Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange

Exercices 4

1 Martingales

Exercice 1 Soit X chaîne de Markov à valeurs dans E, de noyau P, $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturelle de X.

1. Soit X chaîne de Markov à valeurs dans E, de noyau P, et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|f(X_n)|] < \infty$. Montrer que le processus
$$\left(M_n^f := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} (P - I) f(X_k),\ n \geq 0 \right)$$
est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
2. Que dire de $(f(X_n))$ lorsque f est une fonction harmonique sur E, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|f(X_n)|] < \infty$?
3. On suppose que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|g(X_n)|] < \infty$ et que, pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $Pg = \lambda g$. Montrer que $(g(X_n)/\lambda^n)$ est une martingale.
4. On suppose que la fonction $h : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|h(n, X_n)|] < \infty$, et que
$$\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}\ Ph(n+1, x) = \sum_{y \in E} P(x, y) h(n+1, y) = h(n, y).$$
Montrer que $(h(n, X_n))_n$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

Exercice 2
Soit (X_n) la marche simple sur $\mathbb{Z}$ avec $p = P(x, x+1) = 1 - P(x, x-1) = 1 - q$.

1. Montrer que $(X_n - (p - q)n)$ est une martingale.
2. Montrer que $\left((\frac{q}{p})^{X_n} \right)$ est une martingale.
3. Expliquer comment on peut retrouver la probabilité de ruine du joueur à partir de ces martingales.
4. Montrer que $((X_n - (p-q)n)^2 - 4pqn)$ est une martingale.
5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(\lambda) = \log(p \exp(\lambda) + q \exp(-\lambda))$, montrer que $\exp(\lambda X_n - n\Phi(\lambda))$ est une martingale.

Exercice 3 Soit X une chaîne de Markov sur E fini de matrice de transition P. On rappelle que $h : E \to \mathbb{R}$ est harmonique au point $x \in E$ ssi $Ph(x) = \sum_{y \in E} P(x, y) h(y) = h(x)$.

1. On suppose que la fonction h est harmonique sur E, et que $\mathbb{E}[|h(X_n)|] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(h(X_n))$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
2. Soit $B \subsetneq E$, et $h_B : B \to \mathbb{R}$ bornée. On rappelle que $h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{\tau_B})], x \in E$ est l'unique extension de h_B à E qui est harmonique sur $A = E \setminus B$. Montrer alors que $M_n = \mathbb{E}_x[h(X_{n\wedge\tau_B})]$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2 Théorie du potentiel discrète

Exercice 4 On considère une chaîne irréductible X à valeurs dans E au plus dénombrable et $D \subset E$. On note $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in D^c\}$. Pour $x, y \in E$ on pose

$$G_D(x,y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, T>n\}}\right]$$

La fonction G_D est donc une généralisation de la fonction de Green introduite dans la feuille 1 (cas où $D = E$). Pour une fonction $c : D \to \mathbb{R}_+$ on introduit

$$u_D(x) = \sum_{y\in D} c(y) G_D(x,y).$$

1. Montrer que $u_D(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{T-1} c(X_n)\right]$.
2. Montrer que u_D est solution de

$$(\star) \quad u(x) = \begin{cases} Pu(x) + c(x) & x \in D \\ 0 & x \in D^c \end{cases}$$

3. Montrer que si u est solution de l'équation $(\star)$ de la question précédente, alors $\left(M_n := u(X_{n\wedge T}) + \sum_{k=0}^{n-1} c(X_k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}\right)$, pourvu que $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ $\forall n$, définit une martingale.
4. On suppose dans cette question que c est bornée sur D et que pour tout $x \in D$ $T < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. Montrer alors que u_D est l'unique solution bornée de $(\star)$.

Exercice 5 On se place dans le cadre de l'exercice précédent et on introduit le *bord* de D :

$$\partial D := \{y \in E : \exists x \in D \quad P(x,y) > 0\},$$

et la fonction

$$G_{\to\partial D}(x,y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, T=n\}}\right], \quad x \in D, y \in \partial D.$$

Enfin pour une fonction $\phi : \partial D \to \mathbb{R}_+$, on introduit

$$u_{\partial D}(x) = \sum_{y\in\partial D} \phi(y) G_{\to\partial D}(x,y).$$

1. Montrer que $u_{\partial D}(x) = \mathbb{E}_x \left[\phi(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right], x \in D$. Que peut-on dire quant aux propriétés d'harmonicité de $u_{\partial D}$?
2. On suppose dans cette question que $\phi : \partial D \to \mathbb{R}_+$, $c : D \to \mathbb{R}_+$ sont bornées et que pour tout $x \in D$ $T < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. Montrer que $u_D + u_{\partial D}$ est l'unique solution bornée de

$$u(x) = \begin{cases} Pu(x) + c(x) & x \in D \\ \phi(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$

Exercice 6 Soit X une chaîne sur E de noyau P, irréductible et récurrente. Que peut-on dire de l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur E ?

3 Chaînes réversibles, analogie avec les réseaux électriques

Dans ce paragraphe on considère X une chaîne irréductible, réversible, de noyau P, et de distribution stationnaire π.
On rappelle que la chaîne est équivalente à un modèle de conductance sur un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \Omega, \mathcal{E} = \{(x,y) : P(x,y) > 0\})$, et avec des conductances $c : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ telles que pour un certain $K > 0$

$$c(x,y) = K\pi(x)P(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathcal{E}.$$

On rappelle enfin qu'on note $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x,y)$, et $c_{\mathcal{G}} = \sum_{x \in \Omega} c(x)$.

Exercice 7 (Influence de la constante K)
Pour une chaîne X irréductible, réversible, de noyau P et de distribution stationnaire π, les conductances $\{c^{(K)}(e), e \in \mathcal{E}\}$ sont définies à une constante multiplicative $K > 0$ près :

$$c^{(K)}(x,y) = K\pi(x)P(x,y), x, y \in \Omega.$$

On fixe alors $a \in \Omega, Z \subset \Omega, a \notin Z$.

1. Soient $\alpha > \beta$ des réels. Comment la fonction $V = V^{(K)}_{\alpha,\beta}$ telle que

$$V(a) = \alpha, V(z) = \beta \ \forall z \in Z, V(\cdot) P\text{-harmonique sur } \Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$$

dépend-elle du choix de K ? Comment dépend-elle du choix de α, β ?
2. Exprimer le courant $I^{(K)}_{\alpha,\beta}$ associé à $V^{(K)}_{\alpha,\beta}$ en fonction de $I^{(1)}_{\alpha,\beta}$, puis en fonction de K, α, β et $I^{(1)}_{1,0}$.
3. Comment le courant de a vers Z d'intensité 1 dépend-il du choix de K ?
4. Comment la résistance effective entre a et Z, notée $\mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$, dépend-elle du choix de K ?

Exercice 8
Soit $a \in \Omega, Z \subset \Omega$ avec $a \notin Z$. On note $\tau_Z = \inf\{t \geq 0 : X_t \in Z\}$ et, pour $x \in \Omega$,

$$G_Z(a,x) := \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z - 1} \mathbb{1}_{\{X_t = x\}} \right].$$

On introduit alors la fonction $V(x) = \frac{G_Z(a,x)}{c(x)}, x \in \Omega$ (attention : même si cela n'apparaît pas dans notre notation, V dépend de a, et d'après l'exercice précédent, du choix de la constante $K > 0$ telle que $c(x,y) = K\pi(x)P(x,y), x, y \in \Omega$).

1. Que vaut la fonction V sur Z ?
2. Montrer que $V(a) = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$.
3. Montrer que V est harmonique sur $\Omega \setminus \{a\} \cup Z$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}_a[\tau_Z] = \sum_{x\in\Omega} c(x)V(x)$$
5. Pour $a, y \in \Omega$ montrer que
$$\mathbb{E}_a[\tau_y] + \mathbb{E}_y[\tau_a] = c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow y).$$
6. Pour $x, y \in \Omega$ on note
$$S_{xy} = \sum_{t=0}^{\tau_Z - 1} \mathbf{1}_{\{X_t = x, X_{t+1} = y\}}.$$
Montrer que $\mathbb{E}_a[S_{xy}] = G_Z(a,x)P(x,y)$, et en déduire que si I est le courant d'intensité 1 de a à Z,
$$I(x,y) = \mathbb{E}_a[S_{xy} - S_{yx}].$$

Exercice 9 Montrer que $d(a,b) = \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$ définit une distance sur Ω. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser que le courant unité 1 de a à c peut être vu comme la somme des courants unité de a à b et de b à z.

Exercice 10 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \vec{\mathcal{E}})$ un graphe orienté. On suppose que toute arête est présente dans ses deux orientations.
Les extrémités d'une arête orientée $\vec{e}$ sont notés e^-, e^+.
On note $\mathcal{E}_{1/2}$ un ensemble qui contient exactement un élément de chaque paire d'arêtes $\{e, -e\}$.
On note $\ell^2(\mathcal{V})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire
$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})} = \sum_{x\in\mathcal{V}} f_1(x)f_2(x).$$

On note $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$ les fonctions antisymétriques sur les arêtes orientées, muni du produit scalaire
$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \sum_{e\in\mathcal{E}_{1/2}} \theta_1(e)\theta_2(e).$$

On peut passer d'un espace à l'autre via

$$d : \begin{cases} \ell^2(\Omega) \to \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \\ f \to df : df(e) = f(e^-) - f(e^+), \end{cases} \qquad d^* : \begin{cases} \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \to \ell^2(\Omega) \\ \theta \to d^*\theta : d^*\theta(x) = \sum_{e\in\vec{\mathcal{E}}: e^- = x} \theta(e). \end{cases}$$

1. Vérifier que

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} \theta_1(e)\theta_2(e)$$

2. Montrer que d, d^* sont des opérateurs adjoints, i.e. pour tous $f \in \ell^2(\mathcal{V}), g \in \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$,

$$\langle df, g \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \langle f, d^* g \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})}.$$

3. Vérifier que si v est un potentiel fixé sur a, Z et si i est le courant de a à Z correspondant, alors la loi d'Ohm peut être écrite $dv = ri$, et la loi des noeuds $d^* i(x) = 0 \; \forall x \notin (\{a\} \cup Z)$. Que dit la loi des cycles ?

Exercice 11 On reprend les notations de l'exercice précédent mais ici on suppose que les arêtes non orientées sont équipées de conductances $\{c(e), e \; in \mathcal{E}\}$. On étend la définition de conductance aux arêtes orientées : simplement si $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on léquipe de la conductance de l'arête non orientée. On va travailler avec un nouveau produit scalaire sur $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\langle \theta, \theta' \rangle_r = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} r(e)\theta(e)\theta'(e).$$

Pour $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on note $\chi^e = \mathbb{1}_{\{e\}} - \mathbb{1}_{\{-e\}}$. On note enfin les sous-espaces de $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\star = \text{Vect}\left\{ \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}} : e^- = x} c(e)\chi^e, x \in \mathcal{V} \right\}, \qquad \Diamond = \text{Vect}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \chi^{e_k}, e_1, ..., e_n \text{ cycle } \right\}$$

Montrer que $\star = \Diamond^\perp$, et retrouver alors le principe de Thomson.

Exercice 12 Montrer que si on identifie deux noeuds, alors la résistance effective entre a et z dans le nouveau graphe est inférieure à la résistance effective dans l'ancien.
Que se passe-t-il si on fait disparaître une arête existante entre deux points ?

Exercice 13 Retrouver la probabilité de ruine $\mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_N)$ (dans le cadre d'une marche simple non nécessairement symétrique) en utilisant l'analogie avec les circuits électriques.

Exercice 14 On considère un carré divisé en 3×3 cases ; et une marche aléatoire sur ces cases dont les pas sont tirés uniformément parmi les cases voisines ou diagonalement voisines. On note x la case en bas à gauche, y celle en haut à droite. Calculer $\mathbb{P}_x(\tau_y < \tau_x^+)$. Calculer $\mathbb{E}_x[\tau_y]$.
Indice : On pourra penser à utiliser l'équivalence triangle-étoile.

Exercice 15 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe infini (dénombrable) équipé de conductances $(c(e), e \in \mathcal{E})$, vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} c(x, y) < \infty.$$

On considère par ailleurs $(\mathcal{G}_n), (\mathcal{H}_n)$ deux suites croissantes de sous-graphes finis de $\mathcal{G}$ tels que pour tout n, $a \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{H}_n$, et $\bigcup \mathcal{G}_n = \bigcup \mathcal{H}_n = \mathcal{G}$. On note $Z_n = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n$, (resp. $Y_n = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_n$), et on note $\mathcal{G}_n^*$ (resp. $\mathcal{H}_n^*$) le graphe obtenu depuis $\mathcal{G}$ en identifiant tous les points de Z_n en un seul noeud z_n (resp. tous les points de Y_n en un seul noeud y_n). On note $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*)$ la résistance effective de a à z_n dans $\mathcal{G}_n^*$, (resp. $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$ la résistance effective de a à y_n dans $\mathcal{H}_n^*$).

1. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*), \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$$
existent dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ et qu'elles sont égales.
2. Montrer que la chaîne sur $\mathcal{G}$ correspondant à ce modèle de conductances est récurrente si et seulement si cette limite commune est infinie.

Exercice 16 Utiliser l'inégalité de Nash-Williams pour montrer que la marche simple sur $\mathbb{Z}^d, d \leq 2$ est récurrente.

Exercice 17 On considère un arbre d-régulier enraciné, infini, et la marche λ-biaisée sur cet arbre, i.e. telle que en un noeud v donné, la probabilité de remonter vers la racine est égale à $\frac{\lambda}{\lambda+d}$, tandis que la probabilité d'aller vers l'un des descendants de v est égale à $\frac{1}{\lambda+d}$.

1. Interpréter le modèle en termes de circuit électrique. Calculer la résistance équivalente entre la racine et la profondeur n de l'arbre, en fonction de n, d, λ.
2. Pour quelles valeurs de d, λ cette résistance tend-elle vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$? Retrouver alors le critère de récurrence de la marche en fonction de d, λ.
3. Pour quel type d'arbre peut-on généraliser ce type de raisonnement ?

Exercice 18 Un professeur possède n parapluies, on suppose qu'initialement il y en a k chez lui et $n-k$ dans son bureau. Il se déplace matin et soir, et ne prend avec lui un parapluie que s'il pleut (et qu'il peut le faire). On suppose qu'indépendamment, à chaque déplacement, il pleut avec probabilité p.

1. Modéliser le problème par une chaîne de Markov réversible et calculer la distribution stationnaire. Asymptotiquement, quelle proportion des trajets le professeur effectue-t-il sous la pluie sans son parapluie ?
2. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que n parapluies se trouvent au même endroit.
3. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que le professeur se retrouve sous la pluie sans son parapluie.

Exercice 19 (urnes de Pólya)
On considère une urne de Pólya contenant initialement d boules de couleur distinctes. Au temps $t - 1/2, t \geq 1$, on tire, indépendamment des étapes précédentes et uniformément, une boule de l'urne, on la replace dans l'urne et on y ajoute une boule de la même couleur.
On note $X_t(j)$ le nombre de boules de la couleur j qui ont été tirées jusqu'au temps t.

1. Montrer que pour tout $(n_1, ..., n_d)$ tel que $n_1 + ... + n_d = n$, on a
$$\mathbb{P}(X_n = (n_1, ..., n_d)) = \frac{\prod_{i=1}^d n_i!}{d(d+1)...(d+n-1)} \binom{n}{n_1, ..., n_j} = \frac{(d-1)!n!}{(d+n-1)!}.$$
Comment cette formule se simplifie-t-elle lorsque $d = 2$?
2. En déduire que $\frac{X_t}{t}$ tend en loi vers une Dirichlet de paramètres $(1, ..., 1)$ (i.e. de densité uniforme sur le simplexe $\{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}_+^d : x_1 + ...x_d = 1\}$).

Exercice 20 On suppose que $\mathcal{G}_n$ est le pavé $n \times ... \times n$ de $\mathbb{Z}^d$. Précisément, les noeuds de $\mathcal{G}_n$ sont $\mathcal{V}_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall i \in \{1, ..., d\}\ 1 \leq x_i \leq n\}$ et les arêtes $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{G}_n$ sont entre les noeuds de $\mathcal{V}_n$ qui sont plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$.
On munit les arêtes de $\mathcal{E}_n$ de conductances toutes égales à 1, et on note
$a = (1, ..., 1), z = (n, ..., n)$.

1. On considère $\Pi_k = \{(v, w) \in \mathcal{E}_n : ||v||_\infty = k, ||w||_\infty = k+1\}, k = 1, ..., n-1$. Montrer que pour tout $k = 1, ..., n-1$, Π_k est un ensemble de coupure, et que
$$\sum_{e \in \Pi_k} c(e) = |\Pi_k| = dk^{d-1}.$$
En déduire que
$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \geq \begin{cases} n-1 & \text{si } d = 1 \\ \frac{1}{2}\log(n-1) & \text{si } d = 2 \\ C_d := \frac{1}{d}\sum_{k\geq 1} k^{1-d} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$
2. Soit une urne de Pólya, avec initialement une boule de chaque couleur $1, ..., d$. On introduit comme dans l'exercice précédent le processus $(X_t, t \geq 0)$, et on note $\widetilde{X}_t = X_t + (1, ..., 1)$ de sorte que $\widetilde{X}_t(i)$ est le nombre de boules de couleur i dans l'urne au temps t. On introduit alors le courant I de a vers z, d'intensité 1. Sur les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i \leq n + d\}$ on définit
$$I(x, y) = \mathbb{P}(\exists t \in \{0, ..., n-1\} : \widetilde{X}_t = i, \widetilde{X}_{t+1} = j),$$
et pour les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i > n + d\}$ on définit
$$I(x, y) = I((n+1, ..., n+1) - y, (n+1, ..., n+1) - x).$$
Soit $k \in \{1, ..., n\}$, montrer que pour tout $y \in B_n$ tel que $\sum_{i=1}^d y_i = k + d$, le courant entrant en y
$$\sum_{\{x : \sum_{i=1}^d x_i = k+d-1, x \sim y\}} I(x, y) = \frac{1}{\binom{k+d-1}{d-1}}.$$
En déduire que l'énergie $E(I)$ de ce courant vérifie
$$E(I) \leq \begin{cases} n & \text{si } d = 1 \\ 2\log(n) & \text{si } d = 2 \\ 2\ (d-1)!\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{d-1}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$
3. Pour quelle(s) valeur(s) de d a-t-on $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$? Pour quelle(s) valeur(s) de d cette résistance effective tend-elle vers une limite finie lorsque $n \to \infty$?
4. Comment utiliser ces arguments pour démontrer que la marche sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d \leq 2$ et transiente si $d \geq 3$?