

Temps de mélange

Examen

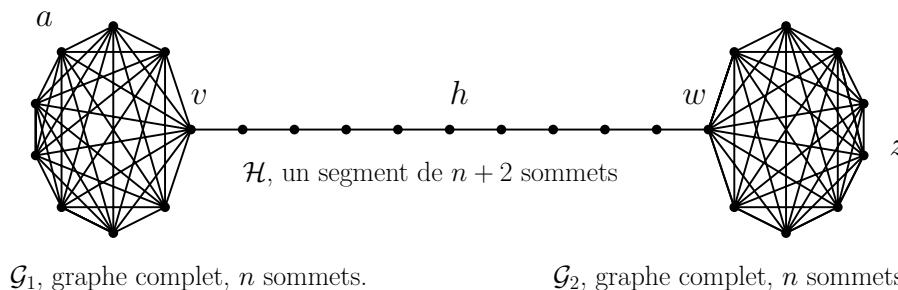
Documents manuscrits autorisés. Le temps ne permet pas d'aborder les trois exercices, le barème en tient compte.

**Exercice 1 Un peu de musculation : le graphe de l'haltère**

Soit  $n$  un entier *impair*, supérieur ou égal à 3.

On considère le graphe  $\mathcal{G}$  à  $3n$  sommets obtenu en reliant deux copies du graphe complet à  $n$  sommets par un segment de longueur  $n + 2$ .

Plus précisément, on notera  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  les deux copies du graphe complet à  $n$  sommets, et  $\mathcal{H}$  le graphe à  $n + 2$  sommets correspondant au segment de longueur  $n + 1$ . Le noeud de  $\mathcal{G}_1$  identifié à l'une des extrémités de  $\mathcal{H}$  est noté  $v$ , celui de  $\mathcal{G}_2$  identifié à l'autre extrémité de  $\mathcal{H}$  est noté  $w$ . Enfin on note  $a$  un noeud de  $\mathcal{G}_1$  distinct de  $v$  et  $z$  un noeud de  $\mathcal{G}_2$  distinct de  $w$ , et enfin  $h$  le noeud central du segment  $\mathcal{H}$  reliant  $\mathcal{G}_1$  à  $\mathcal{G}_2$ .



Une représentation de  $\mathcal{G}$ , avec ici  $n = 9$ .

On considère  $(X_n, n \geq 0)$  la marche simple sur le graphe  $\mathcal{G}$ , on va s'intéresser d'abord aux propriétés générales de cette chaîne, puis au temps d'atteinte maximal  $t_{\text{hit}}$  de  $X$ , et enfin au temps de mélange  $t_{\text{mix}}$  de la version paresseuse de la marche.

1. La chaîne  $X$  est-elle irréductible? apériodique? réversible? Déterminer l'ensemble de ses distributions invariantes.
2. Calculer  $\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+)$ , puis<sup>1</sup> établir que

$$\mathbb{E}_a[\tau_z] = \frac{2(n^2 + n + 4)(n^2 + 1)}{n}.$$

En déduire un équivalent de  $t_{\text{hit}}$ . En déduire et une borne sur  $t_{\text{mix}}$  pour la version paresseuse de la marche.

3. Dans la suite de l'exercice on considère la version paresseuse de la marche. On pose  $A = \{x \in \mathcal{G} : d(x, \mathcal{G}_1) < d(x, \mathcal{G}_2)\}$ ,  $B = \mathcal{G}_1 \setminus \{v\}$  et  $v'$  le voisin de  $v$  dans  $\mathcal{H}$ . Montrer que  $\mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_B) = \frac{2n}{n^2+1}$ . En déduire que sous  $\mathbb{P}_a$ ,  $\tau_h \leq G$ , où  $G \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{(n-1)(n^2+1)}\right)$ . Quelle est la limite en loi de  $G/n^3$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ?
4. Déterminer finalement que pour des constantes  $c_1, c_2 > 0$ , et pour  $n$  suffisamment grand on a pour la version paresseuse de la marche  $c_1 n^3 \leq t_{\text{mix}} \leq c_2 n^3$

1. on pourra par exemple utiliser le modèle de conductances et commencer par remarquer que les points de  $\mathcal{G}_1$  autres que  $a$  et  $z$  ont, par symétrie, même potentiel.

1. Le graphe est connexe donc la chaîne est irréductible, elle possède donc une unique distribution invariante  $\pi$ . Le graphe  $\mathcal{G}_1$  compte au moins  $n \geq 3$  noeuds, donc partant de  $a$ , on peut revenir à  $a$  en 2 ou 3 pas, ce qui garantit que la chaîne est apériodique. Enfin la chaîne est une marche simple sur un graphe, elle est équivalente au modèle de conductances où toutes les arêtes se voient attribuer la même conductance, disons 1. La chaîne est donc réversible, et  $\{\pi(x), x \in \mathcal{G}\}$  est proportionnelle à  $\{c(x), x \in \mathcal{V}\}$ . Plus précisément, il est facile que

$$c_{\mathcal{G}} = 2(n-1)^2 + 2n + 2n = 2n^2 + 2, \quad \pi(x) = \frac{c(x)}{c_{\mathcal{G}}}, x \in \mathcal{V}.$$

Précisément, si  $x \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \setminus \{v, w\}$ ,  $\pi(x) = \frac{n-1}{2n^2+2}$ , si  $x \in \{v, w\}$ ,  $\pi(x) = \frac{n}{2n^2+2}$  et si  $x \in \mathcal{H} \setminus \{v, w\}$ ,  $\pi(x) = \frac{2}{2n^2+2}$ .

2. On calcule  $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$ . Pour cela on remarque que les noeuds de  $\mathcal{G}_1$  distincts de  $a, v$  jouent des rôles symétriques, ils sont donc au même potentiel et on peut les identifier en un noeud, disons  $y$ . Le noeud  $a$  est connecté à  $y$  par  $n-2$  arêtes de conductance 1, ce qui équivaut à une unique conductance  $n-2$ . De même  $y$  est relié à  $v$  par  $n-2$  arêtes de conductance 1, ce qui équivaut à une unique conductance  $n-2$ . Reste à sommer les résistances entre  $a$  et  $y$  et  $y$  et  $v$ , et ne pas oublier l'arête de conductance 1 entre  $a$  et  $v$ . On en déduit que la conductance équivalente entre  $a$  et  $v$  est égale à  $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ . De même on peut réduire le graphe  $\mathcal{G}_2$  à une unique arête entre  $w$  et  $z$  de conductance  $\frac{n}{2}$ . Ne reste plus qu'à sommer les résistances en parallèle. On obtient

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) = \frac{4}{n} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 4}{n}.$$

Comme  $c(a) = n-1$  on en déduit

$$\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+) = \frac{1}{c(a)\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)} = \frac{n}{(n-1)(n^2 + n + 4)}.$$

Par symétrie,  $\mathbb{E}_a[\tau_z] = \mathbb{E}_z[\tau_a]$  et donc

$$\mathbb{E}_a[\tau_z] = \frac{c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}{2} = \frac{(n^2 + 1)(n^2 + n + 4)}{n},$$

comme souhaité. Il est clair que  $t_{\text{hit}} = \mathbb{E}_a[\tau_z] \sim n^3$ , pour la version paresseuse il suffit de multiplier par 2.. Comme la chaîne est réversible, on en déduit que

$$t_{\text{mix}} \leq 2t_{\text{hit}} + 1,$$

de sorte que  $t_{\text{mix}}$  est borné supérieurement par une quantité équivalente à  $4n^3$ .

3. D'après le résultat pour la ruine du joueur  $\mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_v) = \frac{2}{n+1}$ . Par Markov au temps  $\tau_v \wedge \tau_h$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_B) &= \mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_v) + \mathbb{P}_{v'}(\tau_v < \tau_h)\mathbb{P}_v(\tau_h < \tau_B) \\ &= \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \times \frac{1}{n}\mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_B), \end{aligned}$$

ce qui conduit à  $\mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_A) \frac{n^2+1}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$  et donc au résultat souhaité.

Pour atteindre  $h$  depuis n'importe quel point  $a \in B$  avant de retourner en  $A$ , il faut d'abord passer par  $v$  (un événement de probabilité  $\frac{1}{2(n-1)}$ ), puis depuis  $v$ , atteindre  $v'$  avant  $B$  (un événement de probabilité  $\frac{1}{n}$ ), et enfin atteindre  $h$  depuis  $v'$  avant de retourner en  $A$  (comme on vient de le voir, un événement de probabilité  $\frac{2n}{n^2+1}$ ). Finalement on a bien

$$\mathbb{P}_a(\tau_h < \tau_B^+) = \frac{1}{(n-1)(n^2+1)},$$

de sorte que le nombre de visites en  $A$  avant  $\tau_h$  (certainement inférieur à  $\tau_h$ ) est une variable géométrique  $G$  de paramètre  $\frac{1}{(n-1)(n^2+1)}$ , comme souhaité.

Il est classique et facile qu'en loi  $G/n^3$  converge vers une variable exponentielle de paramètre 1.

4. Reste alors à voir que pour un  $c_1 > 0$ ,

$$\tilde{P}^{c_1 n^3}(a, A) \geq \mathbb{P}_a(\tau_h > c_1 n^3) \geq \mathbb{P}(G > c_1 n^3) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp(-c_1) > 3/4,$$

pourvu que  $c_1 > 0$  soit pris suffisamment petit.

Comme  $\pi(A^c) > 1/2$ , il est clair que  $t_0 \leq t_{\text{mix}}$  si  $P^{t_0}(a, A) > 3/4$ , et donc  $c_1 n^3 \leq t_{\text{mix}}$  pour  $n$  suffisamment grand. D'après la borne supérieure sur  $t_{\text{mix}}$  établie à la question 2, on conclut.

### Exercice 2 Sphères dures

Soit un graphe fini  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  — on utilise comme d'habitude la notation  $a \sim b$  pour dire que les noeuds  $a, b$  sont voisins dans  $\mathcal{G}$ . On note  $\Delta$  le degré maximal du graphe.

On note par ailleurs  $\Omega_0 = \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$  et

$$\Omega = \{x \in \Omega_0 : \forall \{v, w\} \in \mathcal{E} : x(v)x(w) = 0\}.$$

On dit que  $x \in \Omega$  est une configuration de sphères dures (et la contrainte est que deux sphères dures ne peuvent occuper des sites voisins).

On considère la chaîne  $(X_t, t \geq 0)$  sur  $\{0, 1\}^{\mathcal{V}}$  définie par la dynamique suivante. Au temps  $t + 1$ , on tire, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes,

$v_{t+1} \sim \text{Unif}(\mathcal{V}), B_{t+1} \sim \text{Ber}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ . Si  $\sum_{w \sim v_{t+1}} X_t(w) \geq 1$  on ne fait rien, i.e.  $X_{t+1} = X_t$ . Sinon on pose  $X_{t+1}(v_{t+1}) = B_{t+1}$  et on laisse  $X_{t+1}(w) = X_t(w)$  pour tout  $w \neq v$ .

Quitte à faire les mêmes choix de  $((v_t, B_t), t \geq 0)$  on peut définir conjointement

$(X_t^x, t \geq 0, x \in \Omega)$ , où, pour  $x \in \Omega$ ,  $(X_t^x)_{t \geq 0}$  désigne le chaîne dont on vient de décrire la dynamique, issue de  $x$ .

1. Pour  $x, y \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$  on note

$$\rho(x, y) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}.$$

Montrer que si  $\rho(x, y) = 1$  et si  $\#(\mathcal{V}) = n$ , on a

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{\Delta}{n} \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

2. Montrer que si  $x, y \in \Omega$  tels que  $\rho(x, y) = r$  on peut trouver  $x_0 = x, x_1, \dots, x_r = y$  dans  $\Omega$  tels que

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = 1 \quad \forall k \in \{0, \dots, r-1\}.$$

3. En déduire que pour tous  $x, y \in \Omega$ ,

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq \rho(x, y) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\Delta}{n} \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right).$$

4. En déduire finalement que lorsque  $\lambda < \frac{1}{\Delta-1}$ , on peut trouver une constante  $C(\lambda, \Delta)$  telle que

$$t_{\text{mix}} \leq C(\lambda, \Delta)n \log(n).$$

Lorsque  $\rho(x, y) = 1$  les deux configurations  $x$  et  $y$  coïncident partout sauf en un noeud, disons  $v$ , pour lequel  $x(v) \neq y(v)$ . Sans perte de généralité on peut supposer par exemple que  $x(v) = 0; y(v) = 1$ . Notons que tous les voisins de  $v$  dans le graphe sont forcément inoccupés dans la configuration  $y$ , et donc également dans la configuration  $x$ .

On a alors  $\rho(X_1^x, X_1^y) = 0$  si et seulement si  $v_1 = v$ , ce qui se produit avec probabilité  $1/n$ . Pour que  $\rho(X_1^x, X_1^y) = 1$  il faut que  $v_1$  soit un voisin de  $v$ , et que  $B_1 = 1$ , de sorte qu'on placera une particule en  $v_1$  dans  $x$ , mais pas dans  $y$  puisqu'on aboutirait alors à une configuration interdite. La probabilité exacte de cet événement dépend du degré de  $v$ , cependant elle est majorée par  $\frac{\Delta}{n} \frac{\lambda}{\lambda+1}$ . On en déduit que

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y) - 1] \leq \frac{\Delta\lambda}{n(\lambda+1)} - \frac{1}{n}.$$

On note  $x^v$  la configuration obtenue de  $x$  en changeant  $x$  au noeud  $v$  (i.e. en passant en  $v$  de la valeur de  $x(v)$  à  $1 - x(v)$ ).

Si  $x$  et  $y$  diffèrent en  $r$  noeuds, alors il existe un entier  $k \in \{0, \dots, r\}$  et des noeuds  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_r$  tels que

$$x(v_i) = 1, y(v_i) = 0, \text{ pour } i \in \{1, \dots, k\} \quad y(v_j) = 1, x(v_j) = 0, \text{ pour } j \in \{k+1, \dots, r\}.$$

Posons alors  $x_0 = x, x_1 = x^{v_1}, x_2 = x_1^{v_2}, \dots, x_k = x_{k-1}^{v_k}, x_{k+1} = x_k^{v_{k+1}}, \dots, x_r = x_{r-1}^{v_r} = y$  : on commence par retirer toutes les sphères présentes dans la configuration  $x$  mais pas dans la configuration  $y$ , puis on rajoute les sphères présentes dans  $y$  mais pas dans  $x$ . Il est clair que  $x_1, \dots, x_k$  sont admissibles : on n'a fait que retirer des sphères de la configuration  $x$ , de sorte que  $x_i(v) \leq x(v)$  pour tout  $v \in \mathcal{V}, i \leq k$ . De même pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , et pour tout  $j \geq k, x_j(v) \leq y(v)$ . Comme  $y$  est admissible, il est clair que les  $x_j, j \geq k$  le sont également.

D'après l'inégalité triangulaire pour la métrique  $\rho$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] &\leq \sum_{k=1}^r \mathbb{E}[\rho(X_1^{x_{k-1}}, X_1^{x_k})] \\ &\leq \sum_{k=1}^r \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{n(\lambda+1)} - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \rho(x, y) \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{n(\lambda+1)} - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $t \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y) \mid \mathcal{F}_{t-1}]] \leq \mathbb{E}[\rho(X_{t-1}^x, X_{t-1}^y)] \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{n(\lambda+1)} - \frac{1}{n}\right),$$

et donc par une récurrence immédiate,

$$\mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)] \leq \rho(x, y) \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{n(\lambda+1)} - \frac{1}{n}\right)^t.$$

Comme  $\max_{x, y \in \Omega} \rho(x, y) \leq n$ , on déduit

$$\begin{aligned} d(t) \leq \max_{x, y \in \Omega} \mathbb{E}[\rho(X_t^x, X_t^y)] &\leq n \left(1 + \frac{\lambda(\Delta-1) - 1}{n(\lambda+1)}\right)^t \\ &\leq n \exp\left(t \frac{\lambda(\Delta-1) - 1}{n(\lambda+1)}\right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

pourvu que  $\lambda(\Delta-1) < 1$  et que

$$t \geq \frac{n(\lambda+1)}{1 - \lambda(1 - \Delta)} (\log(n) + \log(1/\varepsilon)).$$

**Exercice 3** On considère  $\mathcal{G} = \left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\right)^d$ , et  $X$  la marche simple paresseuse sur  $\mathcal{G}$ . On note  $P_d$  son noyau.

1. Dans cette question uniquement  $d = 1$ . Montrer que les valeurs propres de  $P_1$  sont  $0, 1/2$  (avec multiplicité 2) et 1.
2. En utilisant que pour tous  $k_1, k_2, k_3$  on a  $1 - \frac{k_1}{d} - \frac{k_2+k_3}{2d} \leq \exp\left(-\frac{k_1}{d}\right) \exp\left(-\frac{k_2}{2d}\right) \exp\left(-\frac{k_3}{2d}\right)$ , vérifier que

$$d(t)^2 \leq \frac{1}{4} \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{t}{d}\right) + \exp\left(-\frac{2t}{d}\right)\right)^d - \frac{1}{4}.$$

En déduire que pour des constantes  $\kappa, C(\varepsilon)$  qu'on déterminera,

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \kappa d \log(d) + C(\varepsilon)d.$$

1. On vérifie aisément que la matrice  $P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres

$0, 1/2, 1$  associées respectivement aux espaces propres

$$\mathcal{E}_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E}_{1/2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E}_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. On a affaire à une chaîne produit avec  $\mu$  uniforme sur  $\{1, \dots, d\}$ , et pour tout  $i$ , la chaîne  $X_i$  a pour espace d'état  $\Omega_i = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ , et noyau  $P^{(i)} = P_1$ . D'après le résultat du cours les valeurs propres de  $P_d$  sont donc

$$\lambda = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \lambda^{(i)},$$

où pour tout  $i$ ,  $\lambda^{(i)}$  est l'une des valeurs propres de  $P_1$ . Le nombre de façons de choisir  $k_1$  fois la valeur propre 1,  $k_2$  fois la ("première") valeur propre  $1/2$ ,  $k_3$  fois la ("deuxième") valeur propre  $1/2$ , et  $k_4 = d - k_1 - k_2 - k_3$  la valeur propre 0 est le coefficient multinomial  $\binom{d}{k_1, k_2, k_3, k_4} = \frac{d!}{k_1! k_2! k_3! k_4!}$

On a affaire à une chaîne transitive, d'après la borne  $\ell^2$  obtenue en cours on a donc

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= 4 \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}^2 \\ &\leq \sum_{i=2}^d \lambda_i^{2t} \\ &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4: k_1 + \dots + k_4 = d} \binom{d}{k_1, k_2, k_3, k_4} \left(\frac{1}{2d}(2k_1 + k_2 + k_3)\right)^{2t} - 1 \\ &\leq \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4: k_1 + \dots + k_4 = d} \binom{d}{k_1, k_2, k_3, k_4} \exp\left(-\frac{2tk_1}{d}\right) \exp\left(-\frac{tk_2}{d}\right) \exp\left(-\frac{tk_3}{d}\right) - 1, \\ &= \left(1 + \exp\left(-\frac{2t}{d}\right) + 2 \exp\left(-\frac{t}{d}\right)\right)^d - 1 \end{aligned}$$

3. Lorsque  $t \geq d \log(d) + C(\varepsilon)d$  on trouve donc

$$\begin{aligned} d(t)^2 &\leq \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{d^2}\right) \exp(-C(\varepsilon))\right)^d \\ &\leq \frac{1}{4} \exp(-2 \exp(-C(\varepsilon))) \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

pourvu que  $C(\varepsilon) = -\log \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$ , et on conclut que  $t_{\text{mix}} \leq d \log(d) + C(\varepsilon)d$ .