

Temps de mélange

Exercices 5

1 Temps d'atteinte

Pour X une chaîne de Markov irréductible sur Ω , et $a \in \Omega$ on note

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}, \quad \tau_a^+ := \inf\{t > 0 : X_t = a\}.$$

Exercice 1 Montrer que $a \rightarrow h(a) = \mathbb{E}_a \left[\sum_{x \in \Omega} \tau_x \pi(x) \right]$ est P -harmonique sur Ω et ne dépend donc pas de a .

Exercice 2 On suppose que la chaîne X de noyau P est irréductible, apériodique. Pour $a, b \in \Omega$ on note $Z_{ab} = \sum_{t \geq 0} (P^t(a, b) - \pi(b))$.

1. Montrer que pour tous $a, b \in \Omega$, Z_{ab} est bien définie. Que vaut $\sum_{b \in \Omega} Z_{ab}$?
2. On fixe $t_0 \in \mathbb{N}$ et on pose $S = \inf\{t \geq t_0 : X_t = a\}$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{S-1} \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} \right] = \pi(x) \mathbb{E}_a[S].$$

En déduire, en faisant tendre t_0 vers l'infini, que

$$Z_{aa} = \pi(a) \mathbb{E}_\pi[\tau_a].$$

3. On fixe à nouveau $t_0 \in \mathbb{N}$, et on pose $T = \inf\{t \geq \tau_b + t_0 : X_t = a\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}_a \left[\sum_{s=0}^{\tau_b-1} \mathbf{1}_{\{X_s=a\}} \right] + \sum_{s=0}^{t_0-1} P^s(b, a) = \pi(a) \mathbb{E}_a[T].$$

En déduire que

$$\pi(a)(\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a]) + Z_{ba} = \pi(a) [\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_\pi[\tau_a]],$$

et enfin que

$$Z_{aa} - Z_{ba} = \pi(a) \mathbb{E}_b[\tau_a]$$

4. Expliquer pourquoi la formule de la question précédente permet de redémontrer le résultat du premier exercice.

Exercice 3 On suppose que X est la marche simple sur un graphe \mathcal{G} connexe, avec $|\mathcal{V}| \geq 3$, et que v possède un unique voisin w . Que vaut $\mathbb{E}_v[\tau_w]$? Exprimer alors $\mathbb{E}_w[\tau_v]$ en fonction de $|\mathcal{E}|$.

Exercice 4 Soit \mathcal{T} l'arbre binaire de profondeur k , X la marche simple sur \mathcal{T} . Que vaut t_{hit} (on pourra commencer par montrer qu'il vaut $\mathbb{E}_x[\tau_y]$ lorsque x et y sont deux feuilles de l'arbre dont le seul ancêtre commun est la racine)?

Exercice 5 Montrer que si X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0, 1\}^d$, alors quelque soit $v \neq \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, on a

$$\mathbb{E}_v[\tau_{\mathbf{0}}] \sim_{d \rightarrow \infty} 2^{d+1}.$$

Il pourra être utile de considérer le problème équivalent pour l'urne d'Ehrenfest.

Exercice 6 Montrer que si X est une chaîne réversible

$$\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_c] + \mathbb{E}_c[\tau_a] = \frac{c_{\mathcal{G}}}{2} (\mathcal{R}(a \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(b \leftrightarrow c) + \mathcal{R}(c \leftrightarrow a)).$$

Cette égalité généralise celle obtenue pour le temps de trajet aller-retour à un temps de trajet faisant intervenir 3 points. Comment se généralise-t-elle à un temps de trajet faisant intervenir n points?

Exercice 7 Soient X une chaîne réversible et $x, a, b \in \Omega$, distincts.

1. On suppose la chaîne issue de x et on note $\tau_{ab} := \inf\{t \geq \tau_a : X_t = b\}$ Montrer que,

$$\tau_{ab} = \tau_b + \mathbf{1}_{\{\tau_b < \tau_a\}} \tau'_{ab},$$

où τ'_{ab} est indépendant de $\mathbf{1}_{\{\tau_b < \tau_a\}}$ et a la loi de τ_{ab} sous \mathbb{P}_b .

2. En déduire que

$$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow b) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)}.$$

Exercice 8 Soit $\tau_x^\# := \inf\{t \geq 0 : t \text{ pair}, X_t = x\}$ le premier temps *pair* d'atteinte de $x \in \Omega$ par une chaîne X réversible.

1. Montrer que la chaîne de noyau P^2 reste irréductible, apériodique, de distribution stationnaire π .

2. On définit $\tau_x^{\#, (0)} = 0$ et pour $m \geq 1$, $\tau_x^{\#, (2m)} := \inf\{t \geq 2m : t \text{ pair}, X_t = x\}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(P^{(2k)}(x, x) - \pi(x) \right) = \pi(x) \mathbb{E}_{P^{2m}(x, \cdot)} \left[\tau_x^\# / 2 \right],$$

et en déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(P^{(2k)}(x, x) - \pi(x) \right) = \pi(x) \frac{1}{2} \mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#].$$

3. En reprenant la preuve du résultat correspondant pour une chaîne paresseuse (et le résultat de l'exercice 15), montrer finalement que

$$t_{\text{mix}} \leq 4 \max_{x \in \Omega} \mathbb{E}_\pi[\tau_x^\#] + 1$$

2 Chaînes transitives

On dit que la chaîne X de noyau P sur Ω est transitive ssi pour toute paire $(x, y) \in \Omega$ il existe une bijection $\phi_{(x,y)} : \Omega \rightarrow \Omega$ telle que

$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \quad \forall u, v \in \Omega \quad P(u, v) = P(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

Exercice 9 Montrer qu'une marche sur un groupe est une chaîne transitive.

Exercice 10 Montrer que si X est une chaîne transitive et irréductible sur Ω fini, son unique distribution stationnaire est la distribution uniforme sur Ω .

Exercice 11 Montrer que si X est irréductible, transitive sur Ω fini, $\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}$ ne dépend pas de x .

Exercice 12 Montrer que si X est irréductible et transitive, de noyau P , la chaîne retournée dans le temps \widehat{X} est également irréductible et transitive. Montrer alors que si π est la mesure uniforme sur Ω ,

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} = \|\widehat{P}^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}.$$

Exercice 13 Montrer que pour une chaîne X irréductible et transitive sur Ω fini on a quelque soit $b \in \Omega$,

$$t_\circlearrowleft = \mathbb{E}_\pi[\tau_b].$$

En déduire que pour une telle chaîne $t_{\text{hit}} \leq 2t_\circlearrowleft$.

Exercice 14 On pourra faire appel aux résultats démontrés dans l'exercice 6.

On suppose que le réseau conductances $\mathcal{G}, (c(e), e \in \mathcal{E})$ est transitif, i.e. pour toute paire $(x, y) \in \mathcal{V}$ il existe une bijection $\psi_{(x,y)} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ telle que

$$\phi_{(x,y)}(x) = y, \quad \forall u, v \in \mathcal{V} \quad c(u, v) = c(\phi_{(x,y)}(u), \phi_{(x,y)}(v)).$$

1. Montrer que la chaîne correspondante est transitive.
2. Soient $a, b \in \mathcal{V}$ fixés, $\psi = \psi_{(a,b)}$ la permutation des noeuds de \mathcal{V} associée. On note $a_0 = a, a_1 = \psi(a) = b, \dots, a_k = \psi(a_{k-1}), \dots, a_n = a$ l'orbite de a pour la permutation ψ .

Montrer que pour une telle chaîne

$$n\mathbb{E}_a[\tau_b] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i+1}}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{a_i}[\tau_{a_{i-1}}] = n\mathbb{E}_b[\tau_a].$$

3. En déduire, pour une telle chaîne avec \mathcal{V} fini, l'expression de $\mathbb{E}_a[\tau_b]$ en fonction de $c(a)$ et $\mathcal{R}(a \leftrightarrow b)$.

3 Valeurs propres de P

Exercice 15 A l'aide de la décomposition spectrale de P^t , où P est le noyau d'une chaîne irréductible et réversible, montrer que $t \rightarrow P^{2t}(x, x)$ décroît.

Si de plus la chaîne est paresseuse, montrer de manière similaire que $t \rightarrow P^t(x, x)$ décroît.

Exercice 16 Soit X une chaîne irréductible, apériodique et réversible, de distribution stationnaire π . On suppose que les $(f_i)_{i=1}^{|\Omega|}$ constituent une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ de fonctions propres pour P associées aux $(\lambda_i)_{i=1}^{|\Omega|}$. On suppose que $\lambda_1 = 1$, que $W \sim \pi$, et que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[f(W)] = \langle f, f_1 \rangle_\pi$.
2. Que vaut $\mathbb{E}[f_j(W)]$, pour $j = 1, \dots, |\Omega|$?
3. Pour $t \geq 0$, que vaut $\mathbb{E}[P_t f(W)]$?
4. Calculer $\text{Var}[P^t f(W)]$ en fonction des $\text{Var}(f_j(W))$, $j = 1, \dots, |\Omega|$. En déduire que

$$\text{Var}[P^t f(W)] \leq (1 - \gamma^*)^{2t} \text{Var}[f(W)].$$

Exercice 17 Soit X_1, \dots, X_d des chaînes de Markov irréductibles, de noyaux respectifs P_1, \dots, P_d sur les espaces respectifs $\Omega_1, \dots, \Omega_d$. Si w est une distribution sur $\{1, \dots, d\}$ on considère alors X la chaîne produit de noyau P sur $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$:

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^d w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}}$$

1. Montrer que si $\lambda^{(j)}$ est v.p. de P_j associée à la fonction propre $f^{(j)}$, alors si on définit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \prod_{j=1}^d f^{(j)}(x_j)$ est une fonction propre de P associée à la valeur propre $\lambda = \sum_{j=1}^d w_j \lambda^{(j)}$.
2. Montrer que si γ_j est le trou spectral de X_j alors celui de X vérifie $\gamma = \min_{j=1, \dots, d} w_j \gamma_j$.
3. Calculer les valeurs propres lorsque X est la marche simple paresseuse sur l'hypercube $\{0, 1\}^d$. En déduire le trou spectral absolu de cette chaîne.