) > 0\}$, et $N' = \max_{x,y \in E} n_{x,y}$, on voit finalement que si $n \geq N + N'$, quelque soient $x, y \in E$, $n - n_{x,y} \geq N$ et donc
$$\forall x, y \in E \quad P^n(x,y) \geq P^{n-n_{x,y}}(x,x)P^{n_{x,y}}(x,y) > 0.$$

Exercice 12 Soit X une chaîne sur E de noyau P, irréductible, et de période $d \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe une partition de E en d classes $C_0, ..., C_{d-1}$ telles que, pour toute distribution λ sur E vérifiant $\lambda(C_0) = 1$, et pour tout $r \in \{0, ..., r-1\}$, la chaîne $(Y_t^{(r)} := X_{dt+r})_{t \geq 0}$ est à valeurs dans C_r. Peut-on affirmer que cette chaîne est irréductible ? apériodique ?
2. Soit λ une distribution sur E vérifiant $\lambda(C_0) = 1$, montrer que
$$\mathbb{P}_\lambda(X_{dt+r} = j) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \frac{d}{\mathbb{E}_j[T_j^+]}.$$

1. On fixe $x_0 \in E$ et on note

$$C_i = \{x \in E : \exists n \geq 0 P^{nd+i}(x_0, x) > 0\}, \quad i = 0, 1, ..., d-1.$$

Ces ensembles sont clairement non vides. Comme la chaîne est irréductible $\bigcup_{i=0}^{d-1} C_i = E$. Par ailleurs si $i, j \in \{0, ..., d-1\}$ et si $x \in C_i \cap C_j$ alors on peut trouver n, n' tels que $P^{nd+i}(x_0, x) > 0, P^{n'd+j}(x_0, x) > 0$. Cependant comme la chaîne est irréductible il existe r tel que $P^r(x, x_0) > 0$, et on conclut que les entiers $nd + i + r, n'd + j + r$ sont tous deux dans $\mathcal{T}(x)$, et donc sont divisibles par d. Leur différence l'est donc également, et on conclut que d doit diviser $i - j$, de sorte que finalement $i = j$.

On conclut que les C_i sont disjoints, finalement ils forment bien une partition de E.

Soit un quelconque $x \in C_0$, et considérons $\lambda = \delta_{x_0}$. Supposons que y est atteint par la chaîne $Y^{(r)}$, i.e. que $P^{dt+r}(x, y) > 0$ pour un $t \geq 0$. Puisque $x \in C_0$, il existe n tel que $P^{nd}(x_0, x) > 0$, mais alors $P^{(n+t)d+r}(x_0, y) > 0$ de sorte que $y \in C_r$. Ainsi la chaîne $Y^{(r)}$ est bien à valeurs dans C_r.

Un λ tel que $\lambda(C_0) = 1$ peut être décomposé comme $\sum_{x \in C_0} \alpha(x)\delta_x$, et donc par ce qui précède si X est issue de λ la chaîne $Y^{(r)}$ est à valeurs dans C_r.

Notons que le même raisonnement permet d'affirmer que si $\lambda(C_i) = 1$, et si X est issue de λ, alors la chaîne $Y^{(r)}$ est à valeurs dans $C_{i+r \mathrm{mod} d}$.

Fixons alors $x \in C_0$, et que $d(x) = \mathrm{pgcd}(\mathcal{T}(x)) = d$ d'après la première question de l'exercice précédent. Mais alors par un raisonnement similaire à celui de la deuxième question de l'exercice précédent, il existe n_x suffisamment grand tel que pour tout $n \geq n_x$, $P^{nd}(x, x) > 0$.

Fixons alors $y_1, y_2 \in C_r$, et $x \in C_0$. Puisque la chaîne est irréductible et d'après la première partie de cette question on peut trouver $k_1 = n_1 d + r, k_2 = n_2 d - r$ tels que $P^{(k_1)}(y_1, x) > 0, P^{(k_2)}(x, y_2) > 0$. Mais alors pour $n \geq n_x$, et en notant $n' = n + n_1 + n_2$ on a $P^{n'd}(y_1, y_2) = P^{nd+k_1+k_2}(y_1, y_2) > P^{k_1}(y_1, x)P^{nd}(x, x)P^{k_2}(x, y_2) > 0$. On déduit que pour tout $n' \geq n_1 + n_2 + n_x$, $P^{n'd}(y_1, y_2) > 0$, et on conclut que $Y^{(r)}$ est irréductible et apériodique.

2. Notons $\mathbb{Q}_y$ la loi de la chaîne $Y^{(r)}$ issue de $y \in C_r$. Puisqu'un pas de la chaîne $Y^{(r)}$ correspond à d pas de la chaîne X, on constate que $d\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_y}[T_y^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_y}[T_y^+]$. Notons en particulier que la récurrence positive de X est équivalente à celle de $Y^{(r)}$.

Par ailleurs il est facile que la transience de X et celle de $Y^{(r)}$ sont équivalentes. Ainsi les deux chaînes sont ou bien toutes deux récurrentes positives, ou bien toutes deux récurrentes nulles, ou bien toutes deux transientes.

1er cas : Si les chaînes sont toutes deux récurrentes positives la distribution stationnaire de $Y^{(r)}$, notée $\pi^{(r)}$, vérifie

$$\pi^{(r)}(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_y}[T_y^+]} = \frac{d}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_y}[T_y^+]}.$$

Le théorème de convergence à la chaîne irréductible apériodique, récurrente positive $Y^{(r)}$ affirme que quelque soit $\mu^{(r)}$ distribution sur C_r, on a

$$\mathbb{Q}_{\lambda^{(r)}}(Y^{(r)}(n) = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi^{(r)}(y) = \frac{d}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_y}[T_y^+]},$$

ce qui est la conclusion souhaitée.
2ème cas : Si les deux chaînes sont transientes, $\mathbb{P}_\lambda(X_{nd+r} = y)$ tend vers 0 quelque soient λ, y et on obtient facilement la conclusion souhaitée.
3ème cas Reste à traiter le cas où les chaînes sont récurrentes nulles. On peut se concentrer sur l'étude de $Y = Y^{(r)}$ qui est irréductible, apériodique, et, donc, récurrente nulle. Fixons $A > 0$. Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_y}[T_y^+] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_y(T_y^+ > n) = +\infty$, on peut trouver N tel que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{Q}_y(T_y^+ > n) \geq A.$$

Mais alors, pour $n \geq N$, en décomposant suivant les différentes valeurs du dernier temps de passage avant n en y, on obtient par Markov au temps k,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{k=n-N+1}^{n} \mathbb{Q}_y\left(Y_k = y, y \notin \{Y_{k+1}, ...Y_n\}\right) \\ &\geq \sum_{k=n-N+1}^{n} \mathbb{Q}_y(Y_k = y)\mathbb{Q}_y\left(T_y^+ > n-k\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{Q}_y(Y_{n-k} = y)\mathbb{Q}_y\left(T_y^+ > k\right) \end{aligned}$$

et on conclut que pour tout $n \geq N$, il existe forcément au moins un $k \in \{0, ..., N-1\}$ tel que $\mathbb{Q}_y(Y_{n-k} = y) \leq 1/A$.
Reste à utiliser, comme dans la preuve du thórème de convergence que quelque soient μ, ν probas sur E, lorsque $n \to \infty$ $d_{TV}(\mu P^n, \nu P^n) \to 0$, pour voir (en prenant, pour un k fixé, $\mu = \lambda, \nu = \lambda P^k$) que lorsque $n \to \infty$

$$d_{TV}(\lambda P^{n-k}, \lambda P^n) \to 0,$$

et donc en particulier

$$\mathbb{Q}_y(Y_{n-k} = y) - \mathbb{Q}_y(Y_n = y) \to 0,$$

de sorte que $\mathbb{Q}_y(Y_n = y) \leq 2/A$ pourvu que n soit assez grand. Comme notre raisonnement est valable quelque soit A on conclut, comme souhaité, que $\mathbb{Q}_y(Y_n = y) \to 0$.

Exercice 13 Soit X une chaîne de Markov sur l'espace d'état E, μ une mesure sur E, $\mathcal{F}$ la filtration naturelle de X et T un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. On suppose que T est fini presque sûrement sous $\mathbb{P}_\mu$ et que la loi de X_T sous $\mathbb{P}_\mu$ est μ.

1. Que peut-on dire de la mesure

$$\nu(x) := \mathbb{E}_\mu\left[\sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}}\right], \quad x \in E?$$

2. On note θ_k l'opérateur qui à une trajectoire associe la trajectoire shiftée de k pas de temps, i.e. si $(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$,

$$\theta_k((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+k}, n \geq 0).$$

On note alors $T = T_1$ et $T_{k+1} = T_k + T \circ \theta_{T_k}$.

3. Comment peut-on naturellement découper la trajectoire de X en morceaux identiquement distribués ?
4. Ces morceaux sont-ils indépendants ?

1. Cette mesure est invariante. En effet par Markov en k,

$$\begin{aligned}
\nu P(x) &= \sum_{y\in E} \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}\right] P(y,x) \\
&= \sum_{y\in E} \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=y,X_{k+1}=x\}} \mathbb{1}_{\{T>k\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{y\in E} \mathbb{1}_{\{X_k=y,X_{k+1}=x,T>k\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k'=1}^{T} \mathbb{1}_{\{X'_k=x\}}\right] = \nu(x).
\end{aligned}$$

   les interversions $\mathbb{E}_\mu$ et $\sum$ ci-dessus sont justifiées car toutes les quantités intégrées sont positives. Enfin la dernière égalité provient de l'hypothèse que la loi de X_T est μ, de sorte que $\mu(x) = \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_{\{X_0=x\}}) = \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_{\{X_T=x\}})$.
2. Les morceaux de trajectoire $(X_i, i = T_k, ..., T_{k+1})_k$ sont, par la propriété de Markov forte, identiquement distribués.
3. En revanche ils ne sont a priori pas indépendants (dès que μ charge au moins deux états de la chaîne, la loi de $(X_i, i = T_k, ..., T_{k+1})$ dépend de la dernière valeur prise par le morceau de trajectoire précédent).
   Cependant si $\mu = \delta_x$, alors pour tout k, $X_{T_k} = x$ et la propriété de Markov fort assure que les différents morceaux de la trajectoire sont bien i.i.d.

Exercice 14 Soit π la distribution invariante d'une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état fini ou dénombrable E. Montrer que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.
Le fait que E est fini ou dénombrable entraîne l'existence de $y \in E$ avec $\pi(y) > 0$.
Soit alors $x \in E$. Comme la chaîne est irréductible, il existe un k tel que $P^k(y,x) > 0$. Mais alors $\pi(x) = \pi P^k(x) \geq \pi(y)P^k(y,x) > 0$.

Exercice 15 Soit X une chaîne de Markov sur un espace d'état E, dont le noyau de transition est symétrique.

1. On suppose E fini. Montrer que la distribution uniforme sur E est stationnaire.
2. On suppose encore E fini. A quelle condition peut-on affirmer que la distribution uniforme est la seule distribution stationnaire ? Que se passe-t-il si cette condition n'est pas vérifiée ?
3. Construire un exemple de chaîne avec E infini (dénombrable), P irréductible et symétrique, et pour lequel X possède une unique distribution invariante.
4. Construire un exemple de chaîne avec E infini (dénombrable), P irréductible et symétrique, et pour lequel X ne possède aucune distribution invariante.

1. Notons $n = |E|$, et π la mesure uniforme sur E. Comme P est symétrique,
$$\sum_{x\in E} \pi(x)P(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{x\in E} P(y,x) = \frac{1}{n} = \pi(y).$$
2. Si X est irréductible, la distribution stationnaire est unique, c'est donc π.
   Comme P est symétrique X ne peut posséder de classe transiente.
   Lorsque X n'est pas irréductible, il y a donc forcément plusieurs classes récurrentes, et donc une infinité de distributions stationnaires (ce sont les combinaisons convexes des distributions uniformes sur chaque classe récurrente, et π est un cas particulier d'une telle combinaison).
3. chaîne de naissance et mort sur $\mathbb{N}$ avec $P(i,i+1) = P(i+1,i) = \frac{1}{2^{i+1}}, i \geq 0$, de sorte que $P(0,0) = 1/2, P(i,i) = 1 - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}}, i \geq 1$.
4. marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Exercice 16 On considère une chaîne irréductible X à valeurs dans E au plus dénombrable. Pour $x, y \in E$ on pose
$$G(x,y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_t=y\}}\right] \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$
La fonction G est appelée *fonction de Green* de la chaîne X.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   - la chaîne X est récurrente.
   - $\exists x \in E : G(x,x) = \infty$.
   - $\forall x, y \in E, G(x,y) = \infty$.
2. Calculer $G(0,0)$ lorsque X est la marche aléatoire simple réfléchie (où $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1$ et pour tout $k \geq 1$ $\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p \in [0,1]$) en fonction de p.
3. On suppose que $\mathcal{T}$ est un arbre d-régulier infini (i.e. tous les noeuds sont de degré $d+1$, sauf la racine $\emptyset$ qui est de degré d), et on considère la marche λ-biaisée sur cet arbre (où $\lambda \in [0,1]$). Depuis la racine, la marche choisit un descendant direct uniformément parmi les d. Depuis tout autre noeud, la marche se déplace vers le parent direct avec probabilité $\lambda/(\lambda+d)$, et sinon choisit un descendant direct uniformément parmi les d. Déterminer $G(\emptyset,\emptyset)$ en fonction de d, λ.

1. Soient x et y fixés, et supposons X est récurrente, i.e pour un x_0 on a que le temps de retour en x_0 de la chaîne issue de x_0 est fini presque sûrement. Considérons la chaîne issue de x_0. Comme elle est irréductible $P^k(x_0,x) > 0$ pour un $k > 0$ donc par Markov fort aux temps de retour successifs en x_0, p.s. on visite également x une infinité de fois. Forcément donc $\mathbb{P}_x(T_{x_0} = \infty) = 0$ sinon on contredirait la récurrence de la chaîne. La chaîne issue de x visite donc forcément x_0 ; et par le même raisonnement p.s. elle visite alors y une infinité de fois d'où $G(x,y) = \infty$.
   Lorsque $G(x,y) = \infty$ quelque soient x, y, quitte à prendre $y = x$ on a alors bien l'existence d'un x tel que $G(x,x) = \infty$.

Enfin si X est transiente alors $\mathbb{P}_x(T_x^+ = \infty) = p > 0$, mais alors par Markov fort, le nombre de visites en x pour la chaîne issue de x est géométrique de paramètre p, et dans ce cas $G(x,x) = 1/p < \infty$.

2. On a
$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$
de sorte que $G(0,0) = \infty$ et la chaîne est récurrente.

3. Lorsque X est la marche simple réfléchie, si $p \leq 1/2$ elle est réccurrente (quitte à comparer à la question précédente), et donc $G(0,0) = \infty$. Reste à traiter le cas où $p > 1/2$. D'après l'exercice précédent, $\mathbb{P}_0(T_0^+ = \infty) = \frac{2p-1}{p}$. Par Markov fort, le nombre total de visites en 0 est géométrique($\frac{2p-1}{p}$), et donc si $p > 1/2$,
$$G(0,0) = \frac{p}{2p-1}.$$

4. Quitte à noter $|X_n|$ la hauteur de X_n dans l'arbre (i.e. la distance à la racine), on voit facilement que $(|X_n|, n \geq 0)$ reste Markov, c'est même une marche simple réfléchie avec $p = d/(d+\lambda)$. On a donc
$$G(\emptyset,\emptyset) = \begin{cases} \frac{d}{d-\lambda} \text{ si } d > \lambda \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}.$$

Exercice 17

1. Soit X chaîne de Markov à valeurs dans E, de noyau P, $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturelle de X, et $f : E \to \mathbb{R}$ bornée Montrer que le processus
$$\left(M_n^f := \sum_{k=1}^{n} \left(f(X_i) - Pf(X_{i-1})\right),\ n \geq 0 \right)$$
est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2. Etablir la réciproque : si pour toute f bornée, $(M_n^f, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale, alors X est Markov de noyau P.

1. Les propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité de M_n^f sont évidentes. Notons d'autre part que $M_n^f - Pf(X_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus par Markov au temps n la loi de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est exactement celle de X_{n+1} sachant X_n, i.e. $P(X_n, \cdot)$. On a donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}^f \mid \mathcal{F}_n] &= M_n^f - Pf(X_n) + \mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= M_n^f - Pf(X_n) + \sum_{x\in E} f(x)P(X_n, x) = M_n^f, \end{aligned}$$
et on conclut que $(M_n^f)_n$ est bien une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2. Supposons que pour toute f bornée, $(M_n^f, n \geq 0)$ est une martingale. Fixons $x \in E$, pour $f = \mathbb{1}_x$, on obtient que
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=x} \mid \mathcal{F}_n] = P\mathbb{1}_x(X_n) = P(X_n, x).$$

Autrement dit, pour tout $(x, x_0, ..., x_n) \in E^{n+2}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n) = P(x_n, x),$$

et (X_n) est donc bien une chaîne de Markov homogène de noyau P.

Exercice 18 Soit X une chaîne de Markov sur E fini de matrice de transition P. On dit que $h : E \to \mathbb{R}$ est harmonique au point $x \in E$ ssi $\sum_{y \in E} P(x, y)h(y) = h(x)$.
Dans tout l'exercice on suppose que la chaîne X est irréductible.

1. Montrer qu'une fonction h harmonique sur E est constante.
2. Montrer qu'une fonction h harmonique sur $A \subsetneq E$ vérifie
$$\max_{x \in E} h(x) = \max_{x \in E \setminus A} h(x).$$
3. Soit $B \subset\neq E$, et $h_B : B \to \mathbb{R}$. Montrer que $h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{\tau_B})], x \in E$ est l'unique extension de h_B à E qui est harmonique sur $A = E \setminus B$

1. L'espace étant fini, h atteint son maximum M, disons en $x \in E$. Puisqu'elle est harmonique en x, $M = h(x) = \sum_{y_1} P(x, y_1)h(y_1)$ et donc $h(y_1) = M$ pour tout y_1 tel que $P(x, y_1) > 0$. En répétant ce raisonnement, on voit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout y_n tel que $P^{(n)}(x, y_n) > 0$ on a $h(y_n) = M$. On conclut que h est constante égale à M puisque la chaîne est irréductible.
2. La fonction h atteint son maximum. Si c'est sur $E \setminus A$ il n'y a rien à démontrer. Sinon elle l'atteint sur A et on peut répeter la preuve de la question précédente pour voir que les points de $\partial A = \{y \in E \setminus A : \exists x \in A \ P(x, y) > 0\} \subset E \setminus A$ réalisent également ce maximum.
3. Pour vérifier qu'une telle fonction est bien définie on va d'abord montrer que $\tau_B < \infty$ p.s. Comme la chaîne est irréductible, on peut trouver k tel que $P^{(k)}(x_1, x_2) > 0$ quelque soient $x_1, x_2 \in E$.
Fixons alors $y \in B$, comme E est fini $p = \min\{P^{(k)}(x, y), x \in E\} > 0$, la propriété de Markov aux temps $k, 2k, 3k, ...$ entraîne alors que $\tau_B \leq kG$ où $G \sim \mathrm{Geom}(p)$.
Si $x \in B$ il est évident que $\tau_B = 0$ sous $\mathbb{P}_x$ et donc $h(x) = h_B(x)$.
Vérifions maintenant que h_B est harmonique sur $A = E \setminus B$. Soit $x \in A$. Par Markov au temps 1,
$$h(x) = \mathbb{E}_x[h_B(X_{\tau_B})] = \sum P(x, y)\mathbb{E}_y[h_B(X_{\tau_B})],$$
comme souhaité.
Enfin, il reste à vérifier l'unicité de h. Supposons qu'il existe deux fonctions h_1, h_2 harmoniques sur A et coïncidant avec h_B sur B. La différence $h_1 - h_2$ reste bien entendu harmonique sur A, et elle vaut 0 sur B. D'après la question précédente elle atteint son maximum sur B et donc elle est négative ou nulle sur A. Par le même raisonnement $h_2 - h_1$ reste également négative ou nulle sur A et on conclut finalement que $h_1 = h_2$.

Exercice 19 Soit X une chaîne de Markov sur l'espace d'état E, avec noyau P. On suppose E muni d'une relation d'équivalence $\sim$.

1. Pour $x \in E$, on note $\tilde{x}$ sa classe dans $E = E/\sim$.

   On suppose que pour tout $\tilde{a}, \tilde{b} \in E/\sim$, l'application $\begin{cases} \tilde{a} \to \mathbb{R}_+ \\ x \to \sum_{y \in \tilde{b}} P(x,y) \end{cases}$ reste constante. Montrer qu'alors $\tilde{X}$ reste une chaîne de Markov dont on précisera espace d'état et noyau de transition $\tilde{P}$. On l'appelle chaîne projetée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $E = \mathbb{Z}/(2n\mathbb{Z})$. On considère X la marche simple (non nécessairement symétrique) sur E, et on note $\sim$ la relation déquivalence
$$x \sim y \Leftrightarrow x + y = 0[2n].$$
   A quelle condition peut-on définir la chaîne projetée. Lorsque cette condition est satisfaite on la décrira.
3. Soit X la marche simple sur l'hypercube $E = \{0,1\}^d$, où $d \geq 1$. On note $\sim$ la relation déquivalence
$$x \sim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^d x_i = \sum_{i=1}^d y_i.$$
   Décrire la chaîne projetée correspondante.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\mathbb{P}(X_0 \in \tilde{a_0}, ..., X_n \in \tilde{a}, X_{n+1} \in \tilde{b}) = \sum_{x_0 \in \tilde{a_0}, ..., x_n \in \tilde{a_n}, y \in \tilde{b}} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = a_n) P(x,y).$$
   D'après l'hypothèse de l'énoncé, $f(\tilde{a_n}, \tilde{b}) := \sum_{y \in \tilde{b}} P(x,y)$ ne dépend pas du choix de $a_n \in \tilde{a_n}$ et donc
$$\mathbb{P}(X_0 \in \tilde{a_0}, ..., X_n \in \tilde{a}, X_{n+1} \in \tilde{b}) = f(\tilde{a}, \tilde{b}) \mathbb{P}(X_0 \in \tilde{a_0}, ..., X_n \in \tilde{a_n}).$$
   On définit donc $\tilde{P}(\tilde{a}, \tilde{b}) = f(\tilde{a}, \tilde{b})$, et il est clair d'après le calcul ci-dessus et une récurrence immédiate que $\tilde{X}$ est Markov sur E de noyau $\tilde{P}$.
2. On $E = \{0, ..., n\}$ (la classe $i, 1 \leq i \leq n$ correspond aux points i et $2n - i$ dans E). Pour que $\sum_{y \in \tilde{b}} P(x,y)$ ne dépende pas de x, il faut clairement que la marche initiale soit symétrique. Dans ce cas on obtient pour la chaîne projetée une marche simple symétrique sur $\{0, ..., n\}$, réfléchie en 0 et en n
3. Ici $E = \{0, ..., d\}$ et on retrouve le modèle classique de l'urne d'Ehrenfest, avec
$$\tilde{P}(i, i+1) = \frac{d-i}{d}, i = 0, ..., d-1, \quad \tilde{P}(i, i-1) = \frac{i}{d}, i = 1, ..., d.$$

Exercice 20 Pour tout $j = 1, ..., d$ on suppose que $X^{(j)}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'état E_j (fini ou dénombrable, et non réduit à un seul point) de noyau de transition P_j. On suppose alors que ν est une distribution sur $\{1, ..., d\}$ et on considère alors la chaîne $X = (X^{(1)}, ..., X^{(d)})$ de noyau P :
$$P(x,y) = \sum_{j=1}^d \nu(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}},$$
et on l'appelle chaîne produit associée à la distribution ν.

1. Donner une CNS pour l'irréductibilité de X. On suppose cette condition vérifiée dans la suite de l'exercice.
2. Donner une CNS pour l'apériodicité de X.
3. Montrer qu'une CNS pour l'existence d'une unique distribution stationnaire π de X est l'existence d'une unique distribution stationnaire π_j pour chaque chaîne coordonnée $X_j, j = 1, ..., d$. Exprimer alors la distibution stationnaire de la chaîne produit en fonction des $\pi_j, j = 1, ..., d$ et ν.
4. Qu'obtient-on lorsque ν est uniforme sur $\{1, 2\}$ et lorsque $X_j, j = 1, 2$ sont toutes deux des marches simples sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
5. Comment choisir $X_1, ..., X_d$ et ν afin de retrouver pour X la marche simple sur l'hypercube $\{0, 1\}^d$? Et la marche paresseuse sur l'hypercube ?

1. Il faut et il suffit que pour tout $i \in \{1, ..., d\}$, $\nu(i) > 0$ et X_i irréductible.

   Supposons que les chaînes coordonnées sont irréductibles et que ν charge $\{1, ..., d\}$. Fixons x et y dans l'espace produit. Soit k_j l'entier tel que $P_j^{k_j}(x^{(j)}, y^{(j)}) > 0$. Pour $k = k_1 + ... + k_d$ on constate facilement que $P^{(k)}(x, y) > 0$.

   En revanche si il existe i tel que $\nu(i) = 0$ la i-ème coordonnée reste constante, et la chaîne ne peut alors être irréductible (on a supposé pour éviter les cas dégénérés que E_i n'était pas réduit à un seul point).

   Enfin si X_i n'est pas irréductible avec par exemple $a \nrightarrow b$ alors il est clair que $x \nrightarrow y$ pour X dès que $x^{(i)} = a, y^{(i)} = b$.
2. Fixons $x \in E$.

   Soient $k_i = \text{pgcd}\{n \geq 1 P_i^n(x^{(i)}, x^{(i)}) > 0\}, i = 1..., d$ les périodes respectives des chaînes coordonnées. Pour que X soit apériodique il faut et il suffit que $\text{pgcd}(k_1, ..., k_d) = 1$.

   En effet il est clair qu'on peut revenir à un point de départ en k_i pas, quelque soit $i \in \{1, ..., d\}$, quitte à ne bouger que le long d'une coordonnée. Ainsi la période de X divise $\text{pgcd}(k_1, ..., k_d)$.

   Par ailleurs, si, pour un $k > 0$, $P^k(x, x) > 0$, et si la trajectoire a fait intervenir les chaînes coordonnées $i_1, ..., i_\ell$, alors

   $$k = \sum_{j=1}^{\ell} n_{i_j} k_{i_j},$$

   et donc $\text{pgcd}(k_1, ..., k_d)$ divise la période de X.
3. On obtient une marche sur le tore discret de dimension 2.
4. ν uniforme, $E_i = \{0, 1\}$, et $P_i(0, 1) = P_i(1, 0) = 1$ permet de retrouver la marche simple sur l'hypercube.

   Pour retrouver la marche paresseuse (et ainsi éviter les problèmes de périodicité), prendre $P_i(0, 1) = P_i(1, 0) = 1/4$.