Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange

Exercices 3

1 Couplage, suite

Exercice 1 Soit P irréductible, apériodique (on rappelle qu'il existe $r > 0$ tel que P^r a toutes ses entrées supérieures ou égales à une constante $\delta > 0$), et π la distribution stationnaire associée.
On considère le couplage (X, Y) de chaînes de noyau P, issues respectivement de μ, ν, tel que X et Y évoluent indépendamment jusqu'au temps

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\},$$

après quoi elles évoluent ensemble.

1. Montrer que
$$\overline{d}(t) \leq \sup_{\mu,\nu \in \mathbf{P}(\Omega)} \mathbb{P}_{\mu,\nu}(\tau > t).$$
2. Montrer que $\tau \leq rG$, où G est une variable géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Quel résultat a-t-on redémontré ?

Exercice 2 On considère la marche sur le groupe $G = \mathfrak{S}_n$, dont la loi de transition est dictée par la relation $P(g, hg) = \mu(h), g, h \in G$, où μ est telle que

$$\mu(id) = \frac{1}{n}, \qquad \mu((i\ j)) = \frac{2}{n^2},\ i \neq j,$$

$(i\ j)$ étant la transposition des entiers i et j.

1. Vérifier que la marche est irréductible, apériodique, réversible. Quelle est sa distribution stationnaire ?
2. On considère la dynamique suivante : au temps t, on tire indépendamment et indépendamment des étapes précédentes $i_t, j_t \sim \text{Unif}\{1, ..., n\}$. On choisit alors
$$\sigma_t := (\sigma_{t-1}(i_t)\ \ j_t) \circ \sigma_{t-1}.$$
Quel est le noyau de transition Q de la chaîne qui correspond à cette dynamique ?
3. On couple deux chaînes de noyau Q en effectuant systématiquement les mêmes choix pour $i_t, j_t, t \geq 1$. Montrer que
$$\tau_{\text{couple}} \leq \tau_1 + ... + \tau_n,$$
où $\tau_i \sim \text{Geom}\left(\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2\right)$.

4. Déduire des questions précédentes que pour la chaîne de noyau P,
$$t_{\text{mix}} \leq \frac{2n^2\pi^2}{3}.$$

Exercice 3 On considère la dynamique suivante sur l'espace des coloriages $\mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ du graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ (on pourra se restreindre, ou pas, au sous-ensemble Ω des coloriages admissibles, pour lesquels $x(v) \neq x(w)$ lorsque $v \sim w$, i.e lorsque $(v, w) \in \mathcal{E}$). On suppose dans la suite que $|\mathcal{V}| = n$, que les noeuds de $\mathcal{G}$ ont degré uniformément borné par Δ, et que le nombre de couleurs q vérifie $q > 3\Delta$ (de sorte qu'en particulier, il y a de nombreux coloriages admissibles est la chaîne restreinte à l'espace Ω est irréductible).
Pour des coloriages $x, y \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ on note
$$\rho(x, y) := \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}$$
le nombre de noeuds où les couleurs diffèrent entre x et y.
Soient $(v_t, c_t)_{t \geq 0}$ i.i.d uniformes sur $\mathcal{V} \times \{1, ..., q\}$. le pas de la dynamique au temps t consiste à changer uniquement la couleur du noeud v_t en la couleur c_t *si* le coloriage obtenu est *admissible en* v_t (i.e. si aucun des voisins de v ne possédait déjà la couleur c_t au temps $t - 1$), sinon on ne fait rien.
Plus précisément, pour une configuration $x \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ on définit $x^{v,c} \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ par
$$x^{v,c}(w) := x(w) \ \ \forall w \neq v, \quad x^{v,c}(v) = c,$$
et alors
$$X_t = X_{t-1}^{v_t,c_t} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}(w) \neq c_t \ \forall w \sim v_t\}} + X_{t-1} \mathbb{1}_{\{\exists w \sim v_t : X_{t-1}(w) = c_t\}}.$$

1. Montrer qu'on peut réaliser un grand couplage pour cette dynamique, quitte à faire les mêmes choix $(v_t, c_t)_{t \geq 1}$ de noeuds et de couleurs pour toutes les chaînes.
2. On suppose que $x, y \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ sont tels que $\rho(x, y) = 1$ et on considère les chaînes X^x, X^y issues respectivement de x, y. Montrer que
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq 1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}.$$
3. Lorsque $\rho(x, y) = r$, montrer que
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq \rho(x, y) \left(1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}\right).$$
On pourra utiliser la question précédente et l'existence de $x_1, x_2, ..., x_{r-1}$ tels que
$$\rho(x, x_1) = \rho(x_1, x_2) = ... = \rho(x_{r-1}, y) = 1.$$
4. En déduire que quelque soient x, y,
$$\mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) \leq n \left(1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}\right)^t$$
puis que
$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \lceil \frac{q}{q - 3\delta} \, n \left(\log(n) + \log(\varepsilon^{-1})\right) \rceil.$$

2 Temps stationnaires, temps stationnaires forts

Exercice 4

1. On considère $(Y_t, t \geq 0)$ une suite de variables intégrables, i.i.d et $\tau \in \mathbb{N}$ intégrable tel que pour tout $t \geq 0$, $\{\tau \geq t\}$ est indépendant de Y_t. Montrer l'identité de Wald :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\tau} Y_t\right] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[Y_1],$$

où par convention, la somme dans l'espérance est nulle si $\tau = 0$

2. On suppose à nouveau les $(Y_t, t \geq 0)$ i.i.d on note $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, ..., Y_t)$ et on suppose que τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt intégrable. Montrer que l'identité de Wald est vérifiée.

Exercice 5 Soit P une matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques (et toutes les entrées sont strictement positives). Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\tau = t$ est un temps stationnaire fort de la chaîne X de noyau P.
Quelle conséquence peut-on tirer de cette observation pour la marche simple, $1/n$-paresseuse sur le graphe complet à n sommets ?

Exercice 6 Soit $\mathcal{G}$ un graphe, v un noeud de $\mathcal{G}$, et τ un temps stationnaire fort pour la marche simple sur $\mathcal{G}$ issue de v.
Soit $\mathcal{H}$ le graphe consistant en deux copies identiques $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}$ gluées en le noeud v (de sorte que $\deg_{\mathcal{H}}(v) = 2\deg_{\mathcal{G}}(v)$).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $T := T_v + \tau$ est un temps stationnaire fort pour la marche sur $\mathcal{H}$ issue de x.
2. Que peut-on en déduire dans le cas où $\mathcal{G}$ est le graphe complet à n sommets, et qu'on considère la marche $1/n$-paresseuse sur ce graphe ? Calculer dans ce cas $\max_x \mathbb{E}_x[\tau]$, et en déduire une borne supérieure pour le temps de mélange de la marche sur $\mathcal{H}$.

Exercice 7 Soit $(X_t, t \geq 0)$ la marche simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $\mathbb{P}_{x_0}$ sa loi lorsqu'elle est issue de x_0. Pour $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. On introduit alors

$$\tau := \max_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} T_x$$

1. Expliquer pourquoi, si $x \in \{1, ..., n-1\}$, on a

$$\mathbb{P}_0(X_\tau = x) = \mathbb{P}_0(\tau_{x-1} < \tau_{x+1})\mathbb{P}_{x-1}(\tau_{x+1} < \tau_x) + \mathbb{P}_0(\tau_{x-1} > \tau_{x+1})\mathbb{P}_{x+1}(\tau_{x-1} < \tau_x)$$

En déduire la loi de X_τ.

2. Soit $\xi \sim \mathrm{Ber}(1/n)$. On introduit $\widetilde{\tau} = (1-\xi)\tau$. Montrer que $\widetilde{\tau}$ est un temps stationnaire pour X.
3. Le temps $\widetilde{\tau}$ est-il un temps stationnaire fort pour X ?

Exercice 8 Soit $(X_t^{(n)}, t \geq 0)$ la marche simple, paresseuse sur $\mathbb{Z}/(2^n\mathbb{Z})$, on note $t_{\mathrm{mix}}^{(n)}$ son temps de mélange.

On va construire un temps stationnaire fort par récurrence sur n. Supposons que τ_n est un temps stationnaire fort pour la marche $X^{(n)}$ et considérons pour $j \geq 0$,

$$T_j = \inf\{t \geq 0 : \sum_{s=0}^{t-1} |X_{s+1}^{(n+1)} - X_s^{(n+1)}| = 2j\}.$$

On introduit alors $\tau_{n+1} = T_{\tau_n} + 1$.

1. Trouver un temps stationnaire fort lorsque $n = 1$.
2. Montrer que τ_{n+1} est un temps stationnaire fort de $X^{(n+1)}$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[\tau_n] = \frac{4^n-1}{3}$. En déduire une borne sup pour $t_{\text{mix}}^{(n)}$.

Exercice 9 On considère la chaîne $(\sigma_t, t \geq 0)$ sur $\mathfrak{S}_n$, issue de $\sigma_0 = id$ et définie par la dynamique suivante : au temps $t \geq 1$, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes on tire $j_t \sim \text{Unif}\{1, ..., n\}$, et on définit alors

$$\sigma_t = (j_t \dots 1) \circ \sigma_{t-1}.$$

On introduit par ailleurs pour $\tau_0 = 0$, et pour $k \in \{1, ..., n-1\}$,
$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \sigma(n) = n - k\}$.

1. Montrer que σ est irréductible, apériodique. Est-elle réversible ?
2. Soit $k \in \{1, ..., n-1\}$, quelle est la loi de $\tau_k - \tau_{k-1}$?
3. Vérifier qu'indépendamment de τ_n, $(\sigma_{\tau_{n-1}}(1), ..., \sigma_{\tau_{n-1}}(n-1))$ réalise une permutation uniforme de $\{2, ..., n\}$. On pourra utiliser une récurrence sur n.
4. En déduire que $\tau_{n-1} + 1$ est un temps stationnaire fort.
5. En utilisant un exercice de la feuille 1, en déduire que $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq n\log(n) + \log(1/\varepsilon)n$.

Exercice 10 On considère la chaîne $(\sigma_t, t \geq 0)$ sur $\mathfrak{S}_n$, issue de $\sigma_0 = id$ et définie par la dynamique suivante : au temps $t \geq 1$, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes on tire $i_t, j_t \sim \text{Unif}\{1, ..., n\}$, et on définit alors

$$\sigma_t = (i_t \ j_t) \circ \sigma_{t-1}.$$

On considère alors le processus (de marques) $(M_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$, et défini comme suit.
- $M_0 = \emptyset$
- Pour $t \geq 1$, si $\sigma_{t-1}^{-1}(i_t) \in M_{t-1}$ ou si $i_t = j_t$ on pose $M_t = M_{t-1} \cup \{\sigma_{t-1}^{-1}(j_t)\}$. Sinon on pose $M_t = M_{t-1}$.

On introduit enfin $\tau = \inf\{t \geq 0 : M_t = \{1, ..., n\}\}$.

1. Montrer que le noyau de transition de σ est le Q défini dans l'exercice 2.
2. Montrer que τ est un temps stationnaire fort.
3. Montrer que si $k \in \{0, ..., n-1\}$,

$$\mathbb{P}(|M_t| = k + 1 \mid |M_{t-1}| = k) = \frac{(k+1)(n-k)}{n^2}.$$

   En déduire qu'avec probabilité qui tend vers 1 lorsque $n \to \infty$,

$$\tau = 2n\log(n) + o(n\log(n)),$$

   puis une borne supérieure pour t_{mix}. Comparer au résultat de l'exercice 2.

3 Constante de Cheeger et bornes inférieures sur t_{mix}

Exercice 11 Soit
$$Q(A,B) := \sum_{x\in A, y\in B} \pi(x)P(x,y).$$
Montrer que pour tout S on a $Q(S,S^c) = Q(S^c,S)$. La constante de Cheeger est alors définie comme
$$\Phi^* := \inf_{S\in\mathcal{P}(\Omega):\pi(S)\le 1/2} \frac{Q(S,S^c)}{\pi(S)}.$$
Dans la suite de ce paragraphe on admet le résultat du cours : $t_{\mathrm{mix}} \ge \frac{1}{4\Phi^*}$.

Exercice 12 Calculer Φ^* lorsque X est la marche simple paresseuse sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Que peut-on déduire sur t_{mix} dans le cadre de cet exemple ?
En estimant directement $\mathbb{E}_0[T]$, où $T := \inf\{t \ge 0 : |X_t| \ge n/4\}$ montrer qu'on a en fait $t_{\mathrm{mix}} \ge \frac{n^2}{2}$.

Exercice 13 Calculer Φ^* dans l'exemple de la question 2 de l'exercice 5 (deux copies d'un graphe complet gluées en un sommet). En déduire une borne inférieure sur le temps de mélange, puis que $t_{\mathrm{mix}} = O(n)$ dans cet exemple.

Exercice 14 Dans le cadre de l'exercice 5 avec $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (de sorte que $\mathcal{H}$ est constitué de deux copies de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gluées en un sommet), montrer que $t_{\mathrm{mix}} \ge Cn^2$. A l'aide des exercices précédents, expliquer alors pourquoi on peut affirmer que $t_{\mathrm{mix}} = O(n^2)$ (on pourra considérer des marches paresseuses).

Exercice 15 On considère X la marche paresseuse sur l'arbre binaire de profondeur k. Calculer $Q(S,S^c)$ lorsque S consiste en la partie gauche de l'arbre, en déduire que
$$t_{\mathrm{mix}} \ge \frac{2^{k+1}-3}{4},$$
et conclure, grâce à un exercice de la feuille précédente, que $t_{\mathrm{mix}} = O(n)$ où n est le nombre de noeuds dans l'arbre.