

Temps de mélange

Exercices 4

1 Martingales

Exercice 1 Soit X chaîne de Markov à valeurs dans E , de noyau P , $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturelle de X .

1. Soit X chaîne de Markov à valeurs dans E , de noyau P , et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|f(X_n)|] < \infty$. Montrer que le processus

$$\left(M_n^f := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} (P - I)f(X_k), n \geq 0 \right)$$

est une (\mathcal{F}_n) -martingale.

2. Que dire de $(f(X_n))$ lorsque f est une fonction harmonique sur E , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|f(X_n)|] < \infty$?
3. On suppose que la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|g(X_n)|] < \infty$ et que, pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $Pg = \lambda g$. Montrer que $(g(X_n)/\lambda^n)$ est une martingale.
4. On suppose que la fonction $h : \mathbb{N} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|h(n, X_n)|] < \infty$, et que

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} Ph(n+1, x) = \sum_{y \in E} P(x, y)h(n+1, y) = h(n, x).$$

Montrer que $(h(n, X_n))_n$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.

1. Les propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité de M_n^f sont évidentes. Notons d'autre part que $M_n^f - Pf(X_n)$ est \mathcal{F}_n -mesurable. De plus par Markov au temps n la loi de X_{n+1} sachant \mathcal{F}_n est exactement celle de X_{n+1} sachant X_n , i.e. $P(X_n, \cdot)$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}^f | \mathcal{F}_n] &= M_n^f - Pf(X_n) + \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \\ &= M_n^f - Pf(X_n) + \sum_{x \in E} f(x)P(X_n, x) = M_n^f, \end{aligned}$$

et on conclut que $(M_n^f)_n$ est bien une (\mathcal{F}_n) -martingale.

2. Dans ce cas $M_n^f = f(X_n) - f(X_0)$, et $(f(X_n))$ est donc une martingale.
3. A nouveau les propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité sont évidentes grâce aux hypothèses. Comme par ailleurs

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = Pg(X_n) = \lambda g(X_n)$$

on a bien que $(g(X_n)/\lambda^n)$ est une martingale.

4. A nouveau les propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité découlent des hypothèses, et de plus

$$\mathbb{E}[h(n+1, X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = Ph(n+1, X_n) = h(n, X_n),$$

comme souhaité.

Exercice 2

Soit (X_n) la marche simple sur \mathbb{Z} avec $p = P(x, x+1) = 1 - P(x, x-1) = 1 - q$.

1. Montrer que $(X_n - (p - q)n)$ est une martingale.
2. Montrer que $\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right)$ est une martingale.
3. Expliquer comment on peut retrouver la probabilité de ruine du joueur à partir de ces martingales.
4. Montrer que $((X_n - (p - q)n)^2 - 4pqn)$ est une martingale.
5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(\lambda) = \log(p \exp(\lambda) + q \exp(-\lambda))$, montrer que $\exp(\lambda X_n - n\Phi(\lambda))$ est une martingale.

1. Il suffit de remarquer que $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n + p - q$ et appliquer par exemple le troisième point de l'exercice précédent.
2. On a $\mathbb{E}[(q/p)^{X_{n+1}}] = (q/p)^{X_n} (p \times (q/p) + q \times (q/p)^{-1}) = (p/q)^{X_n}$ et le résultat souhaité suit.
3. On note $T = T_0 \wedge T_N$, et on considère la chaîne issue de $k \in \{0, \dots, N\}$. Quitte à borner T par nG où $G \sim \text{Geom}(p^n)$ on voit que $T < \infty$ \mathbb{P}_k -p.s.
Dans le cas $p = q = 1/2$, $X_{n \wedge T}$ reste bornée, le théorème d'arrêt s'applique et on trouve que

$$N\mathbb{P}_k(X_T = N) = \mathbb{E}_k[X_T] = k,$$

de sorte qu'on retrouve la probabilité de ruine

$$\mathbb{P}_k(X_T = 0) = 1 - \mathbb{P}_k(X_T = N) = \frac{N - k}{N}.$$

Lorsque $p \neq 1/2$, $(q/p)^{X_{n \wedge T}}$ restant également bornée, le théorème d'arrêt s'applique à nouveau et on obtient

$$\mathbb{P}_k(X_T = 0) + (1 - \mathbb{P}_k(X_T = 0))(q/p)^N = \mathbb{E}_k[(p/q)^{X_T}] = \left(\frac{q}{p}\right)^k,$$

et on retrouve bien que

$$\mathbb{P}_k(X_T = 0) = \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}.$$

4. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{n+1} - (p - q)(n + 1))^2 | \mathcal{F}_n] &= p(X_n - (p - q)n + 2q)^2 + q(X_n - (p - q)n - 2p)^2 \\ &= (X_n - (p - q)n)^2 + 4pq \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure au résultat souhaité.

5. Le résultat provient de ce que

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \exp(\lambda X_n) \Phi(\lambda),$$

et du deuxième point de l'exercice précédent.

Exercice 3 Soit X une chaîne de Markov sur E fini de matrice de transition P . On rappelle que $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique au point $x \in E$ ssi $Ph(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)h(y) = h(x)$.

1. On suppose que la fonction h est harmonique sur E , et que $\mathbb{E}[|h(X_n)|] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(h(X_n))$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.
2. Soit $B \subsetneq E$, et $h_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. On rappelle que $h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{\tau_B})]$, $x \in E$ est l'unique extension de h_B à E qui est harmonique sur $A = E \setminus B$. Montrer alors que $M_n = \mathbb{E}_x[h(X_{n \wedge \tau_B})]$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.

1. La fonction h étant harmonique, on a $Ph = h$, et donc

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = Ph(X_n) = h(X_n),$$

comme souhaité.

2. Par principe du maximum, $\sup_{x \in E} h(x) = \sup_{x \in B} h_B(x) < \infty$ donc h est bornée. Par ailleurs, T étant un (\mathcal{F}_n) -temps d'arrêt, $\mathbb{1}_{\{T > n\}}, \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}$ sont \mathcal{F}_n -mesurables, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X_{n+1 \wedge T}) \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T > n\}} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[h(X_T)\mathbb{1}_{\{T \leq n\}} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= Ph(X_n)\mathbb{1}_{\{T > n\}} + h(X_T)\mathbb{1}_{\{T \leq n\}} \\ &= h(X_{T \wedge n}), \end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé que sur $\{X_n \in A\} \subset \{T > n\}$ et que si $x \in A$, $Ph(x) = h(x)$.

2 Théorie du potentiel discrète

Exercice 4 On considère une chaîne irréductible X à valeurs dans E au plus dénombrable et $D \subset E$. On note $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in D^c\}$. Pour $x, y \in E$ on pose

$$G_D(x, y) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y, T > n\}} \right]$$

La fonction G_D est donc une généralisation de la fonction de Green introduite dans la feuille 1 (cas où $D = E$). Pour une fonction $c : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ on introduit

$$u_D(x) = \sum_{y \in D} c(y)G_D(x, y).$$

1. Montrer que $u_D(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{T-1} c(X_n) \right]$.

2. Montrer que u_D est solution de

$$(\star) \quad u(x) = \begin{cases} Pu(x) + c(x) & x \in D \\ 0 & x \in D^c \end{cases}$$

3. Montrer que si u est solution de l'équation (\star) de la question précédente, alors $(M_n := u(X_{n \wedge T}) + \sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) \mathbf{1}_{\{T > k\}})$, pourvu que $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty \forall n$, définit une martingale.
4. On suppose dans cette question que c est bornée sur D et que pour tout $x \in D$ $T < \infty$ \mathbb{P}_x -p.s. Montrer alors que u_D est l'unique solution bornée de (\star) .
1. Puisque c est une fonction positive, par Fubini-Tonelli on a

$$\begin{aligned} \sum_{y \in D} c(y) G_D(x, y) &= \sum_{y \in D} c(y) \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, T > n\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} c(X_n) \mathbf{1}_{\{T > n\}} \right], \end{aligned}$$

comme souhaité.

2. Il est évident que $u_D(x) = 0$ si $x \in D^c$.

De plus, d'après l'expression précédente et Markov au temps 1 et le fait que u_D s'annule sur D^c , pour $x \in D$, on a

$$u_D(x) = c(x) + \sum_{y \in D} P(x, y) \mathbb{E}_y \left[\sum_{n=0}^{T-1} c(X_n) \right] = c(x) + Pu_D(x).$$

3. Puisque $u(X_T) \mathbf{1}_{\{T \leq n\}}$ est \mathcal{F}_n -mesurable, que $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$, et que sur cet événement $X_n \in D$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(X_{(n+1) \wedge T}) \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[u(X_{n+1}) \mathbf{1}_{\{T > n+1\}} + u(X_T) \mathbf{1}_{\{T \leq n\}} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{1}_{\{T > n\}} Pu(X_n) + u(X_T) \mathbf{1}_{\{T \leq n\}} \\ &= u(X_{T \wedge n}) - c(X_n) \mathbf{1}_{\{T > n\}}. \end{aligned}$$

Enfin puisque $\sum_{k=0}^n c(X_k) \mathbf{1}_{\{T > k\}}$ est \mathcal{F}_n -mesurable, on déduit que

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = u(X_{T \wedge n}) - c(X_n) \mathbf{1}_{\{T > n\}} + \sum_{k=0}^n c(X_k) \mathbf{1}_{\{T > k\}} = M_n.$$

4. Soit u une solution bornée de (\star) . Puisque c est également bornée M_n est intégrable pour tout n et (M_n) est donc une martingale issue de 0. En particulier

$$u(x) = \mathbb{E}_x[M_n] \Rightarrow \mathbb{E}_x[u(X_{T \wedge n})] = u(x) - \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) \mathbf{1}_{\{T > k\}} \right].$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque $T < \infty$ \mathbb{P}_x -p.s., et que u est bornée, le membre de gauche ci-dessus converge par convergence dominée vers $\mathbb{E}_x[u(X_T)] = 0$, puisque $X_T \in D^c$. Le

théorème de convergence monotone (c étant positive) assure quant à lui que le membre de gauche converge vers $u(x) - \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{T-1} c(X_k) \right] = u(x) - u_D(x)$. L'argument étant valable quelque soit $x \in D$, et u et u_D s'annulant sur D^c , on conclut que $u \equiv u_D$.

Remarque : On notera que lorsque $c \equiv 0$, on a prouvé le fait que pourvu que pour tout $x \in D$, $T < \infty$ \mathbb{P}_x -p.s., une fonction bornée, harmonique sur D , et nulle sur D^c , est identiquement nulle.

Exercice 5 On se place dans le cadre de l'exercice précédent et on introduit le *bord* de D :

$$\partial D := \{y \in E : \exists x \in D \quad P(x, y) > 0\},$$

et la fonction

$$G_{\rightarrow \partial D}(x, y) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, T=n\}} \right], \quad x \in D, y \in \partial D.$$

Enfin pour une fonction $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}_+$, on introduit

$$u_{\partial D}(x) = \sum_{y \in \partial D} \phi(y) G_{\rightarrow \partial D}(x, y).$$

1. Montrer que $u_{\partial D}(x) = \mathbb{E}_x [\phi(X_T) \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}]$, $x \in D$. Que peut-on dire quant aux propriétés d'harmonicité de $u_{\partial D}$?
2. On suppose dans cette question que $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}_+$, $c : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont bornées et que pour tout $x \in D$ $T < \infty$ \mathbb{P}_x -p.s. Montrer que $u_D + u_{\partial D}$ est l'unique solution bornée de

$$u(x) = \begin{cases} Pu(x) + c(x) & x \in D \\ \phi(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$

1. En utilisant Fubini-Tonelli, on a pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} u_{\partial D}(x) &= \sum_{y \in \partial D} \phi(y) G_{\rightarrow \partial D}(x, y) \\ &= \sum_{y \in \partial D} \phi(y) \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, T=n\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{y \in \partial D} \phi(y) \mathbf{1}_{\{X_T=y, T < \infty\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x [\phi(X_T) \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}]. \end{aligned}$$

2. Si $x \in \partial D$, $u_{\partial D}(x) = \phi(x)$. Si $x \in D$, $P(x, y) = 0$ si $y \notin D \cup \partial D$ et donc, par Markov au temps 1,

$$u_{\partial D}(x) = \sum_{y \in D \cup \partial D} P(x, y) \mathbb{E}_y [\phi(X_T) \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] = Pu_{\partial D}(x),$$

de sorte que $u_{\partial D}$ coïncide avec ϕ sur ∂D et est harmonique sur D .

3. D'après notre hypothèse sur ϕ , $u_{\partial D}$ est bornée, de sorte que $u - u_{\partial D}$ l'est également. Mais alors $u - u_{\partial D}$ vérifie (\star) de l'exercice précédent, et $u - u_{\partial D} = u_D$, comme souhaité.

Remarque : Dans le cas $c \equiv 0$, on a démontré que, pourvu que ϕ soit bornée et que pour tout $x \in D$, $T < \infty$ \mathbb{P}_x -p.s., l'unique fonction harmonique sur D et qui coïncide avec ϕ sur ∂D est la fonction $u_{\partial D}$. Le principe du maximum est alors évident puisque

$$\max_{x \in D \cup \partial D} \mathbb{E}_x [\phi(X_T) \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}] \leq \max_{x \in \partial D} \phi(x).$$

Exercice 6 Soit X une chaîne sur E de noyau P , irréductible et récurrente. Que peut-on dire de l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur E ?

D'après ce qui précède, si $Ph = h$ alors $(h(X_n))$ est alors une martingale positive, elle converge donc \mathbb{P}_x -p.s. vers H . Mais puisque la chaîne est irréductible et récurrente, elle visite tout état $y \in E$ une infinité de fois, de sorte que la suite $(h(X_n))$ prend la valeur $h(y)$ une infinité de fois. Quitte à considérer la sous-suite correspondante, on en déduit que $H = h(y)$ p.s., et finalement que h est forcément constante.

3 Chaînes réversibles, analogie avec les réseaux électriques

Dans ce paragraphe on considère X une chaîne irréductible, réversible, de noyau P , et de distribution stationnaire π .

On rappelle que la chaîne est équivalente à un modèle de conductance sur un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \Omega, \mathcal{E} = \{(x, y) : P(x, y) > 0\})$, et avec des conductances $c : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que pour un certain $K > 0$

$$c(x, y) = K\pi(x)P(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}.$$

On rappelle enfin qu'on note $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$, et $c_{\mathcal{G}} = \sum_{x \in \Omega} c(x)$.

Exercice 7 (Influence de la constante K)

Pour une chaîne X irréductible, réversible, de noyau P et de distribution stationnaire π , les conductances $\{c^{(K)}(e), e \in \mathcal{E}\}$ sont définies à une constante multiplicative $K > 0$ près :

$$c^{(K)}(x, y) = K\pi(x)P(x, y), \quad x, y \in \Omega.$$

On fixe alors $a \in \Omega, Z \subset \Omega, a \notin Z$.

1. Soient $\alpha > \beta$ des réels. Comment la fonction $V = V_{\alpha, \beta}^{(K)}$ telle que

$$V(a) = \alpha, V(z) = \beta \quad \forall z \in Z, V(\cdot) P\text{-harmonique sur } \Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$$

dépend-elle du choix de K ? Comment dépend-elle du choix de α, β ?

2. Exprimer le courant $I_{\alpha, \beta}^{(K)}$ associé à $V_{\alpha, \beta}^{(K)}$ en fonction de $I_{\alpha, \beta}^{(1)}$, puis en fonction de K, α, β et $I_{1, 0}^{(1)}$.
3. Comment le courant de a vers Z d'intensité 1 dépend-il du choix de K ?
4. Comment la résistance effective entre a et Z , notée $\mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$, dépend-elle du choix de K ?

1. Le noyau P est fixé (et bien sûr ne dépend pas de K), donc $V_{\alpha,\beta}^{(K)}$ ne dépend pas de K .
On la note donc $V_{\alpha,\beta}$ par la suite.

Cependant $V = \beta + (\alpha - \beta)V_{1,0}$ vaut α en a , β sur Z , et reste harmonique sur $\Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$ car $V_{1,0}$ l'est. Comme la fonction qui satisfait ce problème de Dirichlet est unique on conclut que $V_{\alpha,\beta} = \beta + (\alpha - \beta)V_{1,0}$.

2. Par la loi d'Ohm, si $x, y \in \Omega$,

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}^{(K)}(x, y) &= c^{(K)}(x, y)(V_{\alpha,\beta}(x) - V_{\alpha,\beta}(y)) \\ &= K(\alpha - \beta)\pi(x)P(x, y)(V_{1,0}(x) - V_{1,0}(y)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}^{(K)} &= KI_{\alpha,\beta}^{(1)}, \\ I_{\alpha,\beta}^{(K)} &= K(\alpha - \beta)I_{1,0}^{(1)}. \end{aligned}$$

3. L'intensité $\|I_{\alpha,\beta}^{(K)}\|$ du courant $I_{\alpha,\beta}^{(K)}$ est égale à

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_a(I_{\alpha,\beta}^{(K)}) &= \sum_{y \sim a} I_{\alpha,\beta}^{(K)}(a, y) \\ &= K(\alpha - \beta)\|I_{1,0}^{(1)}\| \end{aligned}$$

Il faut donc choisir une différence de potentiel $\alpha - \beta = \frac{1}{K\|I_{1,0}^{(1)}\|}$ entre a et Z pour créer un courant d'intensité 1 de a vers Z . Pour un tel choix de α, β , le courant obtenu est alors toujours

$$I_{\alpha,\beta}^{(K)} = K(\alpha - \beta)I_{1,0}^{(1)} = \frac{I_{1,0}^{(1)}}{\|I_{1,0}^{(1)}\|},$$

et donc ce courant d'intensité 1 ne dépend pas du choix de K .

4. La résistance effective entre a et Z est telle que pour tous $\alpha > \beta$,

$$\mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z) = \frac{\alpha - \beta}{\|I_{\alpha,\beta}^{(K)}\|} = \frac{1}{\|I_{1,0}^{(1)}\|} = \frac{1}{K}\mathcal{R}^{(1)}(a \leftrightarrow Z).$$

Exercice 8

Soit $a \in \Omega, Z \subset \Omega$ avec $a \notin Z$. On note $\tau_Z = \inf\{t \geq 0 : X_t \in Z\}$ et, pour $x \in \Omega$,

$$G_Z(a, x) := \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_t=x\}} \right].$$

On introduit alors la fonction $V(x) = \frac{G_Z(a,x)}{c(x)}, x \in \Omega$ (attention : même si cela n'apparaît pas dans notre notation, V dépend de a , et d'après l'exercice précédent, du choix de la constante $K > 0$ telle que $c(x, y) = K\pi(x)P(x, y), x, y \in \Omega$).

1. Que vaut la fonction V sur Z ?
2. Montrer que $V(a) = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$.

3. Montrer que V est harmonique sur $\Omega \setminus \{a\} \cup Z$.

4. Montrer que

$$\mathbb{E}_a[\tau_Z] = \sum_{x \in \Omega} c(x)V(x)$$

5. Pour $a, y \in \Omega$ montrer que

$$\mathbb{E}_a[\tau_y] + \mathbb{E}_y[\tau_a] = c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow y).$$

6. Pour $x, y \in \Omega$ on note

$$S_{xy} = \sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbf{1}_{\{X_t=x, X_{t+1}=y\}}.$$

Montrer que $\mathbb{E}_a[S_{xy}] = G_Z(a, x)P(x, y)$, et en déduire que si I est le courant d'intensité 1 de a à Z ,

$$I(x, y) = \mathbb{E}_a[S_{xy} - S_{yx}].$$

1. Par définition de τ_Z et G_Z , $G_Z(a, z) = 0$ pour tout $z \in Z$, donc V s'annule sur Z .

2. On a $V(a) = \frac{G_Z(a, a)}{c(a)}$. Avec les notations de l'exercice précédent, $V_{1,0}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z)$ (car la fonction $x \rightarrow \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z)$ satisfait le même problème de Dirichlet que $V_{1,0}$). En particulier, si on note $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t = a\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a(\tau_a^+ < \tau_Z) &= \sum_{x \in \Omega} P(a, x)V_{1,0}(x) \\ &= \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x \in \Omega} \pi(a)P(a, x)V_{1,0}(x) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi(a)} \sum_{x \in \Omega} \pi(a)P(a, x)(V_{1,0}(x) - V_{1,0}(a)) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi(a)} \|I_{1,0}^{(1)}\| \end{aligned}$$

Par définition de $\mathcal{R}^{(1)}(a \leftrightarrow Z)$, et d'après l'exercice précédent, on a donc

$$\mathbb{P}_a(\tau_a^+ < \tau_Z) = 1 - \frac{1}{\pi(a)\mathcal{R}^{(1)}(a \leftrightarrow Z)} = 1 - \frac{1}{c(a)\mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)}.$$

L'expression précédente ne dépend pas de K car $c(a) = K\pi(a)$, c'est pourquoi, avec un léger abus, on se contente souvent d'écrire $c(a)\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)$,

Reste à voir que $G_Z(a, a)$ est l'espérance d'une variable géométrique de paramètre $\mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+)$ et que donc

$$V(a) = \frac{G_Z(a, a)}{c(a)} = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z),$$

comme souhaité.

3. Soit $x \in \Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$, on a, en utilisant que $c(\cdot) = K\pi(\cdot)$, que la chaîne est réversible, et la propriété de Markov au temps t :

$$\begin{aligned}
c(x) \sum_{y \in \Omega} P(x, y) V(a, y) &= \sum_{y \in \Omega} \frac{1}{c(y)} \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} K\pi(x) P(x, y) \mathbb{1}_{\{X_t=y\}} \right] \\
&= \sum_{y \in \Omega} \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \frac{K}{c(y)} \pi(y) P(y, x) \mathbb{1}_{\{X_t=y\}} \right] \\
&= \sum_{y \in \Omega} \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_t=y, X_{t+1}=x\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_{t+1}=x\}} \right] = G_Z(a, x),
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé que $x \neq a, x \notin Z$ pour voir que sous \mathbb{P}_a , $\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_{t+1}=x\}} = \sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_t=x\}}$.

4. Simplement

$$\mathbb{E}_a[\tau_Z] = \sum_{x \in \Omega} G_Z(a, x) = \sum_{x \in \Omega} c(x) V(x).$$

5. Si $a = y$ l'égalité est évidente. Sinon, quitte à poser $Z = \{y\}$, les questions précédentes impliquent que

$$\mathbb{E}_a[\tau_y] = \sum_{x \in \Omega} c(x) V^{a,y}(x),$$

où $V^{a,y}$ est l'unique fonction harmonique sur $\Omega \setminus \{a, y\}$ telle que

$$V^{a,y}(a) = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow y), V^{a,y}(y) = 0.$$

De même,

$$\mathbb{E}_y[\tau_a] = \sum_{x \in \Omega} c(x) V^{y,a}(x),$$

où $V^{y,a}$ est l'unique fonction harmonique sur $\Omega \setminus \{a, y\}$ telle que

$$V^{y,a}(y) = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow y), V^{y,a}(a) = 0.$$

La fonction $W = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow y) - V^{a,y}$ satisfait ce même problème de Dirichlet et donc $V^{y,a} = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow y) - V^{a,y}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a[\tau_y] + \mathbb{E}_y[\tau_a] &= \sum_{x \in \Omega} c(x) (V^{a,y}(x) + V^{y,a}(x)) \\
&= \sum_{x \in \Omega} c(x) \mathcal{R}(a \leftrightarrow y) = \mathcal{R}(a \leftrightarrow y) c_G,
\end{aligned}$$

comme souhaité (comme plus haut $c(\cdot)\mathcal{R}(\cdot \leftrightarrow \cdot)$ ne dépend pas de K , c'est pourquoi on a laissé tomber les exposants correspondants dans nos notations).

6. Notons que le courant I_V de a à Z associé à V est tel que

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) = \frac{V(a) - V(z)}{\|I_V\|} = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)}{\|I_V\|},$$

de sorte que ce courant est le courant I d'intensité 1 (on notera que d'après l'exercice précédent, ce courant ne dépend pas du choix de K).

Par ailleurs, par Markov au temps t ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a[S_{xy}] &= \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbf{1}_{\{X_t=x, X_{t+1}=y\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_a \left[\sum_{t=0}^{\tau_Z-1} \mathbf{1}_{\{X_t=x\}} P(x, y) \right] = G_Z(a, x) P(x, y). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a[S_{xy} - S_{yx}] &= G_Z(a, x) P(x, y) - G_Z(a, y) P(y, x) \\ &= V(x)c(x)P(x, y) - V(y)c(y)P(y, x) \\ &= (V(x) - V(y))c(x, y) = I(x, y), \end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 9 Montrer que $d(a, b) = \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$ définit une distance sur Ω . Pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser que le courant unité 1 de a à c peut être vu comme la somme des courants unité de a à b et de b à c .

On suppose K fixé dans ce qui suit, pour alléger le texte on ne le fait pas apparaître dans les notations.

Le fait que $d(a, b) \geq 0$ est évident.

D'après l'exercice précédent, et en reprenant les mêmes notations,

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) = V^{a,y}(a) = V^{y,a}(y) = \mathcal{R}(b \leftrightarrow a),$$

ce qui assure la symétrie.

D'autre part, si $\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) = 0$ alors

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a] = 0$$

et donc $a = b$.

Fixons $a, b, c \in \Omega$. On note $I^{a,b}$ (resp. $I^{b,c}$, $I^{a,c}$) le courant unité de a à b (resp. de b à c et de a à c). Ces courants sont respectivement associés aux potentiels $V^{a,b}$, $V^{b,c}$, $V^{a,c}$.

On a $I^{a,b} + I^{b,c} = I^{a,c}$, en effet il est facile de montrer que $I^{a,b} + I^{b,c}$ est le courant unité de a à c : cette fonction est antisymétrique et vérifie la loi des cycles puisque ces propriétés sont vraies pour $I^{a,b}$ et $I^{b,c}$, et par ailleurs

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x(I^{a,b} + I^{b,c}) &= \operatorname{div}_x(I^{a,b}) + \operatorname{div}_x(I^{b,c}) \\ &= \mathbf{1}_{\{x=a\}} - \mathbf{1}_{\{x=b\}} + \mathbf{1}_{\{x=b\}} - \mathbf{1}_{\{x=c\}} \\ &= \mathbf{1}_{\{x=a\}} - \mathbf{1}_{\{x=c\}}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'un potentiel associé à $I^{a,c}$ est le potentiel $W := V^{a,b} + V^{b,c}$. On a donc

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow c) = W(a) - W(c) = V^{a,b}(a) - V^{a,b}(c) + V^{b,c}(a) - V^{b,c}(c).$$

Cependant le principe du maximum assure que $V^{a,b}$ atteint son maximum en a et son minimum en b de sorte que $V^{a,b}(c) \geq 0$ de même $V^{b,c}(a) \leq V^{b,c}(b) = \mathcal{R}(b \leftrightarrow c)$, et on conclut que

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow c) \leq \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c).$$

Exercice 10 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \vec{\mathcal{E}})$ un graphe orienté. On suppose que toute arête est présente dans ses deux orientations.

Les extrémités d'une arête orientée \vec{e} sont notés e^- , e^+ .

On note $\mathcal{E}_{1/2}$ un ensemble qui contient exactement un élément de chaque paire d'arêtes $\{e, -e\}$.

On note $\ell^2(\mathcal{V})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})} = \sum_{x \in \mathcal{V}} f_1(x) f_2(x).$$

On note $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$ les fonctions antisymétriques sur les arêtes orientées, muni du produit scalaire

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \sum_{e \in \mathcal{E}_{1/2}} \theta_1(e) \theta_2(e).$$

On peut passer d'un espace à l'autre via

$$d : \begin{cases} \ell^2(\Omega) \rightarrow \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \\ f \rightarrow df : df(e) = f(e^-) - f(e^+), \end{cases} \quad d^* : \begin{cases} \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \rightarrow \ell^2(\Omega) \\ \theta \rightarrow d^*\theta : d^*\theta(x) = \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} \theta(e). \end{cases}$$

1. Vérifier que

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} \theta_1(e) \theta_2(e)$$

2. Montrer que d, d^* sont des opérateurs adjoints, i.e. pour tous $f \in \ell^2(\mathcal{V}), g \in \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$,

$$\langle df, g \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \langle f, d^*g \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})}.$$

3. Vérifier que si v est un potentiel fixé sur a, Z et si i est le courant de a à Z correspondant, alors la loi d'Ohm peut être écrite $dv = ri$, et la loi des noeuds $d^*i(x) = 0 \forall x \notin (\{a\} \cup Z)$. Que dit la loi des cycles ?

1. L'égalité découle de la définition de $\mathcal{E}_{1/2}$ et du fait que l'antisymétrie de θ_1, θ_2 assure que

$$\theta_1(-e) \theta_2(-e) = \theta_1(e) \theta_2(e).$$

2. On a, quitte à poser $\varepsilon = -e$, et par antisymétrie de g

$$\begin{aligned}
\langle df, g \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^-) - f(e^+)g(e) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^-)g(e) - \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^+)g(e) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^-)g(e) - \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \vec{\mathcal{E}}} f(\varepsilon^-)g(-\varepsilon) \\
&= \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^-)g(e).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\langle f, d^*g \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})} &= \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} g(e) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{V}} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} f(e^-)g(e) \\
&= \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} f(e^-)g(e)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

3. Soit $e \in \vec{\mathcal{E}}$, posons $x = e^-$, $y = e^+$

$$dv(e) = v(x) - v(y); \quad i(e) = i(x, y); \quad c(e) = c(x, y),$$

de sorte que la loi d'Ohm affirme effectivement que $c \times dv = i$, ou encore $dv = ri$.

On a par ailleurs, si $x \in \mathcal{V}$

$$d^*i(x) = \sum_{y \in \mathcal{V}: (x, y) \in \vec{\mathcal{E}}} i(x, y) = \operatorname{div}_x(i),$$

de sorte que la loi des noeuds se lit effectivement $d^*i(x) = 0$, $\forall x \notin \{a\} \cup Z$.

Enfin la loi des cycles affirme que si e_1, \dots, e_n est un cycle, alors

$$\sum_{k=1}^n dv(e_k) = \sum_{k=1}^n i(e_k)r(e_k) = 0.$$

Exercice 11 On reprend les notations de l'exercice précédent mais ici on suppose que les arêtes non orientées sont équipées de conductances $\{c(e), e \in \mathcal{E}\}$. On étend la définition de conductance aux arêtes orientées : simplement si $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on léquipe de la conductance de l'arête non orientée. On va travailler avec un nouveau produit scalaire sur $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\langle \theta, \theta' \rangle_r = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} r(e)\theta(e)\theta'(e).$$

Pour $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on note $\chi^e = \mathbb{1}_{\{e\}} - \mathbb{1}_{\{-e\}}$. On note enfin les sous-espaces de $\ell^2_{-}(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\star = \text{Vect} \left\{ \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} c(e) \chi^e, x \in \mathcal{V} \right\}, \quad \diamond = \text{Vect} \left\{ \sum_{k=1}^n \chi^{e_k}, e_1, \dots, e_n \text{ cycle} \right\}$$

Montrer que $\star = \diamond^\perp$, et retrouver alors le principe de Thomson.

Il est facile de vérifier que

$$\langle \chi^e, \chi^{e'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ -1 & \text{si } e = -e' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fixons alors $x \in \mathcal{V}, e_1, \dots, e_n$ cycle, et posons $\theta_1 = \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} c(e) \chi^e, \theta_2 = \sum_{k=1}^n \chi^{e_k}$.

Si e_k est tel que $e_k^- \neq x, e_k^+ \neq x$, alors on a clairement

$$\langle \theta_1, \chi^{e_k} \rangle_r = 0.$$

Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, tel que $x = e_k^-$, alors $x = e_{k-1}^+$ (et donc $x = (-e_{k-1})^-$). Mais alors

$$\langle \theta_1, \chi^{e_{k-1}} + \chi^{e_k} \rangle_{>r} = -c(e_{k-1})r(e_{k-1}) + c(e_k)r(e_k) = 1 - 1 = 0.$$

Enfin si $x = e_1^-, x = e_n^+$ puisqu'on a affaire à un cycle, et le raisonnement ci-dessus s'applique à nouveau.

On a donc établi que les espaces \star, \diamond sont orthogonaux.

Montrons qu'ils sont en somme directe. Pour cela, supposons que θ est à la fois orthogonal à \star et à \diamond . Puisque $\theta \in \star^\perp$ on a pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$\left\langle \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} c(e) \chi^e, \theta \right\rangle_r = \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}: e^- = x} c(e) \theta(e) r(e) = \text{div}_x(\theta) = 0,$$

i.e. θ vérifie partout la loi des noeuds.

Par ailleurs puisque $\theta \in \diamond^\perp$, on a pour tout cycle e_1, \dots, e_n ,

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \chi^{e_k}, \theta \right\rangle_r = \sum_{k=1}^n \theta(e_k) r(e_k) = 0,$$

de sorte que θ vérifie la loi des cycles.

Puisque θ vérifie loi des noeuds et loi des cycles il est issu d'un potentiel v (i.e. $\theta = dv$) et vérifie la loi d'Ohm. Comme il vérifie la loi des noeuds partout, ce potentiel v est harmonique sur \mathcal{V} entier, et donc constant, de sorte que $\theta = 0$.

On a donc démontré que $\star = \diamond^\perp$.

On notera que le courant unité $I^{a,Z}$ de a à Z vérifie partout la loi des cycles de sorte que $I^{a,Z} \in \diamond^\perp = \star$. Par ailleurs un tel courant vérifie la loi des noeuds en tout point $x \notin \{a\} \cup Z$, de sorte que $d^* I(x) = 0 \forall x \notin \{a\} \cup Z$.

Si $\theta \in \ell^2_{-}(\vec{\mathcal{E}})$ vérifie $d^* \theta = d^* I$, alors $d^*(\theta - I) = 0$, i.e. $\theta - I \in \star^\perp$, de sorte que $\theta = I + \theta - I$ est la décomposition orthogonale de θ sur $\star \oplus \diamond$.

On a donc

$$\|\theta\|_r^2 = \|I\|_r^2 + \|\theta - I\|_r^2,$$

de sorte que le courant unité minimise l'énergie des flots unité de a à Z .

Reste à voir que le courant unité $I^{a,Z}$ découle d'un potentiel $V^{a,Z}$, et que sans perte de généralité on peut supposer ce potentiel nul sur Z , de sorte qu'il vaut $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)$ en a . On a

$$\begin{aligned} \|I\|_r^2 = \langle I, dV \rangle_r &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} I(e)(V(e^-) - V(e^+)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mathcal{V}: (x,y) \in \vec{\mathcal{E}}} I(x,y)(V(x) - V(y)) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}} V(x) \sum_{y \in \mathcal{V}} I(x,y) \\ &= V(a) \operatorname{div}_a(I) = \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z). \end{aligned}$$

On en déduit la reformulation suivante du principe de Thomson

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) = \inf \{ \|\theta\|_r^2 : \theta \in \ell_-^2(\vec{\mathcal{E}}) d^* \theta(a) = d^* I^{a,Z} \}$$

et cet infimum est atteint pour $\theta = I^{a,Z}$.

Exercice 12 Montrer que si on identifie deux noeuds, alors la résistance effective entre a et z dans le nouveau graphe est inférieure à la résistance effective dans l'ancien.

Que se passe-t-il si on fait disparaître une arête existante entre deux points ?

Identifier les deux points revient exactement à choisir une conductance infinie entre ces deux points, en laissant les autres conductances inchangées. On conclut par le principe de Rayleigh.

A l'inverse, faire disparaître une arête revient à choisir une conductance nulle entre deux points. Le principe de Rayleigh s'applique à nouveau, mais cette fois pour démontrer que la résistance effective augmente.

Exercice 13 Retrouver la probabilité de ruine $\mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_N)$ (dans le cadre d'une marche simple non nécessairement symétrique) en utilisant l'analogie avec les circuits électriques.

Fixons $p \in (0, 1)$. Quitte à allouer la conductance c^i à l'arête $(i, i + 1)$, $i = 0, \dots, N$, on a pour $i \in \{1, \dots, N - 1\}$,

$$P(i, i + 1) = \frac{c^i}{c^i + c^{i+1}} = \frac{1}{1 + c},$$

et pourvu qu'on pose $c = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ on retrouve donc la marche simple qui effectue un pas vers la droite avec probabilité p , et un pas vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$.

Fixons alors $x \in \{1, \dots, N - 1\}$. Si $p = 1/2$, $c = 1$, et la résistance équivalente entre 0 et x est x , celle entre x et N est $N - x$, les conductances équivalentes sont donc $1/x, 1/(N - x)$ et on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_N < \tau_0) = \frac{\frac{1}{N-x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}} = \frac{x}{N}.$$

La résistance équivalente entre 0 et x est $\frac{1-c^k}{1-c} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\frac{q}{p}}$, celle entre x et N est égale à

$$c^k \frac{1-c^{N-k}}{1-c} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}}. \text{ On en déduit}$$

$$\mathbb{P}(\tau_N < \tau_0) = \frac{\frac{1-\frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}}{\frac{1-\frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N} + \frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Exercice 14 On considère un carré divisé en 3×3 cases ; et une marche aléatoire sur ces cases dont les pas sont tirés uniformément parmi les cases voisines ou diagonalement voisines. On note x la case en bas à gauche, y celle en haut à droite. Calculer $\mathbb{P}_x(\tau_y < \tau_x^+)$. Calculer $\mathbb{E}_x[\tau_y]$.

Indice : On pourra penser à utiliser l'équivalence triangle-étoile.

L'idée est tout d'abord d'identifier les points sur une même perpendiculaire à la diagonale de x à y puisque, par un argument de symétrie, ils doivent avoir le même potentiel.

Ensuite il s'agit d'utiliser l'équivalence triangle-étoile pour réduire le circuit pas à pas.

On obtient, après calculs, une résistance équivalente $\mathcal{R}(x \leftrightarrow y) = \frac{10}{13}$.

$$\mathbb{P}(\tau_y < \tau_x^+) = \frac{1}{3\mathcal{R}(x \leftrightarrow y)} = \frac{13}{30}.$$

Pour $\mathbb{E}_x[\tau_y]$ on se sert de la formule montrée dans l'exercice 5, qui assure que

$$\mathbb{E}_x[\tau_y] = \sum_{v \in \Omega} c(v)V(v),$$

où V est l'unique fonction harmonique telle que $V(x) = \mathcal{R}(x \leftrightarrow y)$, $V(y) = 0$. Trouver les valeurs de V revient a priori à résoudre un système linéaire à 7 équations et 7 inconnues, mais un argument de symétrie comme plus haut permet de se ramener à un système à 4 équations et 4 inconnues. Le système se résout facilement, on trouve que si les cases directement voisines de x sont à potentiel $3V(x)/5$, la case centrale et les deux coins sur la diagonale perpendiculaire sont à potentiel $V(x)/2$, enfin les cases directement voisines de y sont à potentiel $2V(x)/5$. On obtient

$$\mathbb{E}_x[\tau_y] = \mathcal{R}(x \leftrightarrow y) * \left(3 + (5 + 5) * \frac{3}{5} + (3 + 8 + 3) * \frac{1}{2} + (5 + 5) * \frac{2}{5} \right) = \frac{200}{13}.$$

Exercice 15 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe infini (dénombrable) équipé de conductances $(c(e), e \in \mathcal{E})$, vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} c(x,y) < \infty.$$

On considère par ailleurs $(\mathcal{G}_n), (\mathcal{H}_n)$ deux suites croissantes de sous-graphes finis de \mathcal{G} tels que pour tout n , $a \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{H}_n$, et $\bigcup \mathcal{G}_n = \bigcup \mathcal{H}_n = \mathcal{G}$. On note $Z_n = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n$, (resp.

$Y_n = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_n$), et on note \mathcal{G}_n^* (resp. \mathcal{H}_n^*) le graphe obtenu depuis \mathcal{G} en identifiant tous les

points de Z_n en un seul noeud z_n (resp. tous les points de Y_n en un seul noeud y_n). On note $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*)$ la résistance effective de a à z_n dans \mathcal{G}_n^* , (resp. $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$ la résistance effective de a à y_n dans \mathcal{H}_n^*).

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$$

existent dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ et qu'elles sont égales.

2. Montrer que la chaîne sur \mathcal{G} correspondant à ce modèle de conductances est récurrente si et seulement si cette limite commune est infinie.

1. D'après le principe de Rayleigh la suite $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*)_{n \geq 0}$ est croissante, et donc sa limite ℓ_1 existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. De même notons $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$.

Si $\ell_1 = +\infty$, fixons $A > 0$, il existe n_1 tel que $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*) \geq A$ pour tout $n \geq n_1$. Puisque la suite croissante (\mathcal{H}_n) est telle que $\bigcup \mathcal{H}_n = \mathcal{G}$, il existe n_2 tel que $\mathcal{H}_n \supset \mathcal{G}_{n_1}$ pour tout $n \geq n_2$. Mais alors, à nouveau par Rayleigh, pour tout $n \geq n_2$ on a

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*) \geq \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_{n_1}; \mathcal{G}_{n_1}^*) \geq A.$$

On en déduit dans ce cas que $\ell_2 = \ell_1 = +\infty$.

Sinon nos deux limites sont finies. Fixons alors $\varepsilon > 0$. Il existe n_1 tel que $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*) \geq \ell_1 - \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. Par le même raisonnement que plus haut, on peut trouver n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*) \geq \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_{n_1}; \mathcal{G}_{n_1}^*) \geq \ell - \varepsilon.$$

Comme le raisonnement est valable pour tout ε on conclut que $\ell_2 \geq \ell_1$. Par le raisonnement symétrique, $\ell_1 \geq \ell_2$, et on conclut que $\ell_1 = \ell_2$, comme souhaité. Dans la suite on note $\ell = \mathcal{R}(a \leftrightarrow \infty)$ cette limite commune.

2. D'après la question précédente on peut toujours choisir, sans affecter la limite

$$\mathcal{G}_n = \{y \in \mathcal{G} : d_{\mathcal{G}}(a, y) \leq n\} = B_{\mathcal{G}}(a, n),$$

la boule centrée en a , et de rayon n (avec \mathcal{G} muni de la distance de graphe $d_{\mathcal{G}}$).

Rappelons que

$$\mathbb{P}_a(\tau_{Z_n} < \tau_a^+) = \frac{1}{c(a)\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n)},$$

de sorte que

$$\mathbb{P}_a(\tau_{Z_n} < \tau_a^+) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ \frac{1}{c(a)\ell} & \text{sinon.} \end{cases},$$

en utilisant l'hypothèse que $c(a) < \infty$.

Sous \mathbb{P}_a , $\tau_{Z_n} \geq n$, et donc $\tau_{Z_n} \rightarrow \infty$ p.s. On en déduit que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_a(\tau_{Z_n} < \tau_a^+) = \mathbb{P}_a(\tau_a^+ = +\infty)$, ce qui permet de conclure, comme souhaité que

$$\mathbb{P}_a(\tau_a^+ < +\infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{R}(a \leftrightarrow \infty) = +\infty \\ 1 - \frac{1}{c(a)\ell} < 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 16 Utiliser l'inégalité de Nash-Williams pour montrer que la marche simple sur \mathbb{Z}^d , $d \leq 2$ est récurrente.

On peut choisir $a = 0 \in \mathbb{Z}^d$, et on peut choisir $c(e) = 1$ pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$.

On utilise les ensembles de coupure disjoints

$$\Pi_k := \{(x, y) \in \mathcal{E} : \|x\|_\infty = k, \|y\|_\infty = k + 1\},$$

et on remarque que $\sum_{e \in \Pi_k} c(e) = |\Pi_k| = 2d(2k + 1)^{d-1}$, $k \geq 1$. On a donc par Nash-Williams,

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow \infty) \geq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2d(2k + 1)^{d-1}}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}(a \leftrightarrow \infty) = +\infty$ pourvu que $d \leq 2$, ce qui d'après l'exercice précédent, assure que la marche simple sur \mathbb{Z}^d , $d = 1, 2$ est récurrente.

Exercice 17 On considère un arbre d -régulier enraciné, infini, et la marche λ -biaisée sur cet arbre, i.e. telle que en un noeud v donné, la probabilité de remonter vers la racine est égale à $\frac{\lambda}{\lambda+d}$, tandis que la probabilité d'aller vers l'un des descendants de v est égale à $\frac{1}{\lambda+d}$.

1. Interpréter le modèle en termes de circuit électrique. Calculer la résistance équivalente entre la racine et la profondeur n de l'arbre, en fonction de n, d, λ .
2. Pour quelles valeurs de d, λ cette résistance tend-elle vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$? Retrouver alors le critère de récurrence de la marche en fonction de d, λ .
3. Pour quel type d'arbre peut-on généraliser ce type de raisonnement?

1. On commence par remarquer que la marche λ -biaisée correspond à un modèle de conductance, où en chaque noeud de l'arbre, la conductance de l'arête qui mène à la racine est λ fois la conductance des autres arêtes. On peut donc par exemple poser $c(e) = \lambda^{-\ell}$ pour toute arête $e \in \mathcal{E}$ qui relie un noeud de profondeur ℓ à un noeud de profondeur $\ell + 1$ dans \mathcal{T} .

Lorsqu'on impose un potentiel $V_0 > 0$ à la racine et un potentiel 0 à tous les noeuds au delà de la profondeur n , on constate, par symétrie, que tous les noeuds situés à une profondeur donnée sont au même potentiel. On note $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n)$ la résistance équivalente entre la racine et les noeuds de profondeur n .

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on peut donc identifier en un seul noeud v_k tous les noeuds situés à la profondeur k . Le circuit résultant possède alors d^{k+1} arêtes en parallèle entre les noeud v_k et v_{k+1} , de même conductance λ^{-k} , ce qui est équivalent à une unique arête entre v_k et v_{k+1} de conductance $d^{k+1}\lambda^{-k}$.

On se retrouve donc avec n arêtes en parallèle entre v_0 (i.e. la racine) et v_n (i.e. les noeuds de profondeur n), et donc

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d^{k+1}\lambda^{-k}} = \begin{cases} \frac{1}{d} \frac{1 - (\frac{\lambda}{d})^n}{1 - \frac{\lambda}{d}} & \text{si } \lambda \neq d \\ \frac{n}{d} & \text{si } \lambda = d. \end{cases}$$

2. On en déduit que lorsque $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n) \rightarrow \infty$ ssi $\lambda \geq d$. D'après l'exercice 12, on en déduit que la marche λ -biaisée sur l'arbre d -régulier enraciné, infini est récurrente ssi $\lambda \geq d$.

3. Pour tout arbre dont le nombre de descendants d'un noeud donné ne dépend que de sa génération, on peut faire exactement le même raisonnement.

Si par exemple le nombre de descendants d'un individu de la génération k est noté d_k , alors le nombre d'arêtes entre v_k et v_{k+1} est égal à $d_0 d_1 \dots d_k$, et on trouve

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{\prod_{i=0}^k d_i}.$$

Lorsque cette somme diverge la marche est récurrente, sinon elle est transiente.

Exercice 18 Un professeur possède n parapluies, on suppose qu'initialement il y en a k chez lui et $n - k$ dans son bureau. Il se déplace matin et soir, et ne prend avec lui un parapluie que s'il pleut (et qu'il peut le faire). On suppose qu'indépendamment, à chaque déplacement, il pleut avec probabilité p .

1. Modéliser le problème par une chaîne de Markov réversible et calculer la distribution stationnaire. Asymptotiquement, quelle proportion des trajets le professeur effectue-t-il sous la pluie sans son parapluie ?
2. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que n parapluies se trouvent au même endroit.
3. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que le professeur se retrouve sous la pluie sans son parapluie.

On pose $q = 1 - p$ dans ce qui suit.

1. On peut par exemple noter 1 la maison et 2 le bureau, de sorte qu'on peut modéliser la situation par une chaîne de Markov à valeurs dans $\{(i, k), i \in \{1, 2\}, k \in \{0, \dots, n\}\}$. Par exemple l'état $(1, 4)$ signifie que le professeur se trouve chez lui avec 4 parapluies, et suivant qu'il pleut ou non le matin qui suit, l'état suivant de la chaîne sera $(2, n - 3)$ ou $(2, n - 4)$. Il est facile de voir que cette chaîne correspond au modèle de conductances suivant :

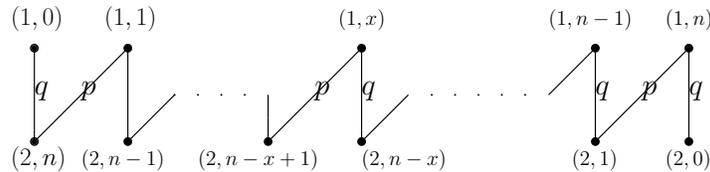


FIGURE 1. Le modèle de conductances

Sans perte de généralité on peut supposer que l'état initial de notre chaîne est $(1, x)$, pour un $x \in \{0, \dots, n\}$ (la chaîne issue de $(2, x)$ se comporte de manière similaire puisque les rôles des étiquettes 1 et 2 sont interchangeables).

La somme des conductances des arêtes incidentes en chaque état vaut 1, sauf pour les états $(1, 0)$, $(2, 0)$, pour lesquels cette somme vaut q . On en déduit donc

$$\pi(i, 0) = \frac{q}{2q + 2n}, i = 1, 2, \quad \pi(i, k) = \frac{1}{2q + 2n}, i = 1, 2, k = 1, \dots, n.$$

La proportion asymptotique du temps passé en les états $(1, 0)$ ou $(2, 0)$ (i.e. à un endroit sans parapluie) est donc

$$\pi(1, 0) + \pi(2, 0) = \frac{2q}{2q + 2n}.$$

Les trajets effectués sous la pluie sont nécessairement des trajets effectués depuis l'un de ces deux états. La proportion des trajets effectués depuis l'un de ces deux états sous la pluie est p , on conclut donc que la proportion asymptotique de trajets effectués par le professeur sous la pluie et sans son parapluie est $\frac{2pq}{2q+2n}$.

2. On va se servir des formules démontrées dans l'exercice 5. Commençons par trouver la résistance équivalente entre $a = (1, x)$ et $Z = (1, n) \cup (2, n) \cup (1, 0) \cup (2, 0)$ (de sorte que Z correspond exactement aux états de la chaîne pour lesquels tous les parapluies se trouvent au même endroit). On cherche donc $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)$. Avant même d'identifier les points de Z , on peut réduire le circuit en sommant les résistances en parallèle :

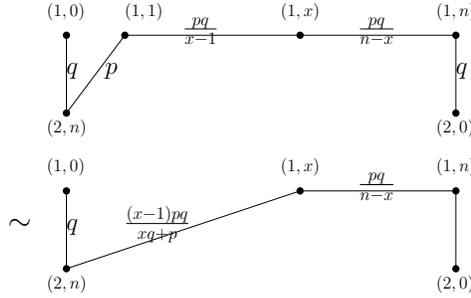


FIGURE 2. Circuits équivalents : les valeurs données sont les conductances

Les points de Z sont à même potentiel (nul), on peut les identifier. Ceci revient à sommer les deux conductances en parallèle entre a et Z pour obtenir

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) = \frac{1}{\frac{pq}{x-1+q} + \frac{pq}{n-x}} = \frac{(x-p)(n-x)}{pq(n-p)}.$$

On remarquera que lorsque $n \rightarrow \infty$, cette expression est maximale pour $x \sim n/2$ et alors $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) \sim \frac{n}{4pq}$.

Si on impose le potentiel $\mathcal{R} = \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z)$ au point $a = (1, x)$, et le potentiel nul sur Z , il est facile de voir que le potentiel V en chaque point doit vérifier, pour un certain W ,

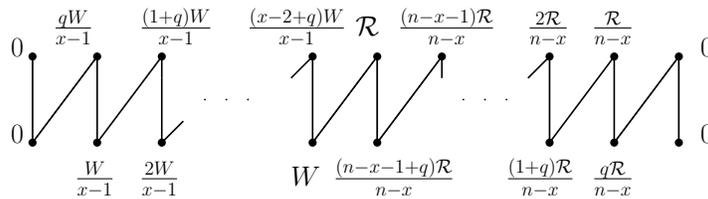


FIGURE 3. Le potentiel en chaque point lorsqu'il vaut \mathcal{R} en a et 0 sur Z .

Evidemment $W = 0$ si $x = 1$, mais si $x \geq 2$, on peut utiliser que V est harmonique au point $(2, n - x + 1)$ pour trouver

$$W = q\mathcal{R} + p\frac{x-2+q}{x-1}W.$$

de sorte que

$$W = \frac{q}{q + \frac{p^2}{x-1}}\mathcal{R} = \mathcal{R} - \frac{p^2\mathcal{R}}{q(x-1) + p^2}.$$

Reste à calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a[\tau_Z] &= \sum_{y \in \Omega} c(y)V(y) = \sum_{y \in \Omega} V(y) \\ &= \sum_{k=1}^{x-1} \frac{kW}{x-1} + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{(k+q)W}{x-1} + \sum_{k=1}^{n-x} \frac{k\mathcal{R}}{n-x} + \sum_{k=1}^{n-x} \frac{(k+q)\mathcal{R}}{n-x} \\ &= (x+q)W + (n-x+q)\mathcal{R} = \left(n + 2q - \frac{p^2}{q(x-1) + p^2} \right) \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut remarquer que l'expression ci-dessus atteint son maximum pour $x \sim n/2$, et on a alors $\mathbb{E}_a[\tau_Z] \sim \frac{n^2}{4pq}$.

3. Notons $f(x) := \mathbb{E}_{(1,x)}[\tau_Z]$ calculé à la question précédente, et \mathcal{T} le nombre de trajets avant le premier trajet sous la pluie sans parapluie. Evidemment $\mathcal{T} \geq \tau_Z$. En fait, en remarquant que \mathcal{T} a même loi sous $\mathbb{P}_{(1,n)}$ et sous $\mathbb{P}_{(2,n)}$, on constate que $\mathcal{T} - \tau_Z$ sous \mathbb{P}_a a même loi que \mathcal{T} sous $\mathbb{P}_{(2,n)}$.

Cependant, en utilisant Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(2,n)}(\mathcal{T}) &= 1 + pf(1) + q\mathbb{E}_{(1,0)}(\mathcal{T}) \\ &= 1 + pf(1) + qp + q^2(1 + \mathbb{E}_{(2,n)}(\mathcal{T})), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}_{(2,n)}(\mathcal{T}) = \frac{1}{1-q^2} (1 + pf(1) + q^2)$$

Finalement

$$\mathbb{E}_a[\mathcal{T}] = f(a) + \frac{1}{1-q^2} (1 + pf(1) + q^2).$$

En particulier, lorsque $n \rightarrow \infty$, et $x \sim n/2$ étant donné que $f(1) \sim \frac{n(1-p)}{pq} \ll f(x)$, on a également $\mathbb{E}_a[\mathcal{T}] \sim \frac{n^2}{4pq}$.

Exercice 19 (urnes de Pólya)

On considère une urne de Pólya contenant initialement d boules de couleur distinctes. Au temps $t - 1/2, t \geq 1$, on tire, indépendamment des étapes précédentes et uniformément, une boule de l'urne, on la replace dans l'urne et on y ajoute une boule de la même couleur. On note $X_t(j)$ le nombre de boules de la couleur j qui ont été tirées jusqu'au temps t .

1. Montrer que pour tout (n_1, \dots, n_d) tel que $n_1 + \dots + n_d = n$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = (n_1, \dots, n_d)) = \frac{\prod_{i=1}^d n_i!}{d(d+1)\dots(d+n-1)} \binom{n}{n_1, \dots, n_d} = \frac{(d-1)!n!}{(d+n-1)!}.$$

Comment cette formule se simplifie-t-elle lorsque $d = 2$?

2. En déduire que $\frac{X_t}{t}$ tend en loi vers une Dirichlet de paramètres $(1, \dots, 1)$ (i.e. de densité uniforme sur le simplexe $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d : x_1 + \dots + x_d = 1\}$).

1. Pour tout $t \geq 0$, au temps t il y a exactement $d + t$ boules dans l'urne. Sachant X_t , la probabilité de tirer une boule de couleur j au temps $t + 1/2$ vaut précisément $\frac{X_t(j)+1}{d+t}$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$. En notant qu'il y a $\binom{n}{n_1, \dots, n_d}$ façons de tirer n_1 boules de couleur 1, ..., n_d boules de couleur d lors des n premiers tirages, la formule de l'énoncé suit aisément.

Lorsque $d = 2$, on obtient donc $\mathbb{P}(X_t = (k, n - k)) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, de sorte que le nombre de boules de couleur 1 tirées jusqu'au temps n suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

2. D'après la question précédente la loi de X_n est uniforme sur $\{(n_1, \dots, n_d) : n_1 + \dots + n_d = n\}$. Il n'est alors pas difficile de montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable de densité uniforme sur $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d : x_1 + \dots + x_d = 1\}$.

Exercice 20 On suppose que \mathcal{G}_n est le pavé $n \times \dots \times n$ de \mathbb{Z}^d . Précisément, les noeuds de \mathcal{G}_n sont $\mathcal{V}_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall i \in \{1, \dots, d\} 1 \leq x_i \leq n\}$ et les arêtes \mathcal{E}_n de \mathcal{G}_n sont entre les noeuds de \mathcal{V}_n qui sont plus proches voisins dans \mathbb{Z}^d .

On munit les arêtes de \mathcal{E}_n de conductances toutes égales à 1, et on note $a = (1, \dots, 1), z = (n, \dots, n)$.

1. On considère $\Pi_k = \{(v, w) \in \mathcal{E}_n : \|v\|_\infty = k, \|w\|_\infty = k + 1\}, k = 1, \dots, n - 1$. Montrer que pour tout $k = 1, \dots, n - 1$, Π_k est un ensemble de coupure, et que

$$\sum_{e \in \Pi_k} c(e) = |\Pi_k| = dk^{d-1}.$$

En déduire que

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \geq \begin{cases} n - 1 & \text{si } d = 1 \\ \frac{1}{2} \log(n - 1) & \text{si } d = 2 \\ C_d := \frac{1}{d} \sum_{k \geq 1} k^{1-d} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$

2. Soit une urne de Pólya, avec initialement une boule de chaque couleur $1, \dots, d$. On introduit comme dans l'exercice précédent le processus $(X_t, t \geq 0)$, et on note $\tilde{X}_t = X_t + (1, \dots, 1)$ de sorte que $\tilde{X}_t(i)$ est le nombre de boules de couleur i dans l'urne au temps t . On introduit alors le courant I de a vers z , d'intensité 1. Sur les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i \leq n + d\}$ on définit

$$I(x, y) = \mathbb{P}(\exists t \in \{0, \dots, n - 1\} : \tilde{X}_t = i, \tilde{X}_{t+1} = j),$$

et pour les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i > n + d\}$ on définit

$$I(x, y) = I((n + 1, \dots, n + 1) - y, (n + 1, \dots, n + 1) - x).$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer que pour tout $y \in B_n$ tel que $\sum_{i=1}^d y_i = k + d$, le courant entrant en y

$$\sum_{\{x: \sum_{i=1}^d x_i = k+d-1, x \sim y\}} I(x, y) = \frac{1}{\binom{k+d-1}{d-1}}.$$

En déduire que l'énergie $E(I)$ de ce courant vérifie

$$E(I) \leq \begin{cases} n & \text{si } d = 1 \\ 2 \log(n) & \text{si } d = 2. \\ 2 (d-1)! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{d-1}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de d a-t-on $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$? Pour quelle(s) valeur(s) de d cette résistance effective tend-elle vers une limite finie lorsque $n \rightarrow \infty$?
4. Comment utiliser ces arguments pour démontrer que la marche sur \mathbb{Z}^d est récurrente si $d \leq 2$ et transiente si $d \geq 3$?

1. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ fixé. Un noeud de \mathcal{G}_n de norme infinie $k+1$ ne peut être relié à un noeud de \mathcal{G}_n de norme infinie k que par une unique arête (le long de son unique coordonnée égale à $k+1$). Comme un tel noeud possède exactement une de ses coordonnées égale à $k+1$, les autres coordonnées étant comprises entre 1 et k , il y a exactement dk^{d-1} tels noeuds, et donc dk^{d-1} éléments de Π_k .

Par Nash-Williams,

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sum_{e \in \Pi_k} c(e)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{dk^{d-1}},$$

ce qui conduit aux inégalités souhaitées.

2. Notons $S_k = \{x \in \mathcal{G}_n : \sum_{i=1}^d x_i = k\}$ (i.e. l'intersection de la sphère de norme 1 avec les noeuds de \mathcal{G}_n). On remarque alors que pour $d \leq k \leq n+d$, le courant total incident dans S_k est 1, et qu'il est uniformément réparti en les noeuds de S_k . Comme S_k compte précisément $\binom{k+d-1}{d-1}$ noeuds, on déduit que si $k \geq 2$ et $e^+ \in S_k$, alors

$$I(e) \leq \frac{k!(d-1)!}{(k+d-1)!} \leq \frac{(d-1)!}{k^{d-1}}$$

D'après la définition de $E(I)$, et comme les arêtes sont toutes de conductance 1, on déduit que

$$E(I) \leq 2 \sum_{k=2}^n \frac{(d-1)!}{k^{d-1}},$$

ce qui conduit aux inégalités souhaitées. Comme $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$ minimise les énergies des courants d'intensité 1 entre a et z , on conclut qu'on a les mêmes bornes pour $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$.

3. On a donc $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \rightarrow \infty$ ssi $d \leq 2$.

4. Une légère modification du raisonnement de la première question (en remplaçant \mathcal{G}_n par la boule de rayon n pour la norme infinie dans \mathbb{Z}^d) permet d'assurer que $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \infty) = +\infty$ lorsque $d = 1, 2$, ce qui permet d'assurer que la marche simple sur \mathbb{Z}^d , $d = 1, 2$ est récurrente.

Une légère modification de l'argument de la deuxième question (quitte à répartir le courant d'intensité 1 de façon équitable entre les $2d$ cadrans, et à considérer le courant entre 0 et la sphère de rayon n pour la norme 1) permet quant à lui de démontrer que $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \infty)$ reste bornée pour tout $d \geq 3$, de sorte que la marche simple est transiente lorsque $d \geq 3$.