Marches aléatoires en milieu aléatoire

Jc Mourrat*
sous la direction de G. Ben Arous†

1 Marche aléatoire en milieu aléatoire : le film

Pour représenter un environnement peu régulier (par exemple avec des trous), une manière “classique” de procéder est de considérer que le milieu est le résultat d'une expérience aléatoire (les trous sont répartis “au hasard”). On peut alors s'intéresser aux propriétés d'une diffusion dans un tel milieu. L'aléa du modèle proposé est dans ce cas double : d'une part le milieu est tiré au sort, d'autre part on effectue une marche aléatoire dans ce milieu. Cette *marche aléatoire en milieu aléatoire* peut servir par exemple à représenter une molécule de type A baignant dans une solution remplie de molécules de type B : la molécule de type A se déplace de manière désordonnée au sein d'un environnement lui-même peu structuré. Une des quantités auxquelles on aimerait accéder est la probabilité qu'au temps t la particule de type A ait rencontré une particule de type B (pour réagir avec elle), ou au comportement asymptotique pour t grand de cette quantité.

Précisons un modèle de pièges. On se place sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Un *environnement* est la donnée d'un élément $\omega \in \Omega = \{0;1\}^{\mathbb{Z}^d}$: on dira qu'il y a un piège en $x \in \mathbb{Z}^d$ si $\omega(x) = 1$; qu'il est sans piège sinon. Pour la loi de ω, on choisit le produit de lois de Bernoulli de paramètre q, que l'on notera $\mathbb{P}$. C'est dire qu'indépendamment pour chaque point, $x \in \mathbb{Z}^d$ a une probabilité q d'être un piège. On supposera que q est inférieur à la probabilité de percolation critique, de telle sorte qu'il existe toujours une composante connexe infinie sans piège. On pose enfin $(X_t)_{t\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ partant de 0, de loi $\mathbf{P}_0$.

La quantité que l'on se propose d'étudier est la probabilité de survie d'une particule, plus particulièrement aux temps longs. On note le temps de survie $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{O}(\omega)\}$, où $\mathcal{O}(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega(x) = 1\}$ désigne l'ensemble des pièges. A ce stade, deux approches sont possibles :

– Soit on cherche l'asymptotique pour une réalisation de l'environnement *fixée*, c'est à dire un équivalent pour un environnement donné

*mourrat (α) ens (.) fr
†Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, gerard (.) benarous (α) epfl (.) ch

de $p(t,\omega) := \mathbf{P}_0[\tau(\omega) > t]$ pour $t \to \infty$. On parlera de l'*asymptotique presque sûre* (en anglais *quenched*).
– Soit on calcule la moyenne sur *toutes* les réalisations possibles de l'environnement, c'est à dire qu'on considère $\langle p(t)\rangle := \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}_0[\tau(\omega) > t]$, puis on regarde le comportement quand $t \to +\infty$. On parlera par la suite de l'*asymptotique en moyenne* (en anglais *annealed*).

Question 1. *Les deux approches donnent-elles les mêmes résultats ?*

Comme le montrent les deux théorèmes suivants, la réponse à cette question est "non".

Théorème 1.1 (Donsker, Varadhan [DV79])**.** *La probabilité de survie en moyenne vérifie :*

$$-\log\langle p(t)\rangle \sim c(d,q)t^{d/(d+2)} \quad (t \to \infty)$$

où $c(d,q) > 0$ ne dépend que de la dimension de l'espace d et de la densité des pièges q.

Théorème 1.2 (Sznitman [Sznit], Antal [An95])**.** *Conditionnellement au fait que l'origine fait partie d'une composante connexe sans pièges infinie, on a presque sûrement :*

$$-\log p(t,\omega) \sim \tilde{c}(d,q)\frac{t}{(\log t)^{2/d}} \quad (t \to \infty)$$

où $\tilde{c}(d,q) > 0$ est une constante (déterministe) ne dépendant que de la dimension de l'espace d et de la densité des pièges q.

On peut avoir une compréhension fine du comportement des particules en temps long. Voyons en effet la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit τ_R le temps de sortie de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R. On a :*

$$-\log \mathbf{P}_0[\tau_R > t] \sim \lambda_R t \quad (t \to \infty)$$

avec

$$\lambda_R \sim \frac{\lambda_1}{R^2} \quad (R \to \infty)$$

De manière informelle, on a

$$-\log \mathbf{P}_0[\tau_R > t] \simeq \lambda_1 \frac{t}{R^2}$$

En utilisant ce fait, on peut montrer que le "scénario qui compte", c'est-à-dire le comportement des particules qui suffit à obtenir les asymptotiques précédentes, est le suivant :

– Pour l'asymptotique en moyenne, les particules qui contribuent sont celles qui naissent dans une clairière de taille de l'ordre de $t^{1/(d+2)}$.
– Pour l'asymptotique presque sûre, les particules qui comptent sont celles qui parviennent à trouver une clairière de taille $(\log t)^{1/d}$. On peut également montrer qu'une telle clairière se trouve à une distance de l'ordre de t du point de départ (en fait un tout petit peu moins), ce qui correspond à un événement fortement atypique : la marche commence par avoir une trajectoire quasiment balistique avant de trouver la clairière dont on vient de préciser la taille.

Question 2. *On vient de voir combien les deux asymptotiques sont différentes, et correspondent à des comportement typiques très différents. Lequel de ces deux points de vue est celui qui intéresse le physicien ?*

Une réponse raisonnable pourrait être la suivante : c'est l'asymptotique presque sûre qui répond vraiment au problème physique, mais l'asymptotique en moyenne est généralement plus facile à calculer et offre une première possibilité pour aborder un problème. Historiquement c'est effectivement le cas pour l'exemple précédent. C'est ce qui était proposé par exemple par G. Ben Arous et A. Ramírez dans [BR00], où un processus de saturation est analysé, initialement introduit pour répondre à un problème de gestion de déchets nucléaires proposé par EDF.

Mais reprenons l'analogie de la réaction chimique. Si on réalise l'expérience, un très grand nombre de particules sont en jeu en différents points de l'espace. Le fait d'observer le milieu en différents points très éloignés va créer un effet de moyenne, et dans ce cas, c'est plutôt l'asymptotique *annealed* qui est significative. En fait l'approche à privilégier semble dépendre de la taille de la population considérée.

Les questions qui se posent sont les suivantes : à partir de quelle taille de population cette moyennisation spatiale a-t-elle lieu ? Y a-t-il des comportements intermédiaires entre les deux précédemment explicités ? Pour y répondre, introduisons la probabilité de survie moyennée sur une boîte de taille L $\Lambda_L = \{x \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|x\|_\infty \leq L\}$, où $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$:

$$p_L(t,\omega) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} p(x,t,\omega)$$

($p(x,t,\omega)$ désigne la probabilité de survie jusqu'au temps t de la marche aléatoire simple partant de x dans l'environnement ω)

Il s'agit maintenant de regarder comment se comporte $p_L(t,\omega)$ quand L et t tendent simultanément vers l'infini. Si L varie très peu comparé à t, on s'attend à retrouver l'asymptotique presque sûre. A l'inverse, si L croît suffisamment vite, on espère retrouver l'asymptotique en moyenne.

La question qui se pose maintenant est de savoir dans quelles échelles on peut espérer que ces résultats soient vrais. On a dit précédemment que, dans le cas de l'asymptotique presque sûre, il s'agissait de trouver des clairières de taille $(\log t)^{1/d}$, lesquelles se trouvent en gros à distance t de l'origine. Si on prend une boîte de taille plus grande que t, on va donc trouver des clairières plus grandes que $(\log t)^{1/d}$ dans la boîte. Il est donc naturel de supposer $L(t) \leq t$. En fait, cette condition est suffisante :

Théorème 1.4. *Si $L(t) \leq t$, alors on a presque sûrement :*

$$-\log p_L(t,\omega) \sim \tilde{c}(d,q)\frac{t}{(\log t)^{2/d}}$$

Pour ce qui est de l'asymptotique en moyenne, il s'agit en revanche de trouver des clairières de taille de l'ordre de $t^{1/(d+2)}$. Il est donc naturel de poser :

$$L(t) = \exp(\gamma t^{d/(d+2)})$$

car dans ce cas par le même calcul que précédemment, les clairières sont du bon ordre de grandeur. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 1.5. *Si $\gamma > \gamma_1$, alors on a une loi des grands nombres :*

$$\frac{p_L(t,\omega)}{\langle p(t)\rangle} \to 1$$

En particulier, on a :

$$-\log p_L(t,\omega) \sim c(d,q)t^{d/(d+2)}$$

Reste à voir les régimes intermédiaires...

Théorème 1.6. *Si $\gamma < \gamma_1$, alors la loi des grands nombres cesse d'être vérifiée :*

$$\frac{p_L(t,\omega)}{\langle p(t)\rangle} \to 0$$

Il existe une fonction $a(\gamma)$ vérifiant $a(\gamma_1) = 1$ et $a(\gamma) \xrightarrow[\gamma\to 0]{} +\infty$ telle que :

$$-\log p_L(t,\omega) \sim a(\gamma)c(d,q)t^{d/(d+2)}$$

Théorème 1.7. *Si $\log L \ll t^{d/(d+2)}$ et $t \leq L$, alors on a l'asymptotique suivante :*

$$-\log p_L(t,\omega) \sim \tilde{c}(d,q)\frac{t}{(\log L)^{2/d}}$$

Ce dernier résultat se comprend facilement : les particules qui contribuent à cette asymptotique sont celles qui sont nées dans la clairière la plus grande de la boîte.

On est maintenant en mesure de décrire les comportements typiques suivant les différentes échelles de temps. Donnons-nous en effet une grande boîte, dans laquelle naît une particule en chaque point. Aux temps courts, dont l'échelle est précisée par le théorème 1.5, la particule typique est née dans une clairière de taille $t^{1/(d+2)}$. Le temps passe, et arrive le seuil précisé par γ_1. La taille des clairières typiques est alors modifiée par le facteur $a(\gamma)$. Ensuite, on passe dans le régime du théorème 1.7 : la particule typique qui a survécu jusqu'à ce point est celle qui est née dans la plus grande clairière de la boîte. Enfin, dans l'échelle du théorème 1.4, on passe dans le régime presque sûr : les (rares !) particules qui ont réussi à survivre sont alors celles qui sont parties à une distance de l'ordre de t chercher une clairière dont le rayon est de l'ordre de $(\log t)^{1/d}$. L'aventure paye sur le (très) long terme...

2 Lois limites stables

Regardons plus précisément ce qui se passe sur $\mathbb{Z}$. Les pièges séparent des clairières, et on peut dire que le placement des pièges revient à tirer au sort indépendamment des tailles de clairières de loi géométrique. La probabilité de survie dans une clairière donnée est environ :

$$\mathbf{P}[\tau > t] \simeq \exp\left(-\lambda \frac{t}{R^2}\right)$$

où R est la taille de la clairière. Ainsi, regarder la probabilité de survie moyenne sur une grande échelle revient à regarder des sommes de la forme :

$$S_N(t) = \sum_{i=1}^{N} e^{tX_i}$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes reliées aux tailles des clairières, de loi géométrique, et N mesure l'échelle de l'observation. Pour simplifier, on suppose que la loi des X_i est de la forme :

$$\mathbb{P}[X > x] \simeq \exp\left(-c\frac{1}{(-x)^\rho}\right) \qquad (x \to 0^-)$$

ce qui revient à remplacer une loi géométrique par une loi exponentielle. ρ est un paramètre qui vaut $1/2$ pour le cas exposé dans $\mathbb{Z}$.

Comme précédemment, la question est de savoir comment se comporte la somme quand N et t tendent simultanément vers l'infini. On a :

$$\mathbb{E}[S_N(t)] = Ne^{-H(t)}$$

où $H(t) = -\log \mathbb{E}[e^{tX}]$. Il semble donc naturel de poser une normalisation de la forme :

$$N \sim e^{\lambda H(t)}$$

En fait on a besoin d'une version légèrement modifiée de H, équivalente à H_0 en l'infini ($H \sim H_0$). On posera donc plutôt :

$$N \sim e^{\lambda H_0(t)}$$

Alors on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Si $\lambda > \lambda_2$, alors un théorème central limite est vérifié :*

$$\frac{S_N(t) - \mathbb{E}[S_N(t)]}{\sqrt{Var[S_N(t)]}} \xrightarrow[t \to \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$$

Si $\lambda < \lambda_2$, alors il existe $A(t)$, $B(t)$ tels que :

$$\frac{S_N(t) - A(t)}{B(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{(loi)} \mathcal{F}_\alpha$$

où $\mathcal{F}_\alpha$ est une loi stable de paramètre α.

On peut montrer que α tend vers 2 quand λ tend vers λ_2. De plus, $\alpha = 1$ correspond à un $\lambda = \lambda_1$ qui est le point de transition pour la loi des grands nombres : elle est vérifiée si $\lambda > \lambda_1$, auquel cas on peut choisir $A(t) = \mathbb{E}[S_N(t)]$; ne l'est pas si $\lambda < \lambda_1$, où on peut prendre $A(t) = 0$.

Ce résultat est beaucoup plus fin que les résultats obtenus pour la marche aléatoire du chapitre précédent. La question qui se pose naturellement est donc la suivante :

Question 3. *A-t-on une convergence similaire de p_L vers des lois stables pour la marche aléatoire en milieu aléatoire ?*

La réponse à cette question paraît très (trop ?) délicate à traiter. En dimension 1, comme on l'a vu, on peut expliciter les choses et mener les calculs, et on montre effectivement un résultat similaire (bien qu'il faille changer légèrement la loi stable, cette petite modification étant due au caractère discret de la marche). Mais en dimension supérieure, les choses se compliquent nettement, la forme et la taille des clairières n'est pas du tout claire, ni même leur délimitation…

Ce résultat sur les sommes de variables aléatoires indépendantes n'en garde pas moins un grand intérêt. De manière purement théorique, il relie d'un côté ($N \to \infty$, t (presque) constant) les théorèmes du genre loi des grands nombres et théorème central limite, et de l'autre les résultats de théorie des extrêmes (N (presque) constant, $t \to \infty$). Il montre de plus que les lois stables sont sans doute appelées à jouer un rôle plus important que de simples cas pathologiques du théorème central limite.

On peut également montrer que cette description en termes de lois stables s'applique parfaitement dans le cadre du Random Energy Model.

3 Analyse spectrale du modèle de Bouchaud

Considérons maintenant un autre type de marche aléatoire en milieu aléatoire. Cette fois, il ne s'agit plus de "tuer" une particule, mais de la ralentir ou de l'accélérer suivant l'endroit où elle se trouve. Plus précisément, pour chaque point $x \in \mathbb{Z}^d$, on tire au sort un temps d'attente aléatoire τ_x, tel que les $(\tau_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ forment une famille de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées.

On définit le taux de saut d'un point x à un de ses voisins y par :

$$w_{x,y} = \tau_x^{-(1-a)}\tau_y^a$$

où $a \in [0,1]$ est un paramètre fixé. On peut exprimer le générateur de la chaîne de Markov de la façon suivante :

$$Lf(x) = \sum_{y\sim x} w_{x,y}(f(y) - f(x))$$

Si $a = 0$, la chaîne de Markov a le comportement suivant : arrivé au site x, on attend un temps exponentiel de paramètre τ_x avant de choisir uniformément un voisin vers qui aller. Aux changements de temps près, on retrouve donc une marche aléatoire simple.

La situation est moins évidente si $a \neq 0$. En effet, la marche arrivée en un site où τ est très grand (devant les temps d'attente de ses voisins) aura tendance à rester moins longtemps sur ce site que dans le cas où $a = 0$, mais une fois sur un site voisin, aura une forte tendance à retourner sur le site précédent.

On ne s'intéresse pas ici à la question (légitime) de savoir quelles hypothèses sur la loi de τ garantiraient un résultat de "trivialité" (au sens où l'effet des τ disparaîtrait à la limite), mais plutôt au comportement de la marche dans un milieu fortement inhomogène. Pour cette raison, on fait en sorte que τ puisse prendre de très grandes valeurs avec une bonne probabilité, disons $\mathbb{E}[\tau] = \infty$. Plus précisément, on choisit la loi de τ comme étant une loi stable de paramètre α, avec $0 < \alpha < 1$.

Moyennant un rééchellement approprié, on peut montrer qu'en dimension $d = 1$ la marche converge vers un processus appelé diffusion FIN (de L.R.G. Fontes, M. Isopi et C.M. Newman), et ce quelle que soit la valeur de a. En dimension supérieure, on peut également identifier le processus limite, mais seulement dans le cas où $a = 0$. A partir de ces résultats de convergence, on peut en déduire des propriétés de vieillissement (pour une introduction au sujet, on pourra consulter [BČ06]).

Une idée à développer est d'attaquer le problème $a \neq 0$ sous un angle assez différent de l'approche "trajectorielle", à savoir étudier le spectre du générateur. Deux papiers d'A. Bovier et A. Faggionato vont dans ce sens. Le premier ([BF05]) traite de l'étude spectrale du modèle de Bouchaud dans le cas du graphe complet. Dans ce cas, un calcul explicite permet d'accéder au spectre du générateur (et aux vecteurs propres associés) et permet d'en déduire des propriétés de vieillissement. Quant au second ([BF06]), il s'agit de mener l'étude du haut du spectre du générateur de la marche de Sinaï sur $\mathbb{Z}$, qui permet de montrer des résultats comparables. Une étude similaire semble possible dans le cas du modèle de Bouchaud sur $\mathbb{Z}$, comme peuvent nous en convaincre ces lignes tirées de [BČ06] :

"What is the behaviour of the edge of the spectrum for the generator of the dynamics ? This might be close to, but easier than the same question solved for Sinaï's random walk by [BF06]".

Reste à montrer que cette affirmation est vraie, puis à prolonger la méthode en dimension supérieure !

Références

[An95] P. Antal. Enlargement of obstacles for the simple random walk, *Annals of Probabability* **23** 1061-1101 (1995).

[BBM05] G. Ben Arous, L. Bogachev et S. Molchanov, Limit theorems for sums of random exponentials, *Probab. Theory Relat. Fields*, **132** (4), 579-612 (2005).

[BČ06] G. Ben Arous et J. Černý. Dynamics of trap models. A paraître dans *Les Houches summer school lecture notes*, Elsevier (2006).

[BMR05] G. Ben Arous, S. Molchanov et A.F. Ramírez. Transition from the annealed to the quenched asymptotics for a random walk on random obstacles, *Annals of Probability.* **33** (6), 2149-2187 (2005).

[BR00] G. Ben Arous et A.F. Ramírez. Asymptotic survival probabilities in the random saturation process, *Annals of Probability* **28** (4), 1470-1527.

[BF05] A. Bovier et A. Faggionato. Spectral characterisation of aging : the REM-like trap model. *Ann. Appl. Probab.* **15** (3), 1997-2037 (2005).

[BF06] A. Bovier et A. Faggionato. Spectral analysis of Sinaï's walk for small eigenvalues. *WIAS Preprint 1047.*

[DV79] M. Donsker et S.R.S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** 721-747 (1979).

[Sznit] A.S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer-Verlag, Berlin (1998).

Et aussi mon rapport de magistère complet disponible à l'adresse suivante : `www.eleves.ens.fr/home/mourrat/magistere.pdf`.