Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange

Exercices 5

1 Temps d'atteinte

Pour X une chaîne de Markov irréductible sur Ω, et $a \in \Omega$ on note

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}, \quad \tau_a^+ := \inf\{t > 0 : X_t = a\}.$$

Exercice 1 Montrer que $a \to h(a) = \mathbb{E}_a \left[\sum_{x\in\Omega} \tau_x \pi(x)\right]$ est P-harmonique sur Ω et ne dépend donc pas de a.

Exercice 2 On suppose que la chaîne X de noyau P est irréductible, apériodique. Pour $a, b \in \Omega$ on note $Z_{ab} = \sum_{t\geq 0} \left(P^t(a,b) - \pi(b)\right)$.

1. Montrer que pour tous $a, b \in \Omega$, Z_{ab} est bien définie. Que vaut $\sum_{b\in\Omega} Z_{ab}$?
2. On fixe $t_0 \in \mathbb{N}$ et on pose $S = \inf\{t \geq t_0 : X_t = a\}$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbb{1}_{\{X_s = x\}}\right] = \pi(x)\mathbb{E}_a[S].$$

   En déduire, en faisant tendre t_0 vers l'infini, que

$$Z_{aa} = \pi(a)\mathbb{E}_\pi[\tau_a].$$

3. On fixe à nouveau $t_0 \in \mathbb{N}$, et on pose $T = \inf\{t \geq \tau_b + t_0 : X_t = a\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{\tau_b - 1} \mathbb{1}_{\{X_s = a\}}\right] + \sum_{s=0}^{t_0-1} P^t(b,a) = \pi(a)\mathbb{E}_a[T].$$

   En déduire que

$$\pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]) + Z_{ba} = \pi(a)\left[\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_\pi[\tau_a]\right],$$

   et enfin que

$$Z_{aa} - Z_{ba} = \pi(a)\mathbb{E}_b[\tau_a]$$

4. Expliquer pourquoi la formule de la question précédente permet de redémontrer le résultat du premier exercice.

Exercice 3 On suppose que X est la marche simple sur un graphe $\mathcal{G}$ connexe, avec $|\mathcal{V}| \geq 3$, et que v possède un unique voisin w. Que vaut $\mathbb{E}_v[\tau_w]$? Exprimer alors $\mathbb{E}_w[\tau_v]$ en fonction de $|\mathcal{E}|$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{T}$ l'arbre binaire de profondeur k, X la marche simple sur $\mathcal{T}$. Que vaut t_{hit} (on pourra commencer par montrer qu'il vaut $\mathbb{E}_x[\tau_y]$ lorsque x et y sont deux feuilles de l'arbre dont le seul ancêtre commun est la racine) ?

Exercice 5 Montrer que si X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0,1\}^d$, alors quelque soit $v \neq \mathbf{0} = (0,0,...,0)$, on a

$$\mathbb{E}_v[\tau_{\mathbf{0}}] \sim_{d\to\infty} 2^{d+1}.$$

Il pourra être utile de considérer le problème équivalent pour l'urne d'Ehrenfest.

Exercice 6 Montrer que si X est une chaîne réversible

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_a] = \frac{c_{\mathcal{G}}}{2}\left(\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c) + \mathcal{R}(c \leftrightarrow a)\right).$$

Cette égalité généralise celle obtenue pour le temps de trajet aller-retour à un temps de trajet faisant intervenir 3 points. Comment se généralise-t-elle à un temps de trajet faisant intervenir n points ?

Exercice 7 Soient X une chaîne réversible et $x, a, b \in \Omega$, distincts.

1. On suppose la chaîne issue de x et on note $\tau_{ab} := \inf\{t \geq \tau_a : X_t = b\}$ Montrer que,

$$\tau_{ab} = \tau_b + \mathbb{1}_{\{\tau_b < \tau_a\}}\tau'_{ab},$$

   où τ'_{ab} est indépendant de $\mathbb{1}_{\{\tau_b<\tau_a\}}$ et a la loi de τ_{ab} sous $\mathbb{P}_b$.

2. En déduire que

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}.$$

Exercice 8 Soit $\tau_x^{\#} := \inf\{t \geq 0 : t \text{ pair }, X_t = x\}$ le premier temps *pair* d'atteinte de $x \in \Omega$ par une chaîne X réversible.

1. Montrer que la chaîne de noyau P^2 reste irréductible, apériodique, de distribution stationnaire π.
2. On définit $\tau_x^{\#,(0)} = 0$ et pour $m \geq 1$, $\tau_x^{\#,(2m)} := \inf\{t \geq 2m : t \text{ pair }, X_t = x\}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(P^{(2k)}(x,x) - \pi(x)\right) = \pi(x)\mathbb{E}_{P^{2m}(x,\cdot)}\left[\tau_x^{\#}/2\right],$$

   et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(P^{(2k)}(x,x) - \pi(x)\right) = \pi(x)\frac{1}{2}\mathbb{E}_\pi[\tau_x^{\#}].$$

3. En reprenant la preuve du résultat correspondant pour une chaîne paresseuse (et le résultat de l'exercice 15), montrer finalement que
$$t_{\text{mix}} \leq 4 \max_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi[\tau_x^{\#}] + 1.$$

2 Chaînes transitives

On dit que la chaîne X de noyau P sur Ω est transitive ssi pour toute paire $(x, y) \in \Omega$ il existe une bijection $\phi_{(x,y)} : \Omega \to \Omega$ telle que
$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \qquad \forall u, v \in \Omega \;\; P(u, v) = P(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

Exercice 9 Montrer qu'une marche sur un groupe est une chaîne transitive.

Exercice 10 Montrer que si X est une chaîne transitive et irréductible sur Ω fini, son unique distribution stationnaire est la distribution uniforme sur Ω.

Exercice 11 Montrer que si X est irréductible, transitive sur Ω fini, $||P^t(x, \cdot) - \pi||_{\text{TV}}$ ne dépend pas de x.

Exercice 12 Montrer que si X est irréductible et transitive, de noyau P, la chaîne retournée dans le temps $\widehat{X}$ est également irréductible et transitive. Montrer alors que si π est la mesure uniforme sur Ω,
$$||P^t(x, \cdot) - \pi||_{\text{TV}} = ||\widehat{P}^t(x, \cdot) - \pi||_{\text{TV}}.$$

Exercice 13 Montrer que pour une chaîne X irréductible et transitive sur Ω fini on a quelque soit $b \in \Omega$,
$$t_\odot = \mathbb{E}_\pi[\tau_b].$$
En déduire que pour une telle chaîne $t_{\text{hit}} \leq 2t_\odot$.

Exercice 14 On pourra faire appel aux résultat démontrés dans l'exercice 6.
On suppose que le réseau conductances $\mathcal{G}, (c(e), e \in \mathcal{E})$ est transitif, i.e. pour toute paire $(x, y) \in \mathcal{V}$ il existe une bijection $\psi_{(x,y)} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ telle que
$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \qquad \forall u, v \in \mathcal{V} \;\; c(u, v) = c(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

1. Montrer que la chaîne correspondante est transitive.
2. Soient $a, b \in \mathcal{V}$ fixés, $\psi = \psi_{(a,b)}$ la permutation des noeuds de $\mathcal{V}$ associée.
   On note $a_0 = a, a_1 = \psi(a) = b, ...a_k = \psi(a_{k-1}), ..., a_n = a$ l'orbite de a pour la permutation ψ.
   Montrer que pour une telle chaîne
$$n\mathbb{E}_a[\tau_b] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i+1}}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i-1}}] = n\mathbb{E}_b[\tau_a].$$
3. En déduire, pour une telle chaîne avec $\mathcal{V}$ fini, l'expression de $\mathbb{E}_a[\tau_b]$ en fonction de $c_\mathcal{G}$ et $\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$, puis en fonction de $\mathbb{P}_a(\tau_b < \tau_a^+)$ et $|\Omega|$.

3 Valeurs propres de P

Exercice 15 A l'aide de la décomposition spectrale de P^t, où P est le noyau d'une chaîne irréductible et réversible, montrer que $t \to P^{2t}(x,x)$ décroît.
Si de plus la chaîne est paresseuse, montrer de manière similaire que $t \to P^t(x,x)$ décroît.

Exercice 16 Soit X une chaîne irréductible, apériodique et réversible, de distribution stationnaire π. On suppose que les $(f_i)_{i=1}^{|\Omega|}$ constituent une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ de fonctions propres pour P associées aux $(\lambda_i)_{i=1}^{|\Omega|}$. On suppose que $\lambda_1 = 1$, que $W \sim \pi$, et que $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[f(W)] = \langle f, f_1 \rangle_\pi$.
2. Que vaut $\mathbb{E}[f_j(W)]$, pour $j = 1, ..., |\Omega|$?
3. Pour $t \geq 0$, que vaut $\mathbb{E}[P_t f(W)]$?
4. Calculer $\text{Var}[P^t f(W)]$ en fonction des $\text{Var}(f_j(W)), j = 1, ..., |\Omega|$. En déduire que
$$\text{Var}[P^t f(W)] \leq (1 - \gamma^*)^{2t} \text{Var}[f(W)].$$

Exercice 17 Soit X une chaîne transitive et réversible sur Ω avec $|\Omega| = n$. On note $\lambda = 1 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > -1$ les valeurs propres de P. Montrer que si W suit la loi stationnaire π, on a
$$\mathbb{E}\left[\left\| \frac{P^t(W, \cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{\ell_2(\pi)}^2 \right] = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^{2t}.$$

Exercice 18 Soit $X_1, ..., X_d$ des chaînes de Markov irréductibles, de noyaux respectifs $P_1, ..., P_d$ sur les espaces respectifs $\Omega_1, ...\Omega_d$. Si w est une distribution sur $\{1, ..., d\}$ on considère alors X la chaîne produit de noyau P sur $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_d$:
$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}}$$

1. Montrer que si $\lambda^{(j)}$ est v.p. de P_j associée à la fonction propre $f^{(j)}$, alors si on définit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \prod_{j=1}^{d} f^{(j)}(x_j)$ est une fonction propre de P associée à la valeur propre $\lambda = \sum_{j=1}^{d} w_j \lambda^{(j)}$.
2. Montrer que si γ_j est le trou spectral de X_j alors celui de X vérifie $\gamma = \min_{j=1,...,d} w_j \gamma_j$.
3. Calculer les valeurs propres lorsque X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0, 1\}^d$. En déduire le trou spectral absolu de cette chaîne.