Ecole Normale Supérieure

2017

Temps de mélange

Exercices 5

1 Temps d'atteinte

Pour X une chaîne de Markov irréductible sur Ω, et $a \in \Omega$ on note

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}, \quad \tau_a^+ := \inf\{t > 0 : X_t = a\}.$$

Exercice 1 Montrer que $a \to h(a) = \mathbb{E}_a\left[\sum_{x\in\Omega} \tau_x \pi(x)\right]$ est P-harmonique sur Ω et ne dépend donc pas de a.

Soit $a \in \Omega$, on a, en utilisant Markov au temps 1, si $x \neq a$,

$$\sum_{y\in\Omega} P(a,y)\mathbb{E}_y\left[\tau_x \pi(x)\right] = \pi(x)\mathbb{E}_a\left[\tau_x\right] - \pi(x).$$

Par ailleurs

$$\sum_{y\in\Omega} P(a,y)\mathbb{E}_y\left[\tau_a \pi(a)\right] = \pi(a)\mathbb{E}_a[\tau_a^+ - 1] = 1 - \pi(a).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} Ph(a) &= \sum_{y\in\Omega} P(a,y)h(y) \\ &= \sum_{x\neq a} \pi(x)\left(\mathbb{E}_a[\tau_x] - 1\right) + 1 - \pi(a) \\ &= \mathbb{E}_a\left[\sum_{x\neq a} \tau_x \pi(x)\right] = h(a), \end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 2 On suppose que la chaîne X de noyau P est irréductible, apériodique. Pour $a, b \in \Omega$ on note $Z_{ab} = \sum_{t\geq 0}\left(P^t(a,b) - \pi(b)\right)$.

1. Montrer que pour tous $a, b \in \Omega$, Z_{ab} est bien définie. Que vaut $\sum_{b\in\Omega} Z_{ab}$?
2. On fixe $t_0 \in \mathbb{N}$ et on pose $S = \inf\{t \geq t_0 : X_t = a\}$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_a\left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbb{1}_{\{X_s = x\}}\right] = \pi(x)\mathbb{E}_a[S].$$

En déduire, en faisant tendre t_0 vers l'infini, que

$$Z_{aa} = \pi(a)\mathbb{E}_\pi[\tau_a].$$

3. On fixe à nouveau $t_0 \in \mathbb{N}$, et on pose $T = \inf\{t \geq \tau_b + t_0 : X_t = a\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{\tau_b - 1} \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \right] + \sum_{s=0}^{t_0 - 1} P^t(b, a) = \pi(a) \mathbb{E}_a[T].$$

En déduire que

$$\pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]) + Z_{ba} = \pi(a) \left[\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_\pi[\tau_a] \right],$$

et enfin que

$$Z_{aa} - Z_{ba} = \pi(a) \mathbb{E}_b[\tau_a]$$

4. Expliquer pourquoi la formule de la question précédente permet de redémontrer le résultat du premier exercice.

1. La chaîne étant irréductible et apériodique, le théorème de convergence s'applique et donc pour des constantes $\alpha \in (0,1), C > 0$ on a $\max_{a,b} |P^t(a,b) - \pi(b)| \leq C\alpha^t$. La série de terme général $P^t(a,b) - \pi(b)$ est donc normalement convergente et Z_{ab} est bien définie. De plus

$$\sum_{b \in \Omega} Z_{ab} = \sum_{t \geq 0} \sum_{b \in \Omega} P^t(a,b) - \pi(b) = 0.$$

2. Le temps d'arrêt S est tel que $X_S = a$ et donc $x \to \mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbb{1}_{\{X_s = x\}} \right]$ est une mesure invariante. Elle est donc proportionnelle à π, et comme sa masse totale vaut $\mathbb{E}_a[S]$ on a bien

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbb{1}_{\{X_s = x\}} \right] = \pi(x) \mathbb{E}_a[S], \ \forall x \in \Omega.$$

Lorsque $x = a$,

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \right] = \mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{t_0 - 1} \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \right] = \sum_{t=0}^{t_0 - 1} P^t(a,a),$$

et comme par Markov en t_0, $\mathbb{E}_a[S] = t_0 + \mathbb{E}_{P^{t_0}(a,\cdot)}[\tau_a]$, on déduit que

$$\sum_{t=0}^{t_0 - 1} (P^t(a,a) - \pi(a)) = \pi(a) \mathbb{E}_{P^{t_0}(a,\cdot)}[\tau_a].$$

Lorsque $t_0 \to \infty$, le théorème de convergence assure que $P^{t_0} \to \pi$ de sorte que

$$Z_{aa} = \pi(a) \mathbb{E}_\pi[\tau_a]$$

comme souhaité.

3. A nouveau le temps d'arrêt T est tel que $X_T = a$ et donc pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_s = x\}} \right] = \mathbb{E}_a[T] \pi(x).$$

Lorsque $x = a$, on obtient, en utilisant Markov au temps τ_b, et le fait qu'il n'y a pas de visite en a pour $t_0 \leq t \leq T-1$,

$$\mathbb{E}_a\left[\sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\right] = \mathbb{E}_a\left[\sum_{s=0}^{\tau_b-1} \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\right] + \mathbb{E}_b\left[\sum_{s=0}^{t_0-1} \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\right],$$

et on en déduit l'égalité souhaitée.
Par ailleurs, par Markov en $\tau_b + t_0$, $\mathbb{E}_a[T] = \mathbb{E}_a[\tau_b] + t_0 + \mathbb{E}_{P^{t_0}(b,\cdot)}[\tau_a]$. Enfin, si $\tau_{ba} = \inf\{t \geq \tau_b : X_t = a\}$. Comme précédemment

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a\left[\sum_{s=0}^{\tau_b-1} \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\right] &= \mathbb{E}_a\left[\sum_{s=0}^{\tau_{ab}-1} \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\right] \\ &= \pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_{ba}]) = \pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]) + \sum_{s=0}^{t_0-1}(P^s(b,a) - \pi(b)) = \pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_{P^{t_0}(b,\cdot)}[\tau_a]),$$

et en faisant tendre $t_0 \to \infty$, et en utilisant la question précédente, on obtient bien

$$Z_{aa} - Z_{ba} = \pi(a)\mathbb{E}_b[\tau_a].$$

4. On a donc, en utilisant les questions précédentes,

$$\sum_{x\in\Omega} \pi(x)\mathbb{E}_b[\tau_x] = \sum_{x\in\Omega} Z_{xx} - Z_{bx} = \sum_{x\in\Omega} Z_{xx},$$

qui ne dépend pas de b.

Exercice 3 On suppose que X est la marche simple sur un graphe $\mathcal{G}$ connexe, avec $|\mathcal{V}| \geq 3$, et que v possède un unique voisin w. Que vaut $\mathbb{E}_v[\tau_w]$? Exprimer alors $\mathbb{E}_w[\tau_v]$ en fonction de $|\mathcal{E}|$.
On a évidemment $\mathbb{E}_v[\tau_w] = 1$. Notons qu'on peut choisir $c(e) = 1, e \in \mathcal{E}$ dans le modèle de conductances correspondant à la marche simple sur $\mathcal{G}$. On a donc $c_{\mathcal{G}} = 2|\mathcal{E}|$, et $\mathcal{R}(v \leftrightarrow w) = 1$. On en déduit $\mathbb{E}_v[\tau_w] + \mathbb{E}_w[\tau_v] = 2|\mathcal{E}|$ et donc

$$\mathbb{E}_w[\tau_v] = 2|\mathcal{E}| - 1.$$

Exercice 4 Soit $\mathcal{T}$ l'arbre binaire de profondeur k, X la marche simple sur $\mathcal{T}$. Que vaut t_{hit} (on pourra commencer par montrer qu'il vaut $\mathbb{E}_x[\tau_y]$ lorsque x et y sont deux feuilles de l'arbre dont le seul ancêtre commun est la racine) ?
La marche simple correspond à un réseau de conductances $c(e) = 1, \ \forall e \in \mathcal{E}$. On constate alors que la résistance équivalente entre deux noeuds est la distance de graphe entre ces deux noeuds. Elle est maximale, et égale à $2k$, lorsque ces deux noeuds, disons x, y sont des feuilles dont le seul ancêtre commun est la racine. Dans ce cas il est évident par symétrie que

$$\mathbb{E}_x[\tau_y] = \mathbb{E}_y[\tau_x],$$

et donc
$$\mathbb{E}_x[\tau_y] = \frac{1}{2}2kc_{\mathcal{T}} = k \times (2^{k+2} - 4) = 2k(n-1),$$
si $n = |\mathcal{V}| = 2^{k+1} - 1$.

Exercice 5 Montrer que si X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0,1\}^d$, alors quelque soit $v \neq \mathbf{0} = (0,0,...,0)$, on a
$$\mathbb{E}_v[\tau_{\mathbf{0}}] \sim_{d\to\infty} 2^{d+1}.$$

Il pourra être utile de considérer le problème équivalent pour l'urne d'Ehrenfest.
Pour $x \in \{0,1\}^d$, on note $|x| = \sum_{i=1}^d x_i$. Rappelons qu'alors $(Y_t = |X_t|, t \geq 0)$ correspond au modèle d'Ehrenfest de noyau Q tel que
$$Q(i,i+1) = \frac{d-i}{2d}, \quad Q(i,i-1) = \frac{i}{2d},$$
et de distribution stationnaire
$$\lambda(k) = \frac{1}{2^d} \sum_{x\in\{0,1\}^d : |x|=k} = \frac{\binom{d}{k}}{2^d}, \quad k \in \{0,...,d\},$$

La chaîne X correspond à un modèle de conductances avec $c_{\mathcal{G}} = 1$, (et distribution stationnaire uniforme). La chaîne Y correspond quant à elle à
$$\mathcal{V} = \{0,...,n\}, \mathcal{E} = \{\{k,k+1\}, k \in \{0,...,d-1\}\},$$
$$c(k,k+1) = \frac{\binom{d}{k}}{2^d}\frac{d-k}{2d} = \frac{(d-1)!}{k!(d-k-1)!2^{d+1}}, k \in \{0,...,d-1\}$$

La résistance équivalente (pour Y) entre 0 et d est donc
$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow d) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{2^{d+1}}{\binom{d-1}{k}} \sim_{d\to\infty} 2^{d+2}$$

Par symétrie, pour la chaîne Y,
$$\mathbb{E}_d[\tau_0] = \frac{c_{\mathcal{G}}}{2}\mathcal{R}(0 \to d) = \frac{1}{2}2^{d+2} = 2^{d+1},$$

et donc $\mathbb{E}_{(1,1...,1)}[\tau_{\mathbf{0}}] = 2^{d+1}$, comme souhaité.
Comme $k \to \mathbb{E}_k[\tau_0]$ croît, il reste à calculer $\mathbb{E}_1[\tau_0]$. Pour tout $x \in \{0,1\}^d$ tel que $|x| = 1$ ceci vaut précisément $\mathbb{E}_x[\tau_{\mathbf{0}}]$ (qui, par symétrie, ne dépend pas du choix d'un tel x). Cependant pour un tel x,
$$2^d = \frac{1}{\pi(\mathbf{0})} = \mathbb{E}_0[\tau_0+] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x[\tau_{\mathbf{0}}]$$
de sorte que
$$\mathbb{E}_x[\tau_{\mathbf{0}}] = 2(2^d - \frac{1}{2}) = 2^{d+1} - 1 \sim 2^{d+1},$$
comme souhaité.

Exercice 6 Montrer que si X est une chaîne réversible

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_a] = \frac{c_{\mathcal{G}}}{2}\left(\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c) + \mathcal{R}(c \leftrightarrow a)\right).$$

Cette égalité généralise celle obtenue pour le temps de trajet aller-retour à un temps de trajet faisant intervenir 3 points. Comment se généralise-t-elle à un temps de trajet faisant intervenir n points ?

On note $\tau_{x_1\ldots x_k}$ le premier temps auquel la chaîne est passée en x_1 puis x_2,... puis x_k. Comme la chaîne est réversible on a que sous $\mathbb{P}_\pi$, X et $\widehat{X}$ ont même loi, et donc $\mathbb{E}_\pi[\tau_{abca}] = \mathbb{E}_\pi[\tau_{acba}]$ de sorte que

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_a] = \mathbb{E}_a[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]$$

Quand on somme ces deux quantités on obtient grâce à l'identité pour les temps moyens de trajet aller-retour,

$$2\left(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_a]\right) = c_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c) + \mathcal{R}(c \leftrightarrow a)\right).$$

Exactement la même preuve permet d'assurer que

$$2\left(\mathbb{E}_{a_1}[a_2] + \ldots + \mathbb{E}_{a_n[a_1]}\right) = c_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{R}(a_n \leftrightarrow a_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{R}(a_i \leftrightarrow a_{i+1})\right).$$

Exercice 7 Soient X une chaîne réversible et $x, a, b \in \Omega$, distincts.

1. On suppose la chaîne issue de x et on note $\tau_{ab} := \inf\{t \geq \tau_a : X_t = b\}$ Montrer que,
$$\tau_{ab} = \tau_b + \mathbb{1}_{\{\tau_b < \tau_a\}}\tau'_{ab},$$
où τ'_{ab} est indépendant de $\mathbb{1}_{\{\tau_b<\tau_a\}}$ et a la loi de τ_{ab} sous $\mathbb{P}_b$.
2. En déduire que
$$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}.$$

1. Il s'agit de remarquer que pour accomplir τ_{ab}, sur $\{\tau_a < \tau_b\}$ on a $\tau_{ab} = \tau_b$ tandis que sur $\{\tau_a < \tau_b\}$, au temps τ_b il reste à la chaîne à passer par a puis par b, et donc dans ce cas par Markov en τ_b on a bien la formule souhaitée.
2. En prenant les espérances il vient
$$\mathbb{E}_x[\tau_{ab}] = \mathbb{E}_x[\tau_b] + \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a)\mathbb{E}_b[\tau_{ab}].$$
Par l'exercice 6,
$$\mathbb{E}_x[\tau_a] + \mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_x] = \frac{c_{\mathcal{G}}}{2}\left(\mathcal{R}(x \leftrightarrow a) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow x)\right);$$
et par l'égalité du temps moyen de trajet aller-retour,
$$\mathbb{E}_b[\tau_x] + \mathbb{E}_x[\tau_b] = c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(b \leftrightarrow x), \qquad \mathbb{E}_b[\tau_a b] = c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow b).$$
En réarrangeant les termes il vient finalement que
$$\frac{c_{\mathcal{G}}}{2}\left(\mathcal{R}(x \leftrightarrow a) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b) - \mathcal{R}(b \leftrightarrow x)\right) = \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a)c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow b),$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 8 Soit $\tau_x^\# := \inf\{t \geq 0 : t \text{ pair }, X_t = x\}$ le premier temps *pair* d'atteinte de $x \in \Omega$ par une chaîne X réversible.

1. Montrer que la chaîne de noyau P^2 reste irréductible, apériodique, de distribution stationnaire π.
2. On définit $\tau_x^{\#,(0)} = 0$ et pour $m \geq 1$, $\tau_x^{\#,(2m)} := \inf\{t \geq 2m : t \text{ pair }, X_t = x\}$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(P^{(2k)}(x,x) - \pi(x)\right) = \pi(x)\mathbb{E}_{P^{2m}(x,\cdot)}\left[\tau_x^\#/2\right],$$
et en déduire que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(P^{(2k)}(x,x) - \pi(x)\right) = \pi(x)\frac{1}{2}\mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#].$$
3. En reprenant la preuve du résultat correspondant pour une chaîne paresseuse (et le résultat de l'exercice 15), montrer finalement que
$$t_{\text{mix}} \leq 4 \max_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#] + 1.$$

1. Puisque la chaîne initiale est irréductible apériodique il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq r$, pour tous $x, y \in \Omega$, $P^k(x,y) > 0$. On a donc $P^{2k}(x,y) > 0$ pour tout $k \geq r$ et pour tous $x, y \in \Omega$ ce qui assure que la chaîne de noyau P^2 est également irréductible, apériodique. Par ailleurs $\pi P^2 = \pi P = \pi$ et donc π est l'unique mesure stationnaire de la chaîne de noyau P^2. Notons en particulier que cette chaîne vérifie donc le thórème de convergence.
2. Le temps d'arrêt $\tau_x^{\#,(2m)}$ vérifie $X_{\tau_x^{\#,(2m)}} = x$, et donc par l'argument habituel, mais pour la chaîne de noyau P^2,
$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{t=0}^{\tau_x^{\#,(2m)}/2-1} \mathbb{1}_{\{X_{2t}=y\}}\right] = \pi(y)\mathbb{E}_x[\tau_x^{\#,(2m)}/2].$$
¨ Pour $y = x$, on obtient
$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{t=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{X_{2t}=y\}}\right] = \pi(x)\left(m + \mathbb{E}_{P^{2m}(x,\cdot)}[\tau_x^\#]/2\right),$$
ce qui conduit à l'égalité souhaitée.
3. En faisant tendre m vers l'infini, et en utilisant le théorème de convergence pour la chaîne de noyau P^2, on obtient bien le résultat souhaité.
4. Puisque $k \to P^{2k}(x,x)$ décroît (cf exercice 16 ci-dessous), on a
$$\begin{aligned}\pi(x)\frac{\mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#]}{2} &\geq \sum_{k=0}^{m-1} P^{2k}(x,x) - \pi(x)\\ &\geq m(P^{2m}(x,x) - \pi(x))\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#]}{8m} &\geq \frac{1}{4}\frac{P^{2m}(x,x)}{\pi(x)} - 1 \\
&\geq ||P^{2m}(x,\cdot) - \pi||_{\mathrm{TV}}^2,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à $||P^{2m}(x,\cdot) - \pi||_{\mathrm{TV}}^2 \leq \frac{1}{16}$ pourvu que $2m \geq 4\mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#]$, et à la conclusion voulue.

2 Chaînes transitives

On dit que la chaîne X de noyau P sur Ω est transitive ssi pour toute paire $(x,y) \in \Omega$ il existe une bijection $\phi_{(x,y)} : \Omega \to \Omega$ telle que

$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \qquad \forall u, v \in \Omega \;\; P(u,v) = P(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

Exercice 9 Montrer qu'une marche sur un groupe est une chaîne transitive.
Si on note $G = \Omega$ le groupe, il suffit de poser

$$\phi_{(x,y)} : \begin{cases} G \to G \\ g \to yx^{-1}g. \end{cases}$$

Exercice 10 Montrer que si X est une chaîne transitive et irréductible sur Ω fini, son unique distribution stationnaire est la distribution uniforme sur Ω.
Soit π une mesure uniforme sur Ω, en utilisant que $\phi_{(x,z)}$ est une bijection, on obtient que

$$\begin{aligned}
\pi P(x) &= \sum_{y\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|} P(y,x) \\
&= \sum_{y\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|} P(\phi_{(x,z)}(y), z) \\
&= \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|} P(w,z) = \pi P(z)
\end{aligned}$$

Comme le raisonnement est valable pour tout $z \in \Omega$ on conclut que πP est uniforme, comme souhaité.
Remarque Par un raisonnement similaire, lorsque Ω est infini, les seules mesures stationnaires sont uniformes sur Ω. Il n'y a donc pas dans ce cas de distribution stationnaire (de sorte qu'une chaîne irréductible et transitive sur Ω infini ne peut pas être récurrente positive).

Exercice 11 Montrer que si X est irréductible, transitive sur Ω fini, $||P^t(x,\cdot) - \pi||_{\mathrm{TV}}$ ne dépend pas de x.

En utilisant que π est uniforme, et que $\phi_{x,z}$ est une bijection,

$$\begin{aligned}
2||P^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}} &= \sum_{y\in\Omega}|P^t(x,y)-\pi(y)| \\
&= \sum_{y\in\Omega}\left|P^t(z,\phi_{(x,z)}(y))-\frac{1}{|\Omega|}\right| \\
&= \sum_{w\in\Omega}\left|P^t(z,w)-\frac{1}{|\Omega|}\right| \\
&= 2||P^t(z,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}}.
\end{aligned}$$

Exercice 12 Montrer que si X est irréductible et transitive, de noyau P, la chaîne retournée dans le temps $\widehat{X}$ est également irréductible et transitive. Montrer alors que si π est la mesure uniforme sur Ω,

$$||P^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}} = ||\widehat{P}^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}}.$$

Fixons $a,b\in\Omega$. On note $\phi=\phi_{(a,b)}$; En utilisant que π est uniforme, pour tous $x,y\in\Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(y,x) &= \frac{\pi(x)P(x,y)}{\pi(y)} = P(\phi(x),\phi(y)) \\
&= \widehat{P}(\phi(y),\phi(x)),
\end{aligned}$$

de sorte que $\widehat{P}$ est bien transitive (avec $\widehat{\phi}_{(a,b)}=\phi_{(a,b)}, a,b\in\Omega$).
Comme $||P^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}}$ ne dépend pas de x d'après l'exercice précédent, que π est uniforme, et que $P^t(x,y)=\widehat{P}^t(y,x)$ on a

$$\begin{aligned}
||P^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}} &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{x\in\Omega}\frac{1}{2}\sum_{y\in\Omega}\left|P^t(x,y)-\frac{1}{|\Omega|}\right| \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{x\in\Omega}\frac{1}{2}\sum_{y\in\Omega}\left|\widehat{P}^t(y,x)-\frac{1}{|\Omega|}\right| \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{y\in\Omega}||\widehat{P}^t(y,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}} = ||\widehat{P}^t(x,\cdot)-\pi||_{\mathrm{TV}}.
\end{aligned}$$

Exercice 13 Montrer que pour une chaîne X irréductible et transitive sur Ω fini on a quelque soit $b\in\Omega$,

$$t_{\odot}=\mathbb{E}_\pi[\tau_b].$$

En déduire que pour une telle chaîne $t_{\mathrm{hit}}\leq 2t_{\odot}$.
Rappelons que π est uniforme, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi[\tau_b] &= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{x\in\Omega}\mathbb{E}_x[\tau_b] \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{x\in\Omega}\mathbb{E}_{\phi_{b,c}(x)}[\tau_c] \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\sum_{w\in\Omega}\mathbb{E}_w[\tau_c]=\mathbb{E}_\pi[\tau_c],
\end{aligned}$$

et par le lemme de la cible aléatoire,

$$t_\odot = \sum_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi[\tau_x]\pi(x) = \mathbb{E}_\pi[\tau_b]$$

comme souhaité.
On en déduit $t_{\text{hit}} \leq 2\max_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi[\tau_x] = 2t_\odot$.

Exercice 14 On pourra faire appel aux résultat démontrés dans l'exercice 6.
On suppose que le réseau conductances $\mathcal{G}, (c(e), e \in \mathcal{E})$ est transitif, i.e. pour toute paire $(x, y) \in \mathcal{V}$ il existe une bijection $\psi_{(x,y)} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ telle que

$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \qquad \forall u, v \in \mathcal{V} \;\; c(u, v) = c(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

1. Montrer que la chaîne correspondante est transitive.
2. Soient $a, b \in \mathcal{V}$ fixés, $\psi = \psi_{(a,b)}$ la permutation des noeuds de $\mathcal{V}$ associée.
   On note $a_0 = a, a_1 = \psi(a) = b, ...a_k = \psi(a_{k-1}), ..., a_n = a$ l'orbite de a pour la permutation ψ.
   Montrer que pour une telle chaîne

   $$n\mathbb{E}_a[\tau_b] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i+1}}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i-1}}] = n\mathbb{E}_b[\tau_a].$$

3. En déduire, pour une telle chaîne avec $\mathcal{V}$ fini, l'expression de $\mathbb{E}_a[\tau_b]$ en fonction de $c_\mathcal{G}$ et $\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$, puis en fonction de $\mathbb{P}_a(\tau_b < \tau_a^+)$ et $|\Omega|$.

1. c'est évident
2. Par transitivité, on a

   $$\mathbb{E}_a[\tau_b](= \mathbb{E}_{\psi(a)}[\tau_{\psi(b)}]) = \mathbb{E}_b[\tau_{a_2}] = \mathbb{E}_{a_2}[\tau_{a_3}] = ...^{=}\mathbb{E}_{a_{n-1}}[\tau_a],$$

   de sorte que

   $$\mathbb{E}_a[\tau_{aa_2...a_{n-1}a}] = n\mathbb{E}_a[\tau_b]$$

   Comme dans l'exercice 6, on a

   $$\mathbb{E}_a[\tau_{aa_2...a_{n-1}a}] = \mathbb{E}_a[\tau_{aa_{n-1}a_{n-2}...a_2a}],$$

   or par un raisonnement similaire (quitte à utiliser ψ^{-1}) on a que cette dernière quantité est précisément $n\mathbb{E}_b[\tau_a]$, et on conclut.
3. On a donc pour une telle chaîne $\mathbb{E}_a[\tau_b] = \frac{c_\mathcal{G}}{2}\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$, mais comme la chaîne est transitive, $c_\mathcal{G} = |\Omega|c(a)$ et on a donc aussi

   $$\mathbb{E}_a[\tau_b] = \frac{c(a)|\Omega|}{2}\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) = \mathbb{P}_a(\tau_b < \tau_a^+)\frac{|\Omega|}{2}.$$

3 Valeurs propres de P

Exercice 15 A l'aide de la décomposition spectrale de P^t, où P est le noyau d'une chaîne irréductible et réversible, montrer que $t \to P^{2t}(x,x)$ décroît.
Si de plus la chaîne est paresseuse, montrer de manière similaire que $t \to P^t(x,x)$ décroît.
On a

$$\frac{P^t(x,x)}{\pi(x)} = \sum_{j=1}^{|\Omega|} \lambda_j^t f_j(x)^2.$$

Si la chaîne est paresseuse, toutes les valeurs propres $\lambda_j, j = 1, ..., |\Omega|$ sont dans $[0,1]$ et on conclut.
Sinon on a malgré tout

$$\frac{P^{2t}(x,x)}{\pi(x)} = \sum_{j=1}^{|\Omega|} \lambda_j^{2t} f_j(x)^2.$$

et on conclut car $\lambda_j^2 \in [0,1]$ pour tout j.

Exercice 16 Soit X une chaîne irréductible, apériodique et réversible, de distribution stationnaire π. On suppose que les $(f_i)_{i=1}^{|\Omega|}$ constituent une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ de fonctions propres pour P associées aux $(\lambda_i)_{i=1}^{|\Omega|}$. On suppose que $\lambda_1 = 1$, que $W \sim \pi$, et que $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[f(W)] = \langle f, f_1 \rangle_\pi$.
2. Que vaut $\mathbb{E}[f_j(W)]$, pour $j = 1, ..., |\Omega|$?
3. Pour $t \geq 0$, que vaut $\mathbb{E}[P_t f(W)]$?
4. Calculer $\mathrm{Var}[P^t f(W)]$ en fonction des $\mathrm{Var}(f_j(W)), j = 1, ..., |\Omega|$. En déduire que

$$\mathrm{Var}[P^t f(W)] \leq (1-\gamma^*)^{2t} \mathrm{Var}[f(W)].$$

1. On a, puisque $f_1 \equiv 1$,

$$\mathbb{E}[f(W)] = \sum_{x \in \Omega} f(x)\pi(x) = \langle f, f_1 \rangle_\pi.$$

2. En particulier

$$\mathbb{E}[f_j(W)] = \langle f_j, f_1 \rangle_\pi = \mathbb{1}_{\{j=1\}},$$

puisque la base $\{f_j, j = 1, ..., |\Omega|\}$ est orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$.

3. Puisque

$$P^t f(W) = \sum_{j=1}^{|\Omega} \langle f, f_j \rangle_\pi \lambda_j^t f_j(W),$$

on a, d'après les questions qui précèdent,

$$\mathbb{E}[P^t f(W)] = \sum_{j=1}^{|\Omega} \langle f, f_j \rangle_\pi \lambda_j^t \mathbb{E}[f_j(W)] \lambda_j^t = \langle f, f_1 \rangle_\pi = \mathbb{E}[f(W)].$$

4. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[P^t f(W)] &= \mathbb{E}[(P_t f(W) - \mathbb{E}[P^t f(W)])^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=2}^{|\Omega}\langle f, f_j\rangle_\pi \lambda_j^t f_j(W)\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=2}^{|\Omega}\langle f, f_j\rangle_\pi^2 \lambda_j^{2t}\mathrm{Var}[f_j(W)],\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé que si $2 \leq i \neq j$

$$\mathrm{Cov}[f_i(W), f_j(W)] = \mathbb{E}[f_i f_j(W)] - \mathbb{E}[f_i(W)]\mathbb{E}[f_j(W)] = \langle f_i, f_j\rangle_\pi - 0 = 0.$$

5. Puisque $|\lambda_j| \leq (1-\gamma^*)$ pour tout $j \geq 2$, on en déduit finalement que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[P^t f(W)] &= \sum_{j=2}^{|\Omega}\langle f, f_j\rangle_\pi^2 \lambda_j^{2t}\mathrm{Var}[f_j(W)] \\ &\leq (1-\gamma^*)^{2t}\sum_{j=2}^{|\Omega}\langle f, f_j\rangle_\pi^2 \mathrm{Var}[f_j(W)] = (1-\gamma^*)^{2t}\mathrm{Var}[f(W)].\end{aligned}$$

Exercice 17 Soit X une chaîne transitive et réversible sur Ω avec $|\Omega| = n$. On note $\lambda = 1 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > -1$ les valeurs propres de P. Montrer que si W suit la loi stationnaire π, on a

$$\mathbb{E}\left[\left\|\frac{P^t(W,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|^2_{\ell_2(\pi)}\right] = \sum_{j=2}^n \lambda_j^{2t}.$$

Exercice 18 Soit $X_1, ..., X_d$ des chaînes de Markov irréductibles, de noyaux respectifs $P_1, ..., P_d$ sur les espaces respectifs $\Omega_1, ...\Omega_d$. Si w est une distribution sur $\{1, ..., d\}$ on considère alors X la chaîne produit de noyau P sur $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_d$:

$$P(x,y) = \sum_{j=1}^d w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}}$$

1. Montrer que si $\lambda^{(j)}$ est v.p. de P_j associée à la fonction propre $f^{(j)}$, alors si on définit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \prod_{j=1}^d f^{(j)}(x_j)$ est une fonction propre de P associée à la valeur propre $\lambda = \sum_{j=1}^d w_j \lambda^{(j)}$.
2. Montrer que si γ_j est le trou spectral de X_j alors celui de X vérifie $\gamma = \min_{j=1,\dots,d} w_j \gamma_j$.
3. Calculer les valeurs propres lorsque X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0,1\}^d$. En déduire le trou spectral absolu de cette chaîne.

1. Soit f définie par $f(x) = \prod_{j=1}^d f^{(j)}(x_j), x \in \Omega$. Puisque $f^{(j)}$ est fonction propre de P_j associée à la valeur propre $\lambda^{(j)}$ on a

$$\sum_{y_j \in \Omega_j} P_j(x_j, y_j) f^{(j)}(y_j) = \lambda^{(j)} f^{(j)}(x_j).$$

On en déduit (les sommes et produits sont tous finis donc les interversions ne posent aucun problème) :

$$\begin{aligned}
Pf(x) &= \sum_{y \in \Omega} \sum_{j=1}^d w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}} \prod_{k=1}^d f^{(k)}(y_k) \\
&= \sum_{j=1}^d w_j \prod_{k \neq j} f^{(k)}(x_k) \sum_{y_j \in \Omega_j} P_j(x_j, y_j) f^{(j)}(y_j) \\
&= \sum_{j=1}^d w_j \prod_{k \neq j} f^{(k)}(x_k) \lambda^{(j)} f^{(j)}(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^d w_j \lambda^{(j)} f(x).
\end{aligned}$$

de sorte que f est fonction propre de p associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^d w_j \lambda^{(j)}$.

2. Sans perte de généralité on peut supposer que pour tout $j = 1, ..., d$ les valeurs propres de P_j sont ordonnées :

$$\lambda_1^{(j)} = 1 > \lambda_2^{(j)} \geq ... \geq \lambda_{|\Omega_j|}^{(j)}$$

La seconde valeur propre de P est alors clairement

$$\max_{j \in \{1,...,d\}} \sum_{i \neq j} w_i + w_j \lambda_2^{(j)} = 1 - \min_{j \in \{1,...,d\}} w_j \gamma_j.$$

Remarque : Pour le trou spectral absolu on n'a a priori pas de formule aussi simple. Cependant, on a $\gamma^* = 1 - \lambda^*$ où

$$\begin{aligned}
\lambda^* &:= \max\{|\lambda_k| : k \in \{2, ..., |\Omega|\}\} \\
&= \max_{(k_1,...,k_d): 1 \leq k_i \leq |\Omega_i|, \max_i k_i \geq 2\}} \left| \sum_{j=1}^d w_j \lambda_{k_j}^{(j)} \right| \\
&= \max_{(k_1,...,k_d): k_i \in \{1, 2, |\Omega_i|\}, \max_i k_i \geq 2\}} \left| \sum_{j=1}^d w_j \lambda_{k_j}^{(j)} \right|
\end{aligned}$$

Enfin dans le cas où la marche considérée est paresseuse il faut noter que trou spectral et trou spectral absolu coïncident.

3. Si on considère pour tout $j \in \{1, ..., d\}, \Omega_j = \{0, 1\}$, $P_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, et $w_j = 1/d$, on retrouve la marche paresseuse sur l'hypercube. Les valeurs propres de P_j sont 0 et 1, et donc

$$\gamma = \gamma^* = \frac{1}{d}.$$