Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange

Exercices 3

1 Couplage, suite

Exercice 1 Soit P irréductible, apériodique (on rappelle qu'il existe $r > 0$ tel que P^r a toutes ses entrées supérieures ou égales à une constante $\delta > 0$), et π la distribution stationnaire associée.
On considère le couplage (X, Y) de chaînes de noyau P, issues respectivement de μ, ν, tel que X et Y évoluent indépendamment jusqu'au temps

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\},$$

après quoi elles évoluent ensemble.

1. Montrer que
$$\overline{d}(t) \leq \sup_{\mu,\nu \in \mathbf{P}(\Omega)} \mathbb{P}_{\mu,\nu}(\tau > t).$$
2. Montrer que $\tau \leq rG$, où G est une variable géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Quel résultat a-t-on redémontré ?

1. Pour tout μ, ν, (X_t, Y_t) réalise un couplage de μP^t et νP^t et donc
$$||\mu P^t - \nu P^t||_{\mathrm{TV}} \leq \mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \mathbb{P}(\tau > t).$$
Comme $\overline{d}(t) = \sup_{\mu,\nu \in \mathbf{P}(\Omega)} ||\mu P^t - \nu P^t||_{\mathrm{TV}}$ on en déduit le résultat souhaité.
2. Puisque $\min_{x,y \in \Omega} P^r(x, y) \geq \delta$ on a quels que soient μ, ν, $k \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}_{\mu,\nu}(\tau \leq (k+1)r \mid \tau > kr) \geq \delta.$$
On en déduit le résultat souhaité avec G de paramètre δ.
3. On a montré pour $t = rk + j, 0 \leq j < r$,
$$d(t) = d(rk + j) \leq d(rk) \leq \overline{d}(rk) \leq (1-\delta)^k = (1-\delta)^{\lfloor t/r \rfloor},$$
et on a donc redémontré le théorème de convergence.

Exercice 2 On considère la marche sur le groupe $G = \mathfrak{S}_n$, dont la loi de transition est dictée par la relation $P(g, hg) = \mu(h), g, h \in G$, où μ est telle que

$$\mu(id) = \frac{1}{n}, \qquad \mu((i\ j)) = \frac{2}{n^2},\ i \neq j,$$

$(i\ j)$ étant la transposition des entiers i et j.

1. Vérifier que la marche est irréductible, apériodique, réversible. Quelle est sa distribution stationnaire ?
2. On considère la dynamique suivante : au temps t, on tire indépendamment et indépendamment des étapes précédentes $i_t, j_t \sim \mathrm{Unif}\{1, ..., n\}$. On choisit alors
$$\sigma_t := (\sigma_{t-1}(i_t) \;\; j_t) \circ \sigma_{t-1}.$$
Quel est le noyau de transition Q de la chaîne qui correspond à cette dynamique ?
3. On couple deux chaînes de noyau Q en effectuant systématiquement les mêmes choix pour $i_t, j_t, t \geq 1$. Montrer que
$$\tau_{\text{couple}} \leq \tau_1 + ... + \tau_n,$$
où $\tau_i \sim \mathrm{Geom}\left(\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2\right)$.
4. Déduire des questions précédentes que pour la chaîne de noyau P,
$$t_{\text{mix}} \leq \frac{2n^2\pi^2}{3}.$$

On notera qu'on s'intéresse ici à un mélange de cartes. Pour P, une étape du mélange consiste à échanger les deux cartes situées en des positions i_t, j_t du paquet (et ne rien faire si $i_t = j_t$.

1. On se sert des résultats d'un exercice de la feuille 1. Tout d'abord $\mathcal{H} = \{h \in G : \mu(h) > 0\} = \{id, (i \; j), 1 \leq i > j \leq n\}$ engendre G, donc la chaîne est irréductible, et son unique distribution stationnaire est la distribution uniforme sur G. Comme $\mu(id) > 0$ la chaîne est clairement apériodique. Enfin puisque $(i \; j) = (i \; j)^{-1}$ on a facilement que $\mu(g) = \mu(g^{-1}), g \in G$ de sorte que la chaîne est réversible.
2. La dynamique consiste à aller piocher la carte i_t et l'échanger avec la carte en position j_t. Sans surprise, elle est en fait identique à la dynamique initiale. En effet comme i_t est uniforme, il en est de même de $\sigma_{t-1}(i_t)$ et donc pour des $k, \ell \in \{1, ..., n\}$
$$\mathbb{P}(\sigma_{t-1}(i_t) = k, j_t = \ell) = \frac{1}{n^2},$$
de sorte que $Q = P$.
3. Notons que ce couplage peut s'interpréter en termes de mélange de cartes : on dispose de deux jeux de n cartes, et à l'étape t, on va chercher la carte i_t dans chacun des deux paquets, et dans chacun des deux paquets, on l'échange avec la carte qui était située à la position j_t au temps $t-1$.
On note σ, s les deux chaînes couplées. Pour $t \geq 0$, on note
$$A_t = \{i \in \{1, ..., n\} : \sigma_t(i) = s_t(i)\}.$$
Quatre scenari sont envisageables lors de l'étape au temps t :
– Si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) = s_{t-1}^{-1}(i_t)$, i.e. si au temps $t-1$, la carte i_t est dans la même position dans les deux paquets, et si $\sigma_{t-1}^{-1}(j_t) = s_{t-1}^{-1}(j_t)$ i.e si les cartes qui étaient en position j_t coïncidaient au temps $t-1$, alors on ne fait qu'échanger des cartes qui avaient la même position dans les deux paquets et $|A_t| = |A_{t-1}|$.

– Si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) = s_{t-1}^{-1}(i_t)$ et si $\sigma_{t-1}^{-1}(j_t) \neq s_{t-1}^{-1}(j_t)$ alors on a déplacé la carte i_t de sa même position au temps $t-1$ dans les deux paquets vers la position j_t. On a également déplacé les cartes qui se trouvaient en position j_t au temps $t-1$ vers la même position dans les deux paquets, mais comme il s'agit de deux cartes distinctes, on obtient à nouveau dans ce cas que $|A_t| = |A_{t-1}| + 1$.
– Si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) \neq s_{t-1}^{-1}(i_t)$ et si $\sigma_{t-1}^{-1}(j_t) = s_{t-1}^{-1}(j_t)$, alors au temps t, on a ramené la carte i_t à une même position dans les deux paquets, mais on a également déplacé la même carte (qui se trouvait en position j_t au temps $t-1$ dans les deux paquets) à des positions distinctes dans les deux paquets, de sorte qu'encore une fois $|A_{t-1}| = |A_t|$.
– Si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) \neq s_{t-1}^{-1}(i_t)$ et si $\sigma_{t-1}^{-1}(j_t) \neq s_{t-1}^{-1}(j_t)$, alors on a ramené la carte i_t dans la même position j_t dans les deux paquets, les cartes qui occupaient cette position au temps $t-1$ sont déplacées vers des positions distinctes, et dans ce cas on a forcément $|A_t| > |A_{t-1}|$.

On en déduit que quelque soient $t \geq 1$, et $i \in \{1, ..., n\}$

$$\mathbb{P}(|A_t| > |A_{t-1}| \mid |A_{t-1}| = i-1) = \frac{(n-i+1)^2}{n^2}.$$

Si on note $T_i = \inf\{t \geq 0 : \#A_t \geq i\}, \tau_i = T_i - T_{i-1}$, on a pour toutes distributions initiales ; $\tau_{\text{couple}} \leq T_n$, et $\tau_i \leq \text{Geom}\left(\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2\right)$, comme souhaité.

4. On a quelque soit les distributions initiales

$$\mathbb{E}[\tau_{\text{couple}}] = \mathbb{E}[T_n] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\tau_i] = \frac{n^2}{(n-i+1)^2} \leq \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

Comme $\mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > t) \leq \mathbb{E}[\tau_{\text{couple}}]/t$ on déduit que $t_{\text{mix}} \leq \frac{4n^2\pi^2}{6}$, comme souhaité.

Exercice 3 On considère la dynamique suivante sur l'espace des coloriages $\{1, ..., q\}^{\mathcal{V}}$ du graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ (on pourra se restreindre, ou pas, au sous-ensemble Ω des coloriages admissibles, pour lesquels $x(v) \neq x(w)$ lorsque $v \sim w$, i.e lorsque $(v, w) \in \mathcal{E}$). On suppose dans la suite que $|\mathcal{V}| = n$, que les noeuds de $\mathcal{G}$ ont degré uniformément borné par Δ, et que le nombre de couleurs q vérifie $q > 3\Delta$ (de sorte qu'en particulier, il y a de nombreux coloriages admissibles est la chaîne restreinte à l'espace Ω est irréductible).
Pour des coloriages $x, y \in \{1, ..., q\}^{\mathcal{V}}$ on note

$$\rho(x, y) := \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}$$

le nombre de noeuds où les couleurs diffèrent entre x et y.
Soient $(v_t, c_t)_{t \geq 0}$ i.i.d uniformes sur $\mathcal{V} \times \{1, ..., q\}$. le pas de la dynamique au temps t consiste à changer uniquement la couleur du noeud v_t en la couleur c_t *si* le coloriage obtenu est *admissible en* v_t (i.e. si aucun des voisins de v ne possédait déjà la couleur c_t au temps $t-1$), sinon on ne fait rien.
Plus précisément, pour une configuration $x \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ on définit $x^{v,c} \in \{1, ..., q\}^{\mathcal{V}}$ par

$$x^{v,c}(w) := x(w) \;\; \forall w \neq v, \quad x^{v,c}(v) = c,$$

et alors

$$X_t = X_{t-1}^{v_t, c_t} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}(w) \neq c_t \;\, \forall w \sim v_t\}} + X_{t-1} \mathbb{1}_{\{\exists w \sim v_t : X_{t-1}(w) = c_t\}}.$$

1. Montrer qu'on peut réaliser un grand couplage pour cette dynamique, quitte à faire les mêmes choix $(v_t, c_t)_{t\geq 1}$ de noeuds et de couleurs pour toutes les chaînes.
2. On suppose que $x, y \in \{1, ..., q\}^{\mathcal{V}}$ sont tels que $\rho(x, y) = 1$ et on considère les chaînes X^x, X^y issues respectivement de x, y. Montrer que
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq 1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}.$$
3. Lorsque $\rho(x, y) = r$, montrer que
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq \rho(x, y)\left(1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}\right).$$
On pourra utiliser la question précédente et l'existence de $x_1, x_2, ..., x_{r-1}$ tels que
$$\rho(x, x_1) = \rho(x_1, x_2) = ... = \rho(x_{r-1}, y) = 1.$$
4. En déduire que quelque soient x, y,
$$\mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) \leq n\left(1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}\right)^t$$
puis que
$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \lceil \frac{q}{q - 3\delta}\, n\left(\log(n) + \log(\varepsilon^{-1})\right)\rceil.$$

1. Le choix commun des $(v_t, c_t)_{t\geq 1}$, i.e. le couplage libre, permet clairement de coupler les chaînes $\{(X_t^x)_{t\geq 0}, x \in \Omega\}$.
2. Puisque $\rho(x, y) = 1$ on peut trouver $v \in \mathcal{V}$, tel que $y(v) \in \{1, ..., q\} \setminus x(v)$ et $y = x^{v, y(v)}$. Pour que $\rho(X_1^x, X_1^y) = 0$ il faut et il suffit que $v_1 = v$ et que le coloriage obtenu soit admissible en v ; mais comme x possède au plus Δ voisins, au moins $q - \Delta$ choix de couleurs sont possibles et
$$\mathbb{P}(\rho(X_1^x, X_1^y) = 2) \geq |\mathcal{V}|^{-1}\frac{q - \Delta}{q} = \frac{q - \Delta}{qn}.$$
Il est également possible que $\rho(X_1^x, X_1^y) = 2$, si on change une couleur d'un voisin w de v en $x(v)$ (resp. en $y(v)$) ce qui force $X_1^x = x$, et si le coloriage obtenu pour X_1^y est admissible en w (resp. $X_1^y = y$ et si le coloriage obtenu pour X_1^x est admissible en w). Il y a au plus Δ voisins de x, et pour chacun de ces voisins, au plus deux choix de couleurs qui risquent de résulter en $\rho(X_1^x, X_1^y) = 2$. On a donc
$$\mathbb{P}(\rho(X_1^x, X_1^y) = 2) \leq \frac{2\Delta}{nq}.$$
Enfin si $\rho(X_1^x, X_1^y)$ ne vaut ni 0, ni 2, il vaut forcément 1. On a donc
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y) - 1] \leq -\frac{q - \Delta}{qn} + \frac{2\Delta}{nq} \leq -\frac{q - 3\Delta}{nq},$$
comme souhaité.

3. On considère $x_0 = x, x_1, x_2, ..., x_{r-1}, x_r = y$ tels que

$$\rho(x_0, x_1) = \rho(x_1, x_2) = ... = \rho(x_{r-1}, x_r) = 1.$$

Comme ρ est une distance sur Ω on a

$$\rho(X_1^x, X_1^y) \leq \sum_{k=0}^{r-1} \rho(X_1^{x_k}, X_1^{x_{k+1}}).$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq r\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right),$$

comme souhaité.

4. Par récurrence (quitte à conditionner aux valeurs prises au temps 1), on obtient

$$\mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)] \leq \rho(x,y)\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t,$$

et comme $\operatorname{diam}(\Omega) = n$ on a

$$\max_{x,y} \mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)] \leq n\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t,$$

et on conclut puisque par Markov

$$\mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) = \mathbb{P}(\rho(X_t^x, X_t^y) \geq 1) \leq \mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)].$$

5. On a donc établi que

$$d(t) \leq \overline{d}(t) \leq \max_{x,y\in\Omega} \mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) \leq n\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t,$$

et on conclut à l'inégalité souhaitée pour $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$.

2 Temps stationnaires, temps stationnaires forts

Exercice 4

1. On considère $(Y_t, t \geq 0)$ une suite de variables intégrables, i.i.d et $\tau \in \mathbb{N}$ intégrable tel que pour tout $t \geq 0$, $\{\tau \geq t\}$ est indépendant de Y_t. Montrer l'identité de Wald :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\tau} Y_t\right] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[Y_1],$$

où par convention, la somme dans l'espérance est nulle si $\tau = 0$

2. On suppose à nouveau les $(Y_t, t \geq 0)$ i.i.d on note $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, ..., Y_t)$ et on suppose que τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt intégrable. Montrer que l'identité de Wald est vérifiée.

1. On a
$$\sum_{t=1}^{\tau} |Y_i| = \sum_{t\geq 1} |Y_t| \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}},$$
dont l'espérance est finie (elle vaut $\mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[|Y_1|]$) grâce aux hypothèses. Par convergence dominée, on déduit que
$$\left[\sum_{t=1}^{\tau} Y_i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t\geq 1} Y_t \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}}\right] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[Y_1],$$
où pour la dernière égalité, et comme plus haut, on a utilisé l'indépendance de $Y_t, \mathbb{1}_{\{\tau\geq t\}}$ pour voir que $\mathbb{E}\left[Y_t \mathbb{1}_{\{\tau\geq t\}}\right] = \mathbb{E}[Y_1]\mathbb{P}(\tau \geq t)$.
2. Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt, on a que $\{\tau \geq t\} = \{\tau \leq t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$. Or Y_t est indépendante de $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Y_0, ..., Y_{t-1})$ et donc de $\{\tau \geq t\}$. On est donc dans le cadre de la question précédente.

Exercice 5 Soit P une matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques (et toutes les entrées sont strictement positives). Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\tau = t$ est un temps stationnaire fort de la chaîne X de noyau P.
Quelle conséquence peut-on tirer de cette observation pour la marche simple, $1/n$-paresseuse sur le graphe complet à n sommets ?
Dans ce cas on a clairement pour tous $i, j \in \Omega$, $P(i, j) = \pi(j)$, de sorte que, quelque soit la distribution initiale, $X_1 \sim \pi$ (et donc $X_t \sim \pi$, pour tout $t \geq 1$). Ainsi, pour tout $t \geq 1$ $\tau := t$ est un temps stationnaire, comme il est déterministe, on vérifie immédiatemment que c'est est également un temps stationnaire fort.
La marche simple, $1/n$-paresseuse, sur le graphe complet à n sommets est un exemple d'une telle situation (ici π est la mesure uniforme sur les n sommets du graphe). On en déduit que $\tau = 1$ est un temps stationnaire fort pour une telle marche et que $t_{\text{mix}}(\varepsilon) = 1$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$

Exercice 6 Soit $\mathcal{G}$ un graphe, v un noeud de $\mathcal{G}$, et τ un temps stationnaire fort pour la marche simple sur $\mathcal{G}$ issue de v.
Soit $\mathcal{H}$ le graphe consistant en deux copies identiques $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}$ gluées en le noeud v (de sorte que $\deg_{\mathcal{H}}(v) = 2\deg_{\mathcal{G}}(v)$).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $T := T_v + \tau$ est un temps stationnaire fort pour la marche sur $\mathcal{H}$ issue de x.
2. Que peut-on en déduire dans le cas où $\mathcal{G}$ est le graphe complet à n sommets, et qu'on considère la marche $1/n$-paresseuse sur ce graphe ? Calculer dans ce cas $\max_x \mathbb{E}_x[\tau]$, et en déduire une borne supérieure pour le temps de mélange de la marche sur $\mathcal{H}$.

1. Pour tout élément $w \in \mathcal{V}$ on note w_1 son représentant dans $\mathcal{G}_1$, et w_2 son représentant dans $\mathcal{G}_2$ (dans le cas particulier $w = v$, on a $w_1 = w_2 = v$).
Si X est la marche sur $\mathcal{H}$ on note Y la marche projetée sur $\mathcal{G}$ (deux noeuds de $\mathcal{H}$ étant équivalents s'ils sont égaux ou représentent le même élément de $\mathcal{G}$). Par hypothèse τ est un temps stationnaire fort pour la marche projetée Y.
Par symétrie, $\pi_{\mathcal{G}}(w) = 2\pi_{\mathcal{H}}(w)$ pour tout $w \neq v$ (et $\pi_{\mathcal{G}}(v) = \pi_{\mathcal{H}}(v)$).

Par Markov au temps T_v, et le fait que τ est stationnaire fort pour Y,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_x(T_v + \tau = k, X_{T_v+\tau} \in \{w_1, w_2\}) \\
= \; & \mathbb{P}_x(T_v + \tau = k, Y_{T_v+\tau} = w) \\
= \; & \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}_x(T_v = \ell)\mathbb{P}_v(\tau = k - \ell, Y_{\tau-\ell} = w) \\
= \; & \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}_x(T_v = \ell)\mathbb{P}_v(\tau = k - \ell)\pi_{\mathcal{G}}(w) \\
= \; & \mathbb{P}_x(T_v + \tau = k)\pi_{\mathcal{G}}(w).
\end{aligned}$$

Reste à observer que toujours par symétrie, il y a bijection entre les trajectoires conduisant en k pas de x à $w_1 \neq v$ et passant par v et les trajectoires conduisant en k pas de x à w_2 et passant par v (il suffit de garder la partie de la trajectoire de x à v, puis de remplacer dans le reste de la trajectoire tout élément de $\mathcal{G}_i$ par son pendant dans $\mathcal{G}_{3-i}$). On en déduit que pour tout $w \neq v$

$$\mathbb{P}_x(T_v + \tau = k, X_{T_v+\tau} = w_1) = \mathbb{P}_x(T_v + \tau = k, X_{T_v+\tau} = w_2).$$

Il découle que pour $w \neq v$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(T_v + \tau = k, X_{T_v+\tau} = w_1) \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(T_v = \ell)\mathbb{P}_v(\tau = k - \ell, Y_{\tau-\ell} = w) \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}_x(T_v = \ell)\mathbb{P}(\tau = k - \ell)\pi_{\mathcal{G}}(w) \\
= \; & \mathbb{P}_x(T_v + \tau = k)\pi_{\mathcal{H}}(w) \qquad \square
\end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{G}$ le graphe complet à n sommets, v le noeud distingué. Pour tout $x \neq v$, on a $T_v \sim \text{Geom}(1/(n-1))$. D'après l'exercice et la question précédents on a donc que $T_v + 1$ est un temps stationnaire fort. On en déduit que dans cet exemple la marche simple sur $\mathcal{H}$ vérifie $d(t) \leq \mathbb{P}(T_v + 1 \geq t + 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t$. On déduit que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \log(\varepsilon)/\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

3. Sans perte de généralité on peut poser $v = 0$. On avait vu dans la feuille précédente que $\max_x \mathbb{E}_x[T_0] \leq \frac{n^2}{4}$, et que le temps de mélange

Exercice 7 Soit $(X_t, t \geq 0)$ la marche simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $\mathbb{P}_{x_0}$ sa loi lorsqu'elle est issue de x_0. Pour $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. On introduit alors

$$\tau := \max_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} T_x$$

1. Expliquer pourquoi, si $x \in \{1, ..., n-1\}$, on a

$$\mathbb{P}_0(X_\tau = x) = \mathbb{P}_0(\tau_{x-1} < \tau_{x+1})\mathbb{P}_{x-1}(\tau_{x+1} < \tau_x) + \mathbb{P}_0(\tau_{x-1} > \tau_{x+1})\mathbb{P}_{x+1}(\tau_{x-1} < \tau_x)$$

   En déduire la loi de X_τ.
2. Soit $\xi \sim \mathrm{Ber}(1/n)$. On introduit $\widetilde{\tau} = (1-\xi)\tau$. Montrer que $\widetilde{\tau}$ est un temps stationnaire pour X.
3. Le temps $\widetilde{\tau}$ est-il un temps stationnaire fort pour X ?

1. Pour que $X_\tau = x$ il faut que tous les sites soient visités avant x, et en particulier $x-1$ et $x+1$. Selon lequel des deux est visité en premier (au temps $T = \tau_{x-1} \wedge \tau_{x+1}$), l'autre doit être visité avant x, ce qui conduit à l'égalité de l'énoncé (en utilisant Markov au temps T). Plus précisément

$$\{X_\tau = x\} = \{T = \tau_{x-1} < \tau_{x+1} < \tau_x\} \cup \{T = \tau_{x+1} < \tau_{x-1} < \tau_x\},$$

   et par exemple par Markov en T_{x-1},

$$\mathbb{P}_0(T = \tau_{x-1} < \tau_{x+1} < \tau_x) = \mathbb{P}_0(T = \tau_{x-1})\mathbb{P}_{x-1}(\tau_{x+1} < \tau_x).$$

   Reste à voir par symétrie que $\mathbb{P}_{x-1}(\tau_{x+1} < \tau_x) = \mathbb{P}_{x+1}(\tau_{x-1} < \tau_x) = \mathbb{P}_0(\tau_2 > \tau_1)$ et donc pour tout $x \in \{1, ..., n-1\}$ on déduit

$$\mathbb{P}_0(X_\tau = x) = \mathbb{P}_0(\tau_2 > \tau_1) = \frac{1}{n-1}.$$

   On note qu'on aurait pu retrouver la dernière égalité directement par un argument de ruine du joueur.
   On en déduit donc que X_τ est uniforme sur $\{1, ..., n-1\}$.
2. On a $\mathbb{P}(X_{\widetilde{\tau}} = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = 1/n$. D'après la question précédente, pour $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$$\mathbb{P}(X_{\widetilde{\tau}} = k) = \mathbb{P}(\xi = 0)\mathbb{P}(X_\tau = k) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n},$$

   ce qui permet de conclure que τ est un temps stationnaire.
3. En revanche $\widetilde{\tau}$ n'est pas stationnaire fort : par exemple $\{X_{\widetilde{\tau}} = 0\} = \{\widetilde{\tau} = 0\}$ de sorte que $\widetilde{\tau}$ n'est pas indépendant de $X_{\widetilde{\tau}}$.

Exercice 8 Soit $(X_t^{(n)}, t \geq 0)$ la marche simple, paresseuse sur $\mathbb{Z}/(2^n\mathbb{Z})$, on note $t_{\text{mix}}^{(n)}$ son temps de mélange.
On va construire un temps stationnaire fort par récurrence sur n. Supposons que τ_n est un temps stationnaire fort pour la marche $X^{(n)}$ et considérons pour $j \geq 0$,

$$T_j = \inf\{t \geq 0 : \sum_{s=0}^{t-1} |X_{s+1}^{(n+1)} - X_s^{(n+1)}| = 2j\}.$$

On introduit alors $\tau_{n+1} = T_{\tau_n} + 1$.

1. Trouver un temps stationnaire fort lorsque $n = 1$.
2. Montrer que τ_{n+1} est un temps stationnaire fort de $X^{(n+1)}$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[\tau_n] = \frac{4^n-1}{3}$. En déduire une borne sup pour $t_{\text{mix}}^{(n)}$.

1. $\tau_1 = 1$ convient (voir l'exercice I.1).
2. Il s'agit d'observer que $X_{T_1}^{(n+1)}, X_{T_2}^{(n+1)}, ...X_{T_k}^{(n+1)}, ...$ sont les pas d'une marche simple paresseuse, sur $2\mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$. Par hypothèse de récurrence, $X_{T_{\tau_n}}^{(n+1)}$ est uniforme sur $2\mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$ et est indépendant de τ_n. Il est alors facile de déduire que $X_{T_{\tau_n}+1}^{(n+1)}$ reste indépendant de τ_n et est quant à lui uniforme sur $\mathbb{Z}/(2^{n+1}\mathbb{Z})$.
3. Notons que $T_{j+1} - T_j = G_j + G'_j$ où $G_j, G'_j, j \geq 0$ sont i.i.d suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$. Il découle par Wald que $\mathbb{E}[\tau_{n+1}] = 4\mathbb{E}[\tau_n] + 1$, ce qui conduit à la formule souhaitée puisque $\mathbb{E}[\tau_1] = 1$. On en déduit que
$$t_{\text{mix}}^{(n)} \leq 4\frac{4^n - 1}{3} \leq \frac{4}{3}(2^n)^2,$$
ce qui est non seulement moins général, mais également moins précis que la borne obtenue par couplage dans la feuille 2.

Exercice 9 On considère la chaîne $(\sigma_t, t \geq 0)$ sur $\mathfrak{S}_n$, issue de $\sigma_0 = id$ et définie par la dynamique suivante : au temps $t \geq 1$, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes on tire $j_t \sim \text{Unif}\{1, ..., n\}$, et on définit alors
$$\sigma_t = (j_t \dots 1) \circ \sigma_{t-1}.$$
On introduit par ailleurs pour $\tau_0 = 0$, et pour $k \in \{1, ..., n-1\}$,
$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \sigma(n) = n - k\}$.

1. Montrer que σ est irréductible, apériodique. Est-elle réversible ?
2. Soit $k \in \{1, ..., n-1\}$, quelle est la loi de $\tau_k - \tau_{k-1}$?
3. Vérifier qu'indépendamment de τ_n, $(\sigma_{\tau_{n-1}}(1), ..., \sigma_{\tau_{n-1}}(n-1))$ réalise une permutation uniforme de $\{2, ..., n\}$. On pourra utiliser une récurrence sur n.
4. En déduire que $\tau_{n-1} + 1$ est un temps stationnaire fort.
5. En utilisant un exercice de la feuille 1, en déduire que $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq n\log(n) + \log(1/\varepsilon)n$.

Pensons à un jeu de n cartes numérotées de 1 à n, où $\sigma(i)$ indique la position de la i-ème carte (de sorte que les cartes sont initialement ordonnées). Le pas de la dynamique au temps t correspond à insérer la carte du haut du paquet en une position j_t choisie uniformément parmi $\{1, ..., n\}$, ce qui fait remonter d'une position chacune des cartes situées aux positions $2, ..., j_t$ après l'étape du temps $t-1$. Formellement
$$\sigma_t(\sigma_{t-1}^{-1}(1)) = j_t, \quad \sigma_t(\sigma_{t-1}^{-1}(i)) = i - 1, i \in \{2, ..., j_t\} \text{ et } \sigma_t(\sigma_{t-1}^{-1}(i)) = i, i \in \{j_t + 1, ..., n\},$$
de sorte qu'on a bien
$$\sigma_t \circ \sigma_{t-1}^{-1} = (j_t \ \dots \ 1).$$
On note $\mathcal{F}_t = \sigma(j_s, s \leq 1)$.

1. Pour voir que la chaîne est irréductible on peut par exemple voir que si $i < j$ sont fixés, on peut retrouver la transposition $(i\ j)$ en effectuant
$$(j \dots 1) \circ (j - i \dots 1) \circ (j \dots 1)^{j-i-1} \circ (j - i + 1 \dots 1) \circ (j \dots 1)^{i-1}.$$
La chaîne est clairement apériodique puisque $\mu(id) = P(\sigma, \sigma) = 1/n$. Enfin elle n'est clairement pas réversible : $\mu((3\ 2\ 1)) = 1/n$, mais $\mu((3\ 2\ 1)^{-1}) = 0$.
2. On a $\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} j_t \geq n - k + 1\}$, et les $(j_t, t \geq 0)$ étant i.i.d on en déduit que $\tau_k - \tau_{k-1} \sim \mathrm{Geom}(\frac{k}{n})$. On en déduit que $\tau_{n-1} + 1$ a exactement la loi du temps de collection de n coupons.
3. On a pour $\ell \in \{n - k + 1, ..., n\}$, puisque j_t est indépendante de $\mathcal{F}_{t-1}$,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_k = t, j_t = \ell) &= \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t - 1 < \tau_k, j_t \geq n - k + 1, j_t = \ell) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t - 1 < \tau_k, j_t \geq n - k + 1) \mathbb{P}(j_t = \ell \mid j_t \geq n - k + 1) \\ &= \mathbb{P}(\tau_k = t) \frac{1}{k} \end{aligned}$$
de sorte que $j_{\tau_k} \sim \mathrm{Unif}\{n - k + 1, ..., n\}$, indépendamment de τ_k.
Une récurrence sur k montre alors que $(\sigma_{\tau_k}^{-1}(n - k + 1), ..., \sigma(\tau_k)^{-1}(n))$ réalise une permutation uniforme de $\{(\sigma_{\tau_k}^{-1}(n - k + 1), ..., \sigma_{\tau_k}^{-1}(n))\}$, et que cette permutation est indépendante de τ_k (autrement dit, l'ordre des k cartes qui se situent en dessous de la carte n au temps τ_k est uniforme parmi les $k!$ ordres possibles, et cet ordre est indépendant de la valeur prise par τ_k).
Reste à observer qu'en τ_{n-1}, la carte n se trouve en haut du paquet, de sorte que $\{(\sigma_{\tau_{n-1}}^{-1}(2), ..., \sigma_{\tau_{n-1}}^{-1}(n))\} = \{1, ..., n - 1\}$, et on conclut donc qu'indépendamment de τ_{n-1} $(\sigma_{\tau_{n-1}}(1), ..., \sigma_{\tau_{n-1}}(n - 1))$ réalise une permutation uniforme de $\{2, ..., n\}$ (autrement dit, au temps τ_{n-1} où la carte n parvient en haut du paquet, les cartes $1, ..., n - 1$ se trouvent aux positions $2, ..., n$, leur ordre est uniforme parmi les $(n - 1)!$ ordres possibles, et cet ordre est indépendant de la valeur de τ_{n-1}).
4. Il est évident que τ_{n-1} $(\mathcal{F}_t)$-est un temps d'arrêt Au temps $\tau_{n-1} + 1$ on insère la carte n à une position choisie uniformément dans $\{1, ..., n\}$, indépendamment des étapes précédentes, d'après la question précédente, $\sigma_{\tau_{n-1}+1}$ est uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, et est indépendante de $\tau_{n-1} + 1$. On conclut que $\tau_{n-1} + 1$ est un temps stationnaire fort.
5. D'après ce qui précède, $\tau_{n-1} + 1$ est un temps stationnaire fort dont la loi est celle du temps τ_{collec} de collection de n coupons.
D'après le théorème 6.1 et la feuille d'exercices 1, on en déduit que
$$d(n \log(n) + \log(1/\varepsilon)n) \leq \mathbb{P}(\tau_{n-1} + 1 > n \log(n) + \log(1/\varepsilon)n) \leq \exp(-\log(1/\varepsilon)) = \varepsilon,$$
et donc $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq n \log(n) + \log(1/\varepsilon)n$.

Exercice 10 On considère la chaîne $(\sigma_t, t \geq 0)$ sur $\mathfrak{S}_n$, issue de $\sigma_0 = id$ et définie par la dynamique suivante : au temps $t \geq 1$, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes on tire $i_t, j_t \sim \mathrm{Unif}\{1, ..., n\}$, et on définit alors
$$\sigma_t = (i_t\ j_t) \circ \sigma_{t-1}.$$
On considère alors le processus (de marques) $(M_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$, et défini comme suit.

– $M_0 = \emptyset$
– Pour $t \geq 1$, si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) \in M_{t-1}$ ou si $i_t = j_t$ on pose $M_t = M_{t-1} \cup \{\sigma_{t-1}^{-1}(j_t)\}$. Sinon on pose $M_t = M_{t-1}$.

On introduit enfin $\tau = \inf\{t \geq 0 : M_t = \{1, ..., n\}\}$.

1. Montrer que le noyau de transition de σ est le Q défini dans l'exercice 2.
2. Montrer que τ est un temps stationnaire fort.
3. Montrer que si $k \in \{0, ..., n-1\}$,

$$\mathbb{P}(|M_t| = k+1 \mid |M_{t-1}| = k) = \frac{(k+1)(n-k)}{n^2}.$$

En déduire qu'avec probabilité qui tend vers 1 lorsque $n \to \infty$,

$$\tau = 2n\log(n) + o(n\log(n)),$$

puis une borne supérieure pour t_{mix}. Comparer au résultat de l'exercice 2.

Pensons à un jeu de n cartes numérotées de 1 à n, où $\sigma(i)$ indique la position de la i-ème carte (de sorte que les cartes sont initialement ordonnées). Le pas de la dynamique au temps t correspond à tirer deux positions i_t, j_t choisies indépendamment et uniformément parmi $\{1, ..., n\}$, et d'échanger les cartes situées aux positions i_t, j_t..
On note $\mathcal{F}_t = \sigma(i_s, j_s, s \leq t)$.

1. On a affaire à une marche sur le groupe $\mathfrak{S}_n$ avec $P(\sigma, s \circ \sigma) = \mu(s)$, où

$$\mu(id) = \mathbb{P}(i_t = j_t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(i_t = j_t = i) = n/n^2 = 1/n,$$

et pour $i \neq j$,

$$\mu((i\ j)) = \mathbb{P}(i_t = i, j_t = j) + \mathbb{P}(i_t = j, j_t = i) = \frac{2}{n^2}.$$

On retrouve donc bien le noyau de transition de l'exercice 2.
On notera que contrairement à l'exercice précédent, $\mu(h) = \mu(h^{-1})$ $\forall h \in \mathfrak{S}_n$ et on a donc affaire à une chaîne réversible.

2. Notons $\tau_k := \inf\{t \geq 0 : |M_t| = k\}$.
, on note pour $t \geq \tau_k$, $m_t^{(k)} = \sigma_t(\sigma_{\tau_k}^{-1}(j_{\tau_k}))$ la position au temps t de la k-ème carte marquée. On note $\mathcal{M}_t = \{m_t^{(i)}, t \geq \tau_i\}$ les positions des cartes marquées au temps t.
On va démontrer, par récurrence sur k, qu'indépendamment de τ_k, $\mathcal{M}_{\tau_k}$ est un tirage uniforme de k éléments de $\{1, ..., n\}$ et que $(m_{\tau_k}^{(1)}, ..., m_{\tau_k}^{(k)})$ réalise une permutation uniforme de $\mathcal{M}_{\tau_k}$.
Pour l'initialisation, fixons $i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 = t, \mathcal{M}_t = \{i\}) &= \mathbb{P}(\tau_1 = t, i_t = j_t = i) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 > t-1, i_t = j_t = i) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 > t-1, i_t = j_t)\mathbb{P}(i_t = j_t = i \mid i_t = j_t) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = t)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

comme souhaité.
Fixons $k \in \{2, ..., n\}$, et supposons que l'assertion que l'on cherche à démontrer est valide au rang $k-1$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_k = t, m_t^{(k)} = i) &= \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \in M_{k-1}, j_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, j_t \in M_{k-1}, i_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \in M_{k-1}, i_t = j_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1})\end{aligned}$$

Pour le premier terme de la somme, on peut écrire grâce au fait que i_t, j_t sont indépendants de $\mathcal{F}_{t-1}$

$$\begin{aligned}& \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \in \mathcal{M}_{t-1}, j_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1}) \\ = & \sum_{A \subset \{1,...,n\} \setminus \{i\} : |A| = k-1} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, \mathcal{M}_{t-1} = A, i_t \in A, j_t = i) \\ = & \sum_{A \subset \{1,...,n\} \setminus \{i\} : |A| = k-1} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, \mathcal{M}_{t-1} = A, i_t \in A, j_t \notin A) \mathbb{P}(i_t \notin A, j_t = i \mid i_t \notin A, j_t \in A) \\ = & \frac{1}{n-k} \sum_{A \subset \{1,...,n\} \setminus \{i\} : |A| = k-1} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, \mathcal{M}_{t-1} = A, i_t \in A, j_t \notin A) \\ = & \frac{1}{n-k} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \in \mathcal{M}_{t-1}, j_t \notin \mathcal{M}_{t-1}, i \notin \mathcal{M}_{t-1})\end{aligned}$$

De manière similaire on obtient

$$\begin{aligned}& \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1}, j_t \in \mathcal{M}_{t-1}) \\ = & \frac{1}{n-k+1} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \notin \mathcal{M}_{t-1}, j_t \in \mathcal{M}_{t-1}, i \notin \mathcal{M}_{t-1}), \\ & \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t \in \mathcal{M}_{t-1}, i_t = j_t = i \notin \mathcal{M}_{t-1}) \\ = & \frac{1}{n-k+1} \mathbb{P}(\tau_k > t-1 \geq \tau_{k-1}, i_t = j_t \notin \mathcal{M}_{t-1}, i \notin \mathcal{M}_{t-1}).\end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathbb{P}(\tau_k = t, m_k = i) = \frac{1}{n-k+1} \mathbb{P}(\tau_k = t, i \notin \mathcal{M}_{t-1}),$$

ce qui entraîne qu'au temps τ_k, la k-ème carte marquée est sélectionnée uniformément parmi les cartes non marquées jusqu'alors, indépendamment de τ_k.
L'hypothèse de récurrence au rang $k-1$ permet d'affirmer qu'indépendamment de τ_{k-1}, et pour tout $s \geq \tau_{k-1}$, $\{m_s^{(i)}, i \leq k-1\}$ est un tirage uniforme de $k-1$ éléments de $\{1, ..., n\}$ et que $(m_s^{(1)}, ..., m_s^{(k-1)})$ réalise une permutation uniforme de cet ensemble. On en déduit l'assertion au rang k.
Au rang n, $\tau = \tau_n$ et l'assertion permet justement d'affirmer que τ est un temps staionnaire fort.

3. Si $|M_t| = k$, pour que $|M_t| = k+1$ il faut et il suffit que l'on choisisse deux fois la même carte non marquée, ou bien qu'on choisisse une carte marquée et une carte non marquée. Comme les choix de cartes sont i.i.d uniformes,

$$\mathbb{P}(|M_t| = k+1 \mid |M_t| = k) = \left(\frac{n-k}{n^2} + \frac{k(n-k)}{n^2} \right) = \frac{(k+1)(n-k)}{n^2},$$

et $\tau_{k+1} - \tau_k \sim \text{Geom}\left(\frac{(k+1)(n-k)}{n^2}\right)$.
Or

$$\mathbb{E}[\tau_n] = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)} = 2n\log(n) + o(n\log(n)),$$

$$\text{Var}[\tau_n] = n^4 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{(k+1)(n-k)}{n^2}\right) \frac{1}{k^2(n-k)^2} = O(n^2) << \mathbb{E}[\tau_n]^2,$$

et on conclut en utilisant Chebychev que lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}(|\tau - 2n\log(n)| \geq n\log\log(n)) \to 0.$$

3 Constante de Cheeger et bornes inférieures sur t_{mix}

Exercice 11 Soit

$$Q(A,B) := \sum_{x\in A, y\in B} \pi(x)P(x,y).$$

Montrer que pour tout S on a $Q(S,S^c) = Q(S^c,S)$. La constante de Cheeger est alors définie comme

$$\Phi^* := \inf_{S\in\mathcal{P}(\Omega):\pi(S)\leq 1/2} \frac{Q(S,S^c)}{\pi(S)}.$$

En utilisant que $\pi P = \pi$, que $P(x,\cdot)$ est une distribution (et que les sommes sont finies), on trouve

$$\begin{aligned}
Q(S,S^c) &= \sum_{x\in S, y\in S^c} \pi(x)P(x,y) \\
&= \sum_{x\in \Omega, y\in S^c} \pi(x)P(x,y) - \sum_{x\in S^c, y\in S^c} \pi(x)P(x,y) \\
&= \sum_{y\in S^c} \pi(y) - \sum_{x\in S^c} \pi(x) \left(\sum_{y\in\Omega} P(x,y) - \sum_{y\in S} P(x,y)\right) \\
&= \pi(S^c) - \sum_{x\in S^c} \pi(x) \left(1 - \sum_{y\in S} P(x,y)\right) \\
&= \sum_{x\in S^c, y\in S} \pi(x)P(x,y) = Q(S^c,S),
\end{aligned}$$

comme souhaité.
Notons que pour tout $S \subset \Omega$ tel que $\pi(S) \geq 1/2$,

$$\frac{Q(S,S^c)}{\pi(S)} \geq \frac{Q(S^c,S)}{\pi(S^c)}.$$

Dans la suite de ce paragraphe on admet le résultat du cours : $t_{\text{mix}} \geq \frac{1}{4\Phi^*}$.

Exercice 12 Calculer Φ^* lorsque X est la marche simple paresseuse sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Que peut-on déduire sur t_{mix} dans le cadre de cet exemple ?
En estimant directement $\mathbb{E}_0[T]$, où $T := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n/4\}$ montrer qu'on a en fait $t_{\text{mix}} \geq \frac{n^2}{2}$.
Dans ce cas π est uniforme, $P(x,y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{\{|x-y|=1\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{x=y\}}$ de sorte que

$$\Phi(S) = \frac{|\partial S|}{|S|},$$

où $\partial S = \{(x,y) : x \in S, y \in S^c\}$. Mais quelque soit $S : \pi(S) \leq 1/2$ on a $|\partial S| \geq 2$, de sorte que le minimum est réalisé si on prend $S = \{0, ..., \lfloor n - 1/2 \rfloor\}$. On a alors $|\partial S| = 2$, $|S| = \lfloor n/2 \rfloor$ et donc

$$\Phi^* = \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

On en déduit donc

$$t_{\text{mix}} \geq \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{8}.$$

Mais une borne ad hoc est finalement bien meilleure. Posons $A := \{-\lfloor n/4 \rfloor, ..., \lfloor n/4 \rfloor\}$ de sorte que $\pi(A) \leq 1/2$. On a, pourvu que $t \leq \alpha n^2$,

$$\begin{aligned} P^t(0, A) \geq \mathbb{P}(T > t) &= 1 - \mathbb{P}(T \leq t) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(\max_{k \leq t} |X_k| > \frac{n}{4}) \\ &\geq 1 - \frac{16\mathbb{E}[X_t^2]}{n^2} = 1 - 16\alpha, \end{aligned}$$

où à l'avant-dernière ligne, on a utilisé l'inégalité maximale de Doob pour la sous-martingale $|X|$. On en déduit que $t_{\text{mix}} \geq \frac{n^2}{64}$, une bien meilleure borne que celle obtenue via l'inégalité de Cheeger, qui permet d'affimer, d'après un exercice de la feuille 2 fournissant une borne supérieure du même ordre grâce à un argument de couplage, que $t_{\text{mix}} = O(n^2)$.

Exercice 13 Calculer Φ^* dans l'exemple de la question 2 de l'exercice 5 (deux copies d'un graphe complet gluées en un sommet). En déduire une borne inférieure sur le temps de mélange, puis que $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$ dans cet exemple.
Notons $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ les deux copies, v le noeud en lequel on les glue. On est dans le cadre d'une marche simple, $1/n$-paresseuse sur un graphe, et donc

$$\phi(S) = \frac{n}{n-1} \frac{|\partial S|}{\sum_{x \in S} d_x}.$$

Cette quantité est minimisée lorsque $S = \mathcal{G}_1 \setminus \{v\}$: pour ce choix $\pi(S)$ est proche de $1/2$, et tout autre choix de S va augmenter drastiquement $|\partial S|$.
Pour $S = \mathcal{G}_1 \setminus \{v\}$ on trouve que $\partial S = \{(x,y) \in \mathcal{E} : x \in S, y \in S^c\} = \{(x,v), x \in \mathcal{G}_1\}$

$$\Phi^* = \Phi(S) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1},$$

de sorte que $t_{\text{mix}} \geq \frac{n-1}{4}$. Avec l'inégalité obtenue en 5.2, on déduit que

$$\frac{n-1}{4} \leq t_{\text{mix}} \leq \log(4)n,$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 14 Dans le cadre de l'exercice 5 avec $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (de sorte que $\mathcal{H}$ est constitué de deux copies de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gluées en un sommet), montrer que $t_{\text{mix}} \geq Cn^2$. A l'aide des exercices précédents, expliquer alors pourquoi on peut affirmer que $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$ (on pourra considérer des marches paresseuses).
Ici $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sont des copies de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sans perte de généralité on peut supposer $v = 0$. Un élément $k \in \{1, ..., n-1\}$ correspond donc à un unique élément dans $\mathcal{G}_1$, et à un unique dans $\mathcal{G}_2$.
Pour des marches paresseuses La constante de Cheeger est

$$\Phi^* = \Phi(S) = \frac{2|\partial S|}{\sum_{x \in S} d_x} = \frac{2}{2(n-1)},$$

et ceci permet seulement d'affirmer que $t_{\text{mix}} \geq \frac{n-1}{4}$.
En revanche, il est facile de voir que t_{mix} est borné inférieurement par la même borne que celle obtenue dans l'exercice 11 pour le temps de mélange sur $\mathcal{G}_1$ (quitte à répéter la preuve de l'exercice 11), et donc

$$t_{\text{mix}} \geq \frac{n^2}{2}.$$

Pour la borne supérieure, on peut utiliser un argument de couplage. On suppose que P est le noyau de transition de la marche paresseuse sur $\mathcal{H}$, et que Q est tel que $P = (Q + Id)/2$. On couple les deux marches X, Y comme habituellement : si elles sont ensemble on leur fait effectuer la même transition sous P, sinon on tire une variable de Bernoulli et selon la valeur obtenue on fait évoluer l'une des deux marches suivant Q.
Par ailleurs on note $\overline{X}, \overline{Y}$ les marches projetées sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Enfin on note $\tau^0 = 0$, et pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sigma^i &= \inf\{t \geq \tau^i : X_t = v \text{ ou } Y_t = 0\} \\ \tau^i &= \inf\{t \geq \sigma^i \overline{X}_t = \overline{Y}_t\}. \end{aligned}$$

Ces temps sont des temps d'arrêt. Si $\sigma^1 = \tau^1 = 0$ on fait partir les deux marches de 0, et dans ce cas

$$\tau_{\text{couple}} = \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\} = 0.$$

Sinon, en tout temps $t \geq \sigma^1$, au moins l'une des deux marches (au moins une des marches est alors passée par 0) a autant de chances de se trouver dans $\mathcal{G}_1$ que dans $\mathcal{G}_2$. On a donc

$$\mathbb{P}(X_{\tau^1} = Y_{\tau^1} \mid X_{\sigma^1 - 1} \neq Y_{\sigma^1 - 1}) = \frac{1}{2}.$$

De même par Markov fort en σ^i, $i \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_{\tau^i} = Y_{\tau^i} \mid X_{\sigma^i - 1} \neq Y_{\sigma^i - 1}) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit qu'on peut trouver une variable géométrique G de paramètre 1/2 indépendante des $\{\tau^i, i \leq G\}$, telle que

$$\tau_{\text{couple}} \leq \tau^G$$

et on a même égalité sur l'événement $\{\sigma^1 < \tau\}$ qui est toujours réalisé lorsque les marches ne partent pas de la même copie.
Reste à voir que $\tau^1, \tau^2 - \tau^1, \tau^3 - \tau^2, \ldots$ sont i.i.d et que d'après notre connaissance du temps de fin de jeu dans la ruine du joueur on a quelque soient les positions initiales des marches

$$\mathbb{E}[\tau^1] \leq \mathbb{E}[\sigma^1] + \mathbb{E}[\tau^1 - \sigma^1] \leq n^2 + \frac{n^2}{4}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[\tau_{\text{couple}}] \leq \frac{5n^2}{2},$$

de sorte que $t_{\text{mix}} \leq 10n^2$, et donc $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$, comme souhaité.

Exercice 15 On considère X la marche paresseuse sur l'arbre binaire de profondeur k. Calculer $Q(S, S^c)$ lorsque S consiste en la partie gauche de l'arbre, en déduire que

$$t_{\text{mix}} \geq \frac{2^{k+1} - 3}{2},$$

et conclure, grâce à un exercice de la feuille précédente, que $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$ où n est le nombre de noeuds dans l'arbre.
Comme dans l'exemple précédent

$$\Phi(S) = \frac{|\partial S|}{\sum_{x \in S} d_x},$$

qui est minimisé, sous la contrainte $\pi(S) \leq 1/2$, en choisissant S l'un des deux sous-arbres issus de la racine. On a alors $\pi(S) = \frac{n-2}{2n-2}$, $Q(S, S^c) = \frac{1}{4n-4}$,

$$\Phi^* = \Phi(S) = \frac{1}{2n-4},$$

de sorte que

$$t_{\text{mix}} \geq \frac{n-2}{2},$$

(rappelons que $n = 2^{k+1} - 1$). Grâce à l'exercice 18 de la feuille précédente qui assure que $t_{\text{mix}} \leq 4n$, on conclut que $t_{\text{mix}} = \Theta(n)$.