Ecole Normale Supérieure

2016

Temps de mélange

Exercices 4

1 Metropolis, Glauber, et grand couplage pour les coloriages

Exercice 1 (Metropolis)
Soit Ω fini, Q un noyau de transition irréductible sur Ω et π une distribution *arbitraire* sur Ω. On considère alors

$$R(x,y) := \begin{cases} \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)} & \text{si } \pi(x)Q(x,y) > \pi(y)Q(y,x) \\ Q(x,y) & \text{sinon.} \end{cases},$$

$$P(x,y) := \begin{cases} R(x,y) & \text{si } y \neq x \\ 1 - \sum_{z\neq x} R(x,z) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

1. Montrer que P définit le noyau de transition d'une chaîne réversible, et de distribution stationnaire π. A quelle condition la chaîne obtenue est-elle irréductible ?
2. Décrire P lorsque Q est le noyau de transition de la marche simple sur un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ connexe, et π est la distribution uniforme sur $\mathcal{V}$.
3. (coloriage) Décrire P lorsque $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe connexe, $\Omega_0 = \mathcal{V}^{\{1,\dots,q\}}$, $Q(x,y) = \frac{1}{|\mathcal{V}|q}$ ssi $x, y \in \Omega_0$ diffèrent en au plus 1 noeud de $\mathcal{V}$, et enfin π est la distribution uniforme sur le sous-espace $\Omega \subset \Omega_0$ des q-coloriages admissibles (on suppose ici que q est tel qu'au moins un tel coloriage existe). On s'attachera en particulier à décrire une transition de la chaîne sous P depuis un état $x \in \Omega$.
4. (Ising) Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe connexe, $\Omega = \mathcal{V}^{\{-1,1\}}$, et Q le noyau de la marche simple sur Ω (i.e. $Q(x,y) = 1/|\mathcal{V}|$ ssi $x, y \in \mathcal{V}^{\{-1,1\}}$ diffèrent en un seul noeud). On considère alors : $\beta > 0$,

$$H(x) := -\sum_{(v,w)\in\mathcal{E}} x(v)x(w), \text{ l'énergie de la configuration } x, \text{ et}$$

$$\pi(x) := \frac{\exp(-\beta H(x))}{Z_\beta}, \text{ où } Z_\beta = \sum_{x\in\Omega} \exp(-\beta H(x)).$$

Pour $x \in \mathcal{V}^{\{-1,1\}}$, montrer que $y \sim P(x,\cdot)$ est choisi de la manière suivante :
– au temps t on sélectionne uniformément au hasard, un noeud v dans $\mathcal{V}$, et on note x^v la configuration telle que $x^v(w) = x(w), w \neq v, x^v(v) = -x(v)$.
– Si $H(x^v) \leq H(x)$ alors on pose $y = x^v$.
– Si $H(x^v) > H(x)$, on tire $\xi \sim \text{Ber}(\exp(-\beta(H(x^v) - H(x))))$, et on pose $y = \xi x^v + (1-\xi)x$.

Exercice 2 (Glauber)
Soit $\mathcal{V}, S$ des ensembles finis, $\Omega \subset \mathcal{V}^S$, et π une distribution sur Ω. Pour $x \in \Omega, v \in \mathcal{V}$ on définit

$$\Omega(x,v) := \{y \in \Omega : y(w) = x(w) \ \forall w \neq v\},$$

et

$$\pi^{x,v}(y) = \pi(y \mid \Omega(x,v)) = \begin{cases} \frac{\pi(y)}{\pi(\Omega(x,v))} & \text{si } y \in \Omega(x,v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Au temps $t \geq 0$, on tire alors $v_t \sim \mathrm{Unif}(\mathcal{V})$, indépendamment de ce qui précède. Puis, sachant X_{t-1}, v_t, on tire alors $X_t \sim \pi^{X_{t-1},v_t}(\cdot)$.
Vérifier que la chaîne X est réversible et a pour distribution stationnaire π.

On suppose que $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est connexe, $S = \{1, ..., q\}$, Ω est l'ensemble des q-coloriages admissibles sur $\mathcal{G}$ (on admet que q est tel que cet ensemble est non vide) et π est la mesure uniforme sur Ω. Retrouve-t-on la chaîne définie dans la question 3. de l'exercice précédent ?

Pour $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ connexe, $S = \{-1, 1\}$, $\Omega = \mathcal{V}^S$, et π comme dans la question 4. de l'exercice précédent, retrouve-t-on la chaîne définie plus haut ?

Exercice 3 On considère la dynamique suivante sur l'espace des coloriages admissibles d'un graphe $\mathcal{G}$ à n noeuds. On suppose dans la suite que les noeuds de $\mathcal{G}$ ont degré uniformément borné par Δ, et que le nombre de couleurs q vérifie $q > 3\Delta$ (de sorte qu'en particulier, il y a de nombreux coloriages admissibles). Pour des coloriages $x, y \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ on note

$$\rho(x,y) := \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}$$

le nombre de noeuds où les couleurs diffèrent entre x et y.
Soient $(v_t, c_t)_{t \geq 0}$ i.i.d uniformes sur $\mathcal{V} \times \{1, ..., q\}$. le pas de la dynamique au temps t consiste à changer uniquement la couleur du noeud v_t en la couleur c_t *si* le coloriage obtenu est admissible, sinon on ne fait rien.
Plus précisément, pour une configuration $x \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ on définit $x^{v,c} \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ par

$$x^{v,c}(w) := x(w) \ \ \forall w \neq v, \quad x^{v,c}(v) = c,$$

et alors

$$X_t = X_{t-1}^{v_t,c_t} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}^{v_t,c_t} \in \Omega\}} + X_{t-1} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}^{v_t,c_t} \notin \Omega\}}.$$

1. Cette dynamique correspond-elle à la dynamique de Glauber ? à la dynamique de Metropolis ?
2. Montrer qu'on peut réaliser un grand couplage pour cette dynamique, quitte à faire les mêmes choix $(v_t, c_t)_{t \geq 1}$ de noeuds et de couleurs pour toutes les chaînes.
3. On suppose que $x, y \in \mathcal{V}^{\{1,...,q\}}$ sont tels que $\rho(x,y) = 1$ et on considère les chaînes X^x, X^y issues respectivement de x, y. Montrer que

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq 1 - \frac{q - 3\Delta}{nq}.$$

4. Lorsque $\rho(x,y) = r$, montrer que

$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq \rho(x,y)\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right).$$

On pourra utiliser la question précédente et l'existence de $x_1, x_2, ..., x_{r-1}$ tels que

$$\rho(x, x_1) = \rho(x_1, x_2) = ... = \rho(x_{r-1}, y) = 1.$$

5. En déduire que quelque soient x, y,

$$\mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) \leq n\left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t$$

puis que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \frac{q}{q-3\delta}\, n\left(\log(n) + \log(\varepsilon^{-1})\right).$$

2 Chaînes réversibles, analogie avec les réseaux électriques

Dans ce paragraphe on considère X une chaîne irréductible, réversible, de noyau P, et de distribution stationnaire π.
On rappelle que la chaîne est équivalente à un modèle de conductance sur un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \Omega, \mathcal{E} = \{(x,y) : P(x,y) > 0\})$, et avec des conductances $c : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ telles que pour un certain $K > 0$

$$c(x,y) = K\pi(x)P(x,y),\ \forall (x,y) \in \mathcal{E}.$$

On rappelle enfin qu'on note $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x,y)$, et $c_{\mathcal{G}} = \sum_{x \in \Omega} c(x)$.

Exercice 4 (Influence de la constante K)
Pour une chaîne X irréductible, réversible, de noyau P et de distribution stationnaire π, les conductances $\{c^{(K)}(e), e \in \mathcal{E}\}$ sont définies à une constante multiplicative $K > 0$ près :

$$c^{(K)}(x,y) = K\pi(x)P(x,y), x, y \in \Omega.$$

On fixe alors $a \in \Omega, Z \subset \Omega, a \notin Z$.

1. Soient $\alpha > \beta$ des rééls. Comment la fonction $V = V_{\alpha,\beta}^{(K)}$ telle que

$$V(a) = \alpha, V(z) = \beta\ \forall z \in Z, V(\cdot)P\text{-harmonique sur } \Omega \setminus (\{a\} \cup Z)$$

dépend-elle du choix de K ? Comment dépend-elle du choix de α, β ?

2. Exprimer le courant $I_{\alpha,\beta}^{(K)}$ associé à $V_{\alpha,\beta}^{(K)}$ en fonction de $I_{\alpha,\beta}^{(1)}$, puis en fonction de K, α, β et $I_{1,0}^{(1)}$.
3. Comment le courant de a vers Z d'intensité 1 dépend-il du choix de K ?
4. Comment la résistance effective entre a et Z, notée $\mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$, dépend-elle du choix de K ?

Exercice 5
Soit $a \in \Omega, Z \subset \Omega$ avec $a \notin Z$. On note $\tau_Z = \inf\{t \geq 0 : X_t \in Z\}$ et, pour $x \in \Omega$,

$$G_Z(a,x) := \mathbb{E}_a\left[\sum_{t=0}^{\tau_Z - 1} \mathbb{1}_{\{X_t = x\}}\right].$$

On introduit alors la fonction $V(x) = \frac{G_Z(a,x)}{c(x)}, x \in \Omega$ (attention : même si cela n'apparaît pas dans notre notation, d'après l'exercice précédent, ce V dépend du choix de la constante $K > 0$ telle que $c(x,y) = K\pi(x)P(x,y), x, y \in \Omega$).

1. Que vaut la fonction V sur Z ?
2. Montrer que $V(a) = \mathcal{R}^{(K)}(a \leftrightarrow Z)$.
3. Montrer que V est harmonique sur $\Omega \setminus \{a\} \cup Z$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}_a[\tau_Z] = \sum_{x \in \Omega} c(x)V(x)$$
5. Pour $a, y \in \Omega$ montrer que
$$\mathbb{E}_a[\tau_y] + \mathbb{E}_y[\tau_a] = c_{\mathcal{G}}\mathcal{R}(a \leftrightarrow y).$$
6. Pour $x, y \in \Omega$ on note
$$S_{xy} = \sum_{t=0}^{\tau_Z - 1} \mathbf{1}_{\{X_t = x, X_{t+1} = y\}}.$$
Montrer que $\mathbb{E}_a[S_{xy}] = G_Z(a,x)P(x,y)$, et en déduire que si I est le courant d'intensité 1 de a à Z,
$$I(x,y) = \mathbb{E}_a[S_{xy} - S_{yx}].$$

Exercice 6 Montrer que $d(a,b) = \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$ définit une distance sur Ω. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser que le courant unité 1 de a à c peut être vu comme la somme des courants unité de a à b et de b à z.

Exercice 7 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \vec{\mathcal{E}})$ un graphe orienté. On suppose que toute arête est présente dans ses deux orientations.
Les extrémités d'une arête orientée $\vec{e}$ sont notés e^-, e^+.
On note $\mathcal{E}_{1/2}$ un ensemble qui contient exactement un élément de chaque paire d'arêtes $\{e, -e\}$.
On note $\ell^2(\mathcal{V})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})} = \sum_{x \in \mathcal{V}} f_1(x) f_2(x).$$

On note $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$ les fonctions antisymétriques sur les arêtes orientées, muni du produit scalaire

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \sum_{e \in \mathcal{E}_{1/2}} \theta_1(e)\theta_2(e).$$

On peut passer d'un espace à l'autre via

$$d : \left\{ \begin{array}{l} \ell^2(\Omega) \to \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \\ f \to df : df(e) = f(e^-) - f(e^+), \end{array} \right. \qquad d^* : \left\{ \begin{array}{l} \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}}) \to \ell^2(\Omega) \\ \theta \to d^*\theta : d^*\theta(x) = \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}} : e^- = x} \theta(e). \end{array} \right.$$

1. Vérifier que

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} \theta_1(e)\theta_2(e)$$

2. Montrer que d, d^* sont des opérateurs adjoints, i.e. pour tous $f \in \ell^2(\mathcal{V}), g \in \ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$,

$$\langle df, g \rangle_{\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})} = \langle f, d^* g \rangle_{\ell^2(\mathcal{V})}.$$

3. Vérifier que si v est un potentiel fixé sur a, Z et si i est le courant de a à Z correspondant, alors la loi d'Ohm peut être écrite $dv = ri$, et la loi des noeuds $d^*i(x) = 0 \ \forall x \notin (\{a\} \cup Z)$. Que dit la loi des cycles ?

Exercice 8 On reprend les notations de l'exercice précédent mais ici on suppose que les arêtes non orientées sont équipées de conductances $\{c(e), e\ in \mathcal{E}\}$. On étend la définition de conductance aux arêtes orientées : simplement si $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on léquipe de la conductance de l'arête non orientée. On va travailler avec un nouveau produit scalaire sur $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\langle \theta, \theta' \rangle_r = \frac{1}{2} \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} r(e)\theta(e)\theta'(e).$$

Pour $e \in \vec{\mathcal{E}}$ on note $\chi^e = \mathbb{1}_{\{e\}} - \mathbb{1}_{\{-e\}}$. On note enfin les sous-espaces de $\ell^2_-(\vec{\mathcal{E}})$:

$$\star = \mathrm{Vect} \left\{ \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}} : e^- = x} c(e)\chi^e, x \in \mathcal{V} \right\}, \qquad \Diamond = \mathrm{Vect} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \chi^{e_k}, e_1, ..., e_n \text{ cycle} \right\}$$

Montrer que $\star = \Diamond^\perp$, et retrouver alors le principe de Thomson.

Exercice 9 Montrer que si on identifie deux noeuds, alors la résistance effective entre a et z dans le nouveau graphe est inférieure à la résistance effective dans l'ancien.
Que se passe-t-il si on fait disparaître une arête existante entre deux points ?

Exercice 10 Retrouver la probabilité de ruine $\mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_N)$ (dans le cadre d'une marche simple non nécessairement symétrique) en utilisant l'analogie avec les circuits électriques.

Exercice 11 On considère un carré divisé en 3×3 cases ; et une marche aléatoire sur ces cases dont les pas sont tirés uniformément parmi les cases voisines ou diagonalement voisines. On note x la case en bas à gauche, y celle en haut à droite. Calculer $\mathbb{P}_x(\tau_y < \tau_x^+)$.
Calculer $\mathbb{E}_x[\tau_y]$.
Indice : On pourra penser à utiliser l'équivalence triangle-étoile.

Exercice 12 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe infini équipé de conductances $(c(e), e \in \mathcal{E})$, vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \sum_{(x,y)\in\mathcal{E}} c(x,y) < \infty.$$

On considère par ailleurs $(\mathcal{G}_n), (\mathcal{H}_n)$ deux suites croissantes de sous-graphes finis de $\mathcal{G}$ tels que pour tout n, $a \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{H}_n$, et $\bigcup \mathcal{G}_n = \bigcup \mathcal{H}_n = \mathcal{G}$. On note $Z_n = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n$, (resp. $Y_n = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_n$), et on note $\mathcal{G}_n^*$ (resp. $\mathcal{H}_n^*$) le graphe obtenu depuis $\mathcal{G}$ en identifiant tous les points de Z_n en un seul noeud z_n (resp. tous les points de Y_n en un seul noeud y_n). On note $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*)$ la résistance effective de a à z_n dans $\mathcal{G}_n^*$, (resp. $\mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$ la résistance effective de a à y_n dans $\mathcal{H}_n^*$).

1. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Z_n; \mathcal{G}_n^*), \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(a \leftrightarrow Y_n; \mathcal{H}_n^*)$$
existent dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ et qu'elles sont égales.
2. Montrer que la chaîne sur $\mathcal{G}$ correspondant à ce modèle de conductances est récurrente si et seulement si cette limite commune est infinie.

Exercice 13 Utiliser l'inégalité de Nash-Williams pour montrer que la marche simple sur $\mathbb{Z}^d, d \leq 2$ est récurrente.

Exercice 14 On considère un arbre d-régulier enraciné, infini, et la marche λ-biaisée sur cet arbre, i.e. telle que en un noeud v donné, la probabilité de remonter vers la racine est égale à $\frac{\lambda}{\lambda+d}$, tandis que la probabilité d'aller vers l'un des descendants de v est égale à $\frac{1}{\lambda+d}$.

1. Interpréter le modèle en termes de circuit électrique. Calculer la résistance équivalente entre la racine et la profondeur n de l'arbre, en fonction de n, d, λ.
2. Pour quelles valeurs de d, λ cette résistance tend-elle vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$? Retrouver alors le critère de récurrence de la marche en fonction de d, λ.
3. Pour quel type d'arbre peut-on généraliser ce type de raisonnement ?

Exercice 15 Un professeur possède n parapluies, on suppose qu'initialement il y en a k chez lui et $n-k$ dans son bureau. Il se déplace matin et soir, et ne prend avec lui un parapluie que s'il pleut (et qu'il peut le faire). On suppose qu'indépendamment, à chaque déplacement, il pleut avec probabilité p.

1. Modéliser le problème par une chaîne de Markov réversible et calculer la distribution stationnaire. Asymptotiquement, quelle proportion des trajets le professeur effectue-t-il sous la pluie sans son parapluie ?
2. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que n parapluies se trouvent au même endroit.
3. Calculer l'espérance du nombre de trajets nécessaires jusqu'à ce que le professeur se retrouve sous la pluie sans son parapluie.

Exercice 16 (urnes de Pólya)

On considère une urne de Pólya contenant initialement d boules de couleur distinctes. Au temps $t-1/2, t \geq 1$, on tire, indépendamment des étapes précédentes et uniformément, une boule de l'urne, on la replace dans l'urne et on y ajoute une boule de la même couleur.
On note $X_t(j)$ le nombre de boules de la couleur j qui ont été tirées jusqu'au temps t.

1. Montrer que pour tout $(n_1, ..., n_d)$ tel que $n_1 + ... + n_d = n$, on a
$$\mathbb{P}(X_n = (n_1, ..., n_d)) = \frac{\prod_{i=1}^d n_i!}{d(d+1)...(d+n-1)} \binom{n}{n_1, ..., n_j} = \frac{(d-1)!n!}{(d+n-1)!}.$$
Comment cette formule se simplifie-t-elle lorsque $d = 2$?
2. En déduire que $\frac{X_t}{t}$ tend en loi vers une Dirichlet de paramètres $(1, ..., 1)$ (i.e. de densité uniforme sur le simplexe $\{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}_+^d : x_1 + ...x_d = 1\}$).

Exercice 17 On suppose que $\mathcal{G}_n$ est le pavé $n \times ... \times n$ de $\mathbb{Z}^d$. Précisément, les noeuds de $\mathcal{G}_n$ sont $\mathcal{V}_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall i \in \{1, ..., d\}\ 1 \leq x_i \leq n\}$ et les arêtes $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{G}_n$ sont entre les noeuds de $\mathcal{V}_n$ qui sont plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$.
On munit les arêtes de $\mathcal{E}_n$ de conductances toutes égales à 1, et on note
$a = (1, ..., 1), z = (n, ..., n)$.

1. On considère $\Pi_k = \{(v, w) \in \mathcal{E}_n : ||v||_\infty = k, ||w||_\infty = k+1\}, k = 1, ..., n-1$. Montrer que pour tout $k = 1, ..., n-1$, Π_k est un ensemble de coupure, et que
$$\sum_{e \in \Pi_k} c(e) = |\Pi_k| = dk^{d-1}.$$
En déduire que
$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \geq \begin{cases} n-1 & \text{si } d = 1 \\ \frac{1}{2}\log(n-1) & \text{si } d = 2 \\ C_d := \frac{1}{d}\sum_{k \geq 1} k^{1-d} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$
2. Soit une urne de Pólya, avec initialement une boule de chaque couleur $1, ..., d$. On introduit comme dans l'exercice précédent le processus $(X_t, t \geq 0)$, et on note $\widetilde{X}_t = X_t + (1, ..., 1)$ de sorte que $\widetilde{X}_t(i)$ est le nombre de boules de couleur i dans l'urne au temps t. On introduit alors le courant I de a vers z, d'intensité 1. Sur les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i \leq n + d\}$ on définit
$$I(x, y) = \mathbb{P}(\exists t \in \{0, ..., n-1\} : \widetilde{X}_t = i, \widetilde{X}_{t+1} = j),$$
et pour les arêtes $\{(x, y) \in \mathcal{E}_n : \sum_{i=1}^d y_i > n + d\}$ on définit
$$I(x, y) = I((n+1, ..., n+1) - y, (n+1, ..., n+1) - x).$$
Soit $k \in \{1, ..., n\}$, montrer que pour tout $y \in B_n$ tel que $\sum_{i=1}^d y_i = k + d$, le courant entrant en y
$$\sum_{\{x : \sum_{i=1}^d x_i = k+d-1, x \sim y\}} I(x, y) = \frac{1}{\binom{k+d-1}{d-1}}.$$
En déduire que l'énergie $E(I)$ de ce courant vérifie
$$E(I) \leq \begin{cases} n & \text{si } d = 1 \\ 2\log(n) & \text{si } d = 2 \\ 2\ (d-1)!\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{d-1}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de d a-t-on $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$? Pour quelle(s) valeur(s) de d cette résistance effective tend-elle vers une limite finie lorsque $n \to \infty$?
4. Comment utiliser ces arguments pour démontrer que la marche sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d \leq 2$ et transiente si $d \geq 3$?