

Le théorème de la section hyperplane de  
Lefschetz

Rémi Côme  
&  
Sylvain Douteau

Sous la direction de Henri Guenancia

2013

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Homologie singulière</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Cycles, bords . . . . .	5
1.3 Groupes d'homologie . . . . .	7
1.4 Type d'homotopie . . . . .	8
1.5 Suite exacte longue . . . . .	9
1.6 Cohomologie . . . . .	10
1.7 Dualité . . . . .	11
1.8 Homologie cellulaire . . . . .	12
<b>2 Théorie de Morse</b>	<b>14</b>
2.1 Lemme de Morse . . . . .	14
2.2 L'exemple du tore . . . . .	16
2.3 Pseudo-gradient . . . . .	17
2.4 Cas 1 : pas de points critiques . . . . .	17
2.5 Cas 2 : traversée d'un point critique . . . . .	18
2.6 Globalisation . . . . .	22
<b>3 Théorème de Lefschetz</b>	<b>24</b>
3.1 L'espace projectif $\mathbb{P}^n$ . . . . .	24
3.2 Variétés algébriques . . . . .	24
3.3 Plongement de Veronese . . . . .	25
3.4 Fonction distance . . . . .	26
3.5 Théorème d'Andreotti-Frankel . . . . .	27
3.6 Le théorème de Lefschetz . . . . .	29
<b>4 Exemples et applications</b>	<b>30</b>
4.1 Homologie d'une hypersurface . . . . .	30
4.2 Cas des intersections complètes . . . . .	31
4.3 Groupes de Picard . . . . .	31
4.4 Intérêt en géométrie algébrique . . . . .	32
<b>Références</b>	<b>33</b>

## Introduction

La géométrie algébrique est la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des *variétés algébriques*. Essentiellement, une variété algébrique complexe est le lieu des zéros d'un ensemble de polynômes complexes à plusieurs indéterminées. Par exemple, il peut s'agir d'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^n$  (on parlera alors de *variété affine*), ou de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  (*variété projective*). Les variétés que nous considérerons seront toutes *lisses*, c'est-à-dire qu'elles seront également des variétés différentielles.

L'intérêt du théorème de Lefschetz est qu'il relie la structure algébrique de ces variétés à leurs propriétés topologiques. Ce faisant, il connecte trois grands domaines des mathématiques : géométrie algébrique, topologie algébrique et géométrie différentielle.

**Théorème** (Lefschetz - section hyperplane). *Soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une variété projective de dimension complexe  $n$  et  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{P}^N$ . Alors le morphisme entre groupes d'homologie induit par l'inclusion*

$$H_i(V \cap H; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(V; \mathbb{Z})$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq n - 2$ , et est surjectif pour  $i = n - 1$ .*

La topologie de  $V$  est donc étroitement reliée à celle de ses sections hyperplanes. Ce résultat permet de comprendre la topologie d'une large classe de variétés algébriques comme les intersections complètes, ou plus généralement les sections hyperplanes (itérées) de variétés projectives déjà connues.

La preuve que nous exposerons ici est dûe à Andreotti et Frankel ; elle fera apparaître le théorème de Lefschetz comme conséquence du

**Théorème** (Andreotti-Frankel). *Soit  $V \subset \mathbb{C}^N$  une variété affine de dimension réelle  $2n$ . Alors :*

$$H_i(V; \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour tout } i > n$$

Autrement dit, une variété affine a moitié moins d'homologie que ce à quoi on pourrait s'attendre.

Ce mémoire sera divisé en trois grandes parties, chacune correspondant à un domaine des mathématiques : topologie algébrique, géométrie différentielle et géométrie algébrique.

## Topologie algébrique : homologie singulière

A chaque espace topologique  $X$ , on associe des groupes  $H_i(X; \mathbb{Z})$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) appelés *groupes d'homologie singulière*, qui contiennent beaucoup d'information sur la structure topologique de l'espace. Les groupes d'homologie permettent de déterminer si deux espaces sont homéomorphes, ou plus généralement s'ils ont le même type d'homotopie.

## Géométrie différentielle : théorie de Morse

Si  $M$  est une variété différentielle et  $f$  une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , on étudie comment change le type d'homotopie des ensembles de sous-niveau  $M^a = f^{-1] - \infty; a]$  au fur et à mesure que l'on monte dans la variété (cf. figure 1).

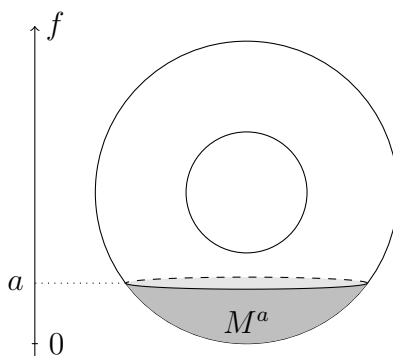


FIGURE 1 – L'exemple du tore :  $f$  est la fonction hauteur sur  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$

Lorsque  $a$  passe une valeur critique  $c$  de  $f$ , le type d'homotopie de  $M^a$  change : on verra que ce changement revient à attacher au sous-niveau  $M^{c-\varepsilon}$  une « cellule », c'est à dire un disque dont la dimension est déterminée par le comportement local de  $f$  (cf. figure 2).

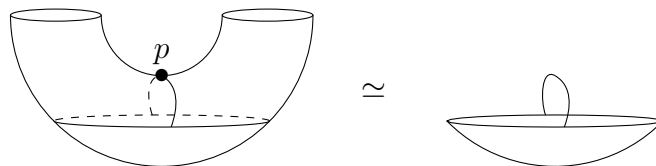


FIGURE 2 – Exemple du tore : passage du point critique  $p$

En recollant toutes ces cellules entre elles, la théorie de Morse montre que  $M$  a le même type d'homotopie qu'une structure appelée *CW-complexe*, dont il est relativement aisé de calculer les groupes d'homologie *via* la théorie de l'homologie cellulaire.

### Géométrie algébrique : théorème de Lefschetz

Lorsque  $M \subset \mathbb{R}^N$ , on peut appliquer la théorie de Morse en choisissant comme fonction  $f$  le carré de la distance à un point  $p$ , pour  $p$  bien choisi :

$$\begin{aligned} L_p : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \|q - p\|^2 \end{aligned}$$

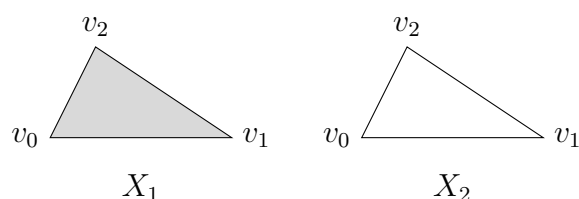
Si  $M$  est une variété affine de dimension réelle  $2n$ , on verra que les points critiques de  $L_p$  sont d'indice au plus  $n$ . Ceci implique alors directement le théorème d'Andreotti-Frankel, et donc le théorème de Lefschetz.

# 1 Homologie singulière

## 1.1 Introduction

Dans toute cette partie,  $X$  désignera un espace topologique. Le but de la topologie algébrique est d'associer à  $X$  certains invariants qui caractérisent la structure topologique de  $X$ .

Par exemple, on souhaite pouvoir faire une différence entre un triangle dont l'intérieur est plein, et un dont l'intérieur est vide.



Topologiquement parlant, ces deux espaces n'ont rien à voir l'un avec l'autre : par exemple, le premier est simplement connexe alors que l'autre ne l'est pas.

Si on oriente le triangle  $[v_0, v_1, v_2]$ , on peut écrire son bord comme la somme formelle des segments orientés  $[v_0, v_1] + [v_1, v_2] - [v_0, v_2]$  (on choisit d'écrire les sommets dans l'ordre croissant).

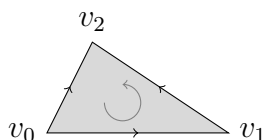


FIGURE 3 – Triangle orienté

Dans  $X_1$ , le cycle  $[v_0, v_1] + [v_1, v_2] - [v_0, v_2]$  peut s'écrire comme le bord d'une surface ; dans  $X_2$ , ceci n'est pas possible. C'est cette différence que l'on souhaite mesurer par la suite.

## 1.2 Cycles, bords

Si  $v_0, \dots, v_n$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on peut généraliser la notion de triangle en introduisant le  $n$ -simplexe orienté :

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0 \text{ et } \sum_i t_i = 1 \right\}$$

Si  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  est continue, on dira par abus de langage que  $\sigma$  est un  $n$ -simplexe inclus dans  $X$ . On introduit alors  $C_n(X)$  le groupe abélien libre engendré par les  $n$ -simplexes de  $X$  ; les éléments de  $C_n(X)$  sont les  $n$ -chaînes de  $X$ .

Par analogie avec le 1.1, on peut définir le bord de  $\sigma$  :

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$$

où  $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$  est le  $(n-1)$ -simplexe orienté défini par  $v_0, \dots, v_n$  avec le «  $v_i$  » en moins. On étend naturellement  $\partial$  en un morphisme

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

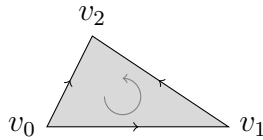
appelé *morphisme de bord*.

*Remarque.* Si  $\sigma$  est une 0-chaîne (*i.e.* une somme de points), on pose  $\partial\sigma = 0$ .

**Définition.** Soit  $\sigma$  un  $n$ -simplexe de  $X$ .

- Si  $\partial\sigma = 0$ , on dira que  $\sigma$  est un *cycle*.
- S'il existe une  $(n+1)$ -chaîne  $\alpha$  tel que  $\sigma = \partial\alpha$ , on dira que  $\sigma$  est un *bord*.

*Exemple.* Reprenons le cas du 1.1 avec  $X = \Delta^2$ . Considérons le 2-simplexe  $\sigma = id$  (*i.e.* le triangle tout entier).



On retrouve alors  $\partial\sigma = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ . De plus :

$$\partial([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) = v_2 - v_1 - (v_2 - v_0) + v_1 - v_0 = 0$$

$[v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$  est donc à la fois un cycle et un bord.

**Proposition 1.2.1.** *Tout les bords sont des cycles. De manière équivalente :*

$$\text{Im } \partial \subset \text{Ker } \partial$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer par un calcul direct que  $\partial\partial = 0$ . □

### 1.3 Groupes d'homologie

En suivant nos observations de la partie 1.1, on souhaite savoir si  $X$  contient des cycles qui ne sont pas des bords. Ceci nous mène à la

**Définition.** On définit le  $n$ -ème groupe d'homologie singulière de  $X$  (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) par :

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker}(\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))}{\text{Im}(\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X))}$$

Intuitivement,  $H_n(X, \mathbb{Z})$  compte le nombre de  $n$ -cycles qui ne sont pas des bords.

*Remarque.* Il s'agit d'une notion purement algébrique : si l'on a une suite longue

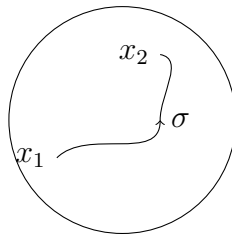
$$\cdots \xrightarrow{d} A_{n+1} \xrightarrow{d} A_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

vérifiant  $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$ , on dit que les  $A_n$  forment un *complexe chaîné*. Pour mesurer le défaut d'exactitude de la suite, il est alors naturel d'introduire les groupes d'homologie correspondants :

$$H_n = \frac{\text{Ker}(d : A_n \rightarrow A_{n-1})}{\text{Im}(d : A_{n+1} \rightarrow A_n)}$$

*Exemple 1.* Si  $X$  est connexe,  $H_0(X; \mathbb{Z})$  ne comporte qu'une seule classe d'équivalence. En effet, si  $x_1, x_2 \in X$ , il suffit d'exhiber un chemin  $\sigma$  reliant  $x_1$  à  $x_2$  pour écrire  $x_1 = x_2 + \partial\sigma$ . Plus généralement, on a :

$$H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\# \text{composantes connexes de } X}$$

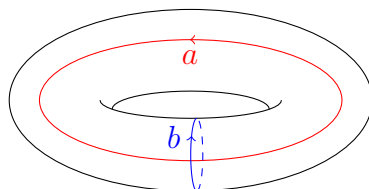


*Exemple 2.* Si  $X = \{x_0\}$ , les  $C_n(X)$  ne comportent qu'un seul élément (l'application  $\Delta^n \rightarrow \{x_0\}$ ). On vérifie alors facilement que :

$$H_n(\{x_0\}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



*Exemple 3.* On verra plus loin que  $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ . Intuitivement, à homotopie près, il n'y a que deux lacets indépendants sur le tore :



*Remarque.* Plutôt que d'étudier les  $n$ -chaînes  $\sum_i n_i \sigma_i$  avec  $n_i \in \mathbb{Z}$ , on pourrait considérer  $C_n(X; G)$  le groupe des  $\sum_i g_i \sigma_i$ , avec les  $g_i$  pris dans n'importe quel groupe abélien  $G$ . Les groupes d'homologie correspondants sont appelés groupes d'homologie à coefficients dans  $G$ , notés  $H_n(X; G)$ .

*Remarque.* On peut aussi définir une notion de *groupes d'homotopie*, qui généralise celle du groupe fondamental  $\pi_1(X)$  (cf. [3]). Les groupes d'homologie sont moins « fins » que les groupes d'homotopie : par exemple, le théorème d'Hurewicz démontre que  $H_1(X; \mathbb{Z})$  est seulement l'abélianisé de  $\pi_1(X)$ . Cependant, l'homologie de  $X$  est souvent plus simple à déterminer, et contient déjà beaucoup d'informations sur sa topologie.

## 1.4 Type d'homotopie

Soit  $Y$  un espace topologique. L'intérêt principal de l'homologie est de pouvoir efficacement déterminer si  $X$  et  $Y$  sont « topologiquement semblables » : on dit qu'il s'agit d'un *invariant d'homotopie*.

Si on réfléchit à notre définition, on souhaite définir un type d'équivalence entre deux espaces qui conserve les propriétés du type «  $\sigma$  est un bord » et «  $\sigma$  est un cycle ».

**Définition.**  $f : X \rightarrow Y$  est une *équivalence homotopique* s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $gf$  et  $fg$  soient homotopes à  $id_X$  et  $id_Y$  respectivement.

**Définition.**  $X$  et  $Y$  ont le même *type d'homotopie* s'il existe une équivalence homotopique  $X \rightarrow Y$ .

*Remarque.* Un homéomorphisme  $X \rightarrow Y$  est trivialement une équivalence homotopique. Il s'agit donc d'une notion beaucoup plus large.

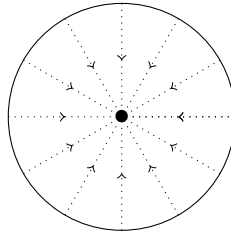
Un exemple simple d'équivalence homotopique est la *rétraction par déformation* : si  $A \subset X$ , on dit que  $X$  se rétracte par déformation sur  $A$  s'il existe une fonction  $r : [0, 1] \times X \rightarrow X$  continue en ses deux variables et vérifiant :

- (i)  $r_0 = id_X$ ,

- (ii)  $r_1(X) = A$ ,
- (iii)  $r_t|_A = id_A$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

On vérifie alors facilement que  $r_1$  est une équivalence homotopique d'inverse  $id_A$ . Intuitivement, une rétraction par déformation « pousse » les points de  $X$  sur ceux de  $A$ .

*Exemple.* La boule unité  $\mathbb{B}^n$ , et plus généralement  $\mathbb{R}^n$  se rétractent sur l'origine avec  $r_t : x \mapsto (1 - t)x$ .



**Proposition 1.4.1.** *Si  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :*

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(Y; \mathbb{Z})$$

Une démonstration est donnée dans [3].

**Corollaire 1.4.2.**  $\mathbb{R}^n$  a la même homologie qu'un point :

$$H_i(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 1.5 Suite exacte longue

Si  $A \subset X$ , il paraît naturel de chercher une relation entre l'homologie de  $A$  et celle de  $X$ . Notons  $C_n(X, A)$  le groupe quotient  $C_n(X)/C_n(A)$ . La suite longue

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial^*} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial^*} C_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial^*} \cdots$$

forme alors un complexe chaîné ( $\partial^*$  est l'application induite par  $\partial$  sur le quotient).

**Définition.** Les groupes d'homologie de cette suite sont appelés *groupes d'homologie relative* de  $X$  par rapport à  $A$ , notés  $H_n(X, A; \mathbb{Z})$ .

**Proposition 1.5.1.** *La suite longue*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_n(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H_n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H_n(X, A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \cdots$$

*est exacte.*

Les morphismes  $i$  et  $j$  sont ceux induits par l'inclusion  $A \hookrightarrow X$  et la projection  $C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$  respectivement. Le morphisme  $\delta$  est explicité dans [3], avec une démonstration de ce résultat.

## 1.6 Cohomologie

Au lieu d'étudier l'homologie de  $X$ , il est parfois plus intéressant d'étudier une structure obtenue par dualité ; on parle alors de cohomologie.

Soit  $C^n(X) = \text{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$ . Si  $\varphi \in C^n(X)$ , on peut naturellement lui associer son *cobord* en posant pour tout  $\sigma \in C_{n+1}(X)$  :

$$(d\varphi)(\sigma) = \varphi(\partial\sigma)$$

Autrement dit, le morphisme de cobord induit par  $d$  est le dual de  $\partial$ . La suite

$$\dots \xrightarrow{d} C^{n-1}(X) \xrightarrow{d} C^n(X) \xrightarrow{d} C^{n+1}(X) \xrightarrow{d} \dots \quad (*)$$

forme alors un complexe chaîné.

**Définition.** Les groupes d'homologie de la suite (\*) sont appelés *groupes de cohomologie* de  $X$  (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ), notés  $H^n(X; \mathbb{Z})$ .

Puisqu'ils sont obtenus par simple dualité, les groupes de cohomologie héritent de beaucoup de propriétés des groupes d'homologie de  $X$ . Ce sont aussi des invariants d'homotopie, et on peut écrire une suite exacte longue comme en 1.5.

*Remarque.* On a toujours  $H^1(X; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  (cette relation n'est pas vérifiée pour les  $n > 1$ ). Si l'on a :

$$H_1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z}$$

alors  $H^1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ . Autrement dit, en dualisant, on perd toute l'information liée à la torsion.

La cohomologie a cependant l'avantage de pouvoir être munie d'une structure d'anneau très intéressante (*via* le cup-produit, cf. [3]).

*Remarque.* De même qu'en 1.3, on peut introduire la cohomologie à coefficients dans un groupe abélien  $G$  en considérant  $C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X; G), G)$ . Les groupes de cohomologie correspondants sont alors notés  $H^n(X; G)$ .

Si  $G = \mathbb{R}$  et  $X$  est une variété différentielle, un théorème de De Rham montre que les  $H^n(X; \mathbb{R})$  sont isomorphes aux groupes de cohomologie de De Rham de la variété.

## 1.7 Dualité

Lorsque l'espace topologique considéré possède en plus une structure de variété différentielle, il existe plusieurs résultats de dualité reliant homologie et cohomologie.

**Proposition 1.7.1.** *Soit  $M$  une variété différentielle compacte sans bord de dimension réelle  $n$ . Alors*

- (i)  $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $i > n$ ,
- (ii) Si  $M$  est orientable,  $H_n(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ,

La démonstration de ce résultat est donnée dans [3].

Si  $M$  est orientable, on choisit un générateur de  $H_n(M; \mathbb{Z})$  que l'on note  $[M]$ ;  $[M]$  est une *classe fondamentale* de  $M$ . Par abus de notation, on notera également  $[M]$  un représentant de cette classe fondamentale.

Une classe fondamentale donne lieu à une application naturelle :

$$\begin{aligned} H^n(M; \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \varphi &\mapsto \varphi([M]) \end{aligned}$$

C'est une manière d'« intégrer » les cocycles sur  $M$ . En généralisant, on obtient l'application :

$$\begin{aligned} P : H^i(M; \mathbb{Z}) &\rightarrow H_{n-i}(M; \mathbb{Z}) \\ \varphi &\mapsto \varphi([M]|_{[v_0, \dots, v_i]}) \cdot [M]|_{[v_{i+1}, \dots, v_n]} \end{aligned}$$

**Théorème 1.7.2** (Dualité de Poincaré). *Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ , compacte, sans bord et orientable.  $P$  induit alors un isomorphisme*

$$H^i(M; \mathbb{Z}) \simeq H_{n-i}(M; \mathbb{Z})$$

pour tout  $0 \leq i \leq n$ .

Pour la démonstration, on pourra voir par exemple [3].

Ce théorème implique implique la

**Proposition 1.7.3.** *Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ , compacte, sans bord et orientable, et  $N$  une sous-variété fermée de  $M$ . Alors :*

$$H_i(M, N; \mathbb{Z}) \simeq H^{n-i}(M - N; \mathbb{Z})$$

On peut donc ramener le calcul des groupes d'homologie relative à celui de la cohomologie d'une variété. Une démonstration de ce résultat est donnée dans [7], p. 306.

*Remarque.* Dans le cas de l'homologie à coefficients réels, on a en plus une dualité naturelle  $H_k(M; \mathbb{R}) \times H^k(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$\sigma, \varphi \mapsto \varphi(\sigma)$$

## 1.8 Homologie cellulaire

On introduit ici une classe d'espaces topologiques qui ont une structure bien particulière.

**Définition.** On appellera *n-cellule* (notée  $e^n$ ) la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** On appelle *CW-complexe* un espace topologique obtenu en suivant les règles suivantes :

- Pour commencer,  $X_0$  est une union dénombrable de points.
- Par récurrence, on forme le  $n$ -squelette  $X_n$  en attachant à  $X_{n-1}$  des cellules  $e_\alpha^n$  par des applications  $\varphi_\alpha : \partial e_\alpha^n \rightarrow X_{n-1}$ . On obtient alors  $X_n$  comme quotient de  $X_{n-1} \sqcup_\alpha e_\alpha^n$  par l'identification  $x \sim \varphi_\alpha(x)$ .

Le processus peut s'arrêter à un rang  $N < \infty$ , auquel cas  $X = X_N$ . Sinon,  $X$  est défini comme étant la limite inductive des  $X_n$ .

La *dimension* du CW-complexe est celle de sa plus grande cellule (ou  $+\infty$ ).

*Exemple 1.* La sphère possède une structure naturelle de CW-complexe de dimension  $n$ .

$$\mathbb{S}^n = e^0 \cup_\varphi e^n$$

où le recollement est effectuée par

$$\begin{aligned} \varphi : \partial e^n &\rightarrow e^0 = \{x_0\} \\ x &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

*Exemple 2.* Le tore est également un CW-complexe avec une 0-cellule  $e^0$ , deux 1-cellules  $a$  et  $b$ , et une unique 2-cellule  $e^2$  (cf. figure 4).

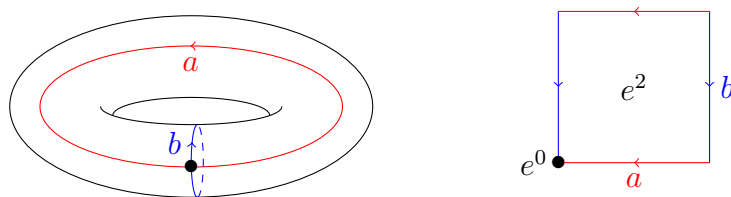


FIGURE 4 – Structure de CW-complexe du tore

Les groupes d'homologie d'un CW-complexe se calculent de manière très intuitive. Si  $X$  est un CW-complexe, il suffit en effet de faire « comme si »

$C_n(X)$  était le groupe abélien libre engendré par les  $n$ -cellules de  $X$  ; le morphisme de bord est alors défini par :

$$\partial e_\alpha^n = \sum_i n_i e_i^{n-1}$$

où les  $e_i^{n-1}$  sont les cellules rencontrées par le bord  $e_\alpha^n$ , comptées autant de fois qu'elles sont recouvertes par  $\varphi_\alpha$  (en prenant en compte l'orientation). Déterminer l'homologie d'un CW-complexe revient donc à étudier comment les cellules sont rattachées entre elles.

*Remarque.* Un argument de compacité montre que la somme est finie :  $\partial$  induit alors correctement un morphisme  $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ .

Une définition plus rigoureuse nécessite d'introduire le degré de  $\varphi_\alpha$  ; on se référera pour cela à [3], qui montre également que les groupes d'homologie calculés par cette méthode sont bien les groupes d'homologie singulière de  $X$ .

*Exemple.*  $\mathbb{T}^2$  (cf. figure 4)

- L'unique 0-cellule n'est pas un bord, donc  $H_0(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .
- $e^2$  est un cycle :

$$\partial e^2 = a - b - a + b = 0$$

donc  $H_2(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

- Les deux 1-cellules sont des cycles ; elles ne sont pas des bords (puisque l'unique 2-cellule est de bord nul). Par conséquent,  $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ .

## 2 Théorie de Morse

### 2.1 Lemme de Morse

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une application qui à chaque point de  $M$  associe une « hauteur » : un exemple typique est la fonction hauteur sur le tore (cf. figure 1). Le but de la théorie de Morse est de déterminer la forme de  $M$  à partir du comportement de  $f$  au voisinage de ses points critiques.

Localement, l'allure de  $M$  au voisinage d'un tel point est donnée par le :

**Lemme 2.1.1** (Morse). *Soit  $p$  un point critique non-dégénéré de  $f$ . Il existe alors des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $M$ , centrées en  $p$ , telles que :*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(c) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

On appelle  $\lambda$  l'indice de  $f$  en  $p$ ; il est égal au nombre de valeurs propres négatives de la hessienne de  $f$  en 0.

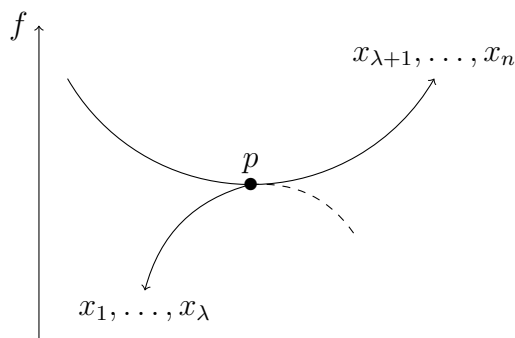


FIGURE 5 – Allure de  $M$  au voisinage de  $p$

*Démonstration.* Sans perdre de généralité, on suppose  $f(p) = 0$ . On se donne  $(x_1, \dots, x_n)$  des coordonnées locales centrées en  $p$ , et telle que la hessienne  $H(0, \dots, 0)$  de  $f$  en  $p$  est diagonale.

Une identité de Taylor donne :

$$f(X) = {}^tX \underbrace{\left( \int_0^1 \frac{1-t}{2} H(tX) \right)}_{A(X)} X = \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j$$

où  $X$  est le vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$ .

L'application  $X \mapsto A(X)$  est continue et  $A(0) = H(0)$ , donc  $A_{11}$  est non nul sur un voisinage de  $p$ . Posons :

$$y_1 = \sqrt{|A_{11}|} \left( x_1 + \sum_{j=1}^n \frac{A_{1j}}{A_{11}} x_j \right)$$

Alors :

$$f(X) = \pm y_1^2 + \sum_{i,j \in [2,n]} B_{ij} x_i x_j$$

où  $B_{ij} = \left( A_{ij} - \frac{A_{1j}A_{1i}}{A_{11}} \right)$ . Le signe devant  $y_1^2$  est celui de  $A_{11}(0) = H_{11}(0)$ , et on peut vérifier par un calcul direct que  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \dots, x_n)$  est bien un difféomorphisme.

Les coefficients  $B_{ij}$  vérifient les mêmes propriétés que les  $A_{ij}$  : l'application  $X \mapsto B_{ij}(X)$  est continue et  $B_{ij}(0) = H_{ij}(0)$ . On peut alors raisonner par récurrence pour finir le changement de variable.

Finalement :

$$f(y_1, \dots, y_n) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2$$

où le signe devant  $y_i^2$  est celui de  $H_{ii}(0)$ . □

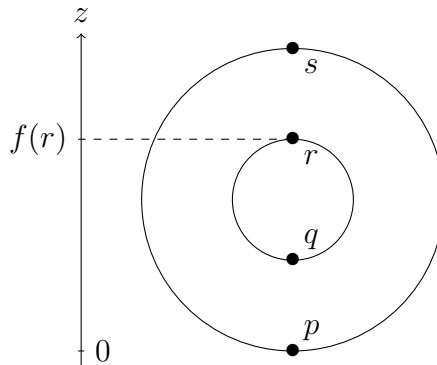


FIGURE 6 – Fonction hauteur sur  $\mathbb{T}^2$

**Définition.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une *fonction de Morse* si tous ses points critiques sont non-dégénérés.

*Remarque.* D'après le lemme de Morse, les points critiques d'une telle fonction sont isolés.

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on introduit l'ensemble de sous-niveau :

$$M^a = \{p \in M, f(p) \leq a\}$$

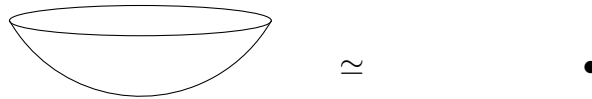
On pose de même  $M^{[a,b]} = \{p \in M, a \leq f(p) \leq b\}$ .



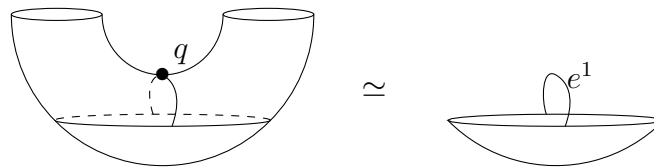
## 2.2 L'exemple du tore

Reprenons l'exemple du tore, avec  $f$  la fonction hauteur ; notons  $p, q, r, s$  ses points critiques (cf figure 6). Nous allons parcourir  $M = \mathbb{T}^2$  de bas en haut en observant comment varie le type d'homotopie de  $M^a$  au passage des points critiques.

- Si  $a < f(p)$ ,  $M^a = \emptyset$
- Si  $f(p) < a < f(q)$ ,  $M^a$  a le type d'homotopie d'un point.

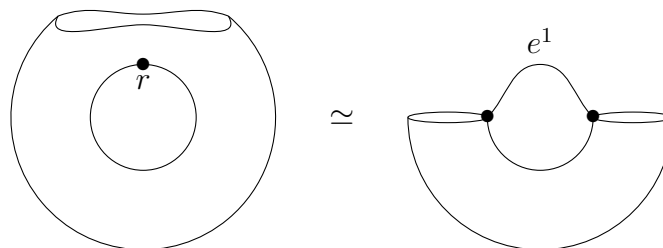


- Lorsqu'on dépasse le point  $q$ , le type d'homotopie de  $M^a$  change. Pour ne garder que l'information utile en terme d'homotopie, on peut rétracter les deux cornes de  $M^a$  en les « poussant » vers le bas :



Au passage du point  $q$ , on voit alors qu'il suffit d'ajouter une 1-cellule au sous-niveau  $M^{f(q)-\varepsilon}$  pour conserver le type d'homotopie. On remarquera au passage que  $q$  est un point d'indice 1.

- Au passage de  $r$  (également d'indice 1), on attache à nouveau une 1-cellule :



- Enfin, pour  $a > f(s)$ , on complète le tore en rattachant une 2-cellule.

À chaque fois qu'on passe un point critique d'indice  $\lambda$ , on conserve le type d'homotopie en ajoutant une cellule de dimension  $\lambda$ ; cette observation est la base de la théorie de Morse.

## 2.3 Pseudo-gradient

Pour la suite, il sera utile de se donner un champ de vecteurs qui monte le long de  $M$  :

**Définition.** Soit  $X$  un champ de vecteur sur  $M$ . On dit que  $X$  est un *pseudo-gradient* de  $f$  si pour tout  $p \in M$  :

- $X(p) = 0$  si  $p$  est un point critique de  $f$ .
- $(X \cdot f)(p) > 0$  sinon.

Il est facile de voir que de tels champs existent : dans des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur un ouvert  $U$ , le champ de vecteurs  $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$  est exactement le gradient de  $f$  sur  $U$  ; il suffit de raccorder tous ces gradients locaux à l'aide de partitions de l'unité pour obtenir un pseudo-gradient de  $h$  sur  $M$ .

## 2.4 Cas 1 : pas de points critiques

Si  $X_f$  est un pseudo-gradient de  $f$ , les courbes intégrales correspondantes grimpent le long de la variété jusqu'à atteindre un point critique. Si  $f$  n'a pas de valeur critique entre  $a$  et  $b$ , le flot de  $X_f$  va nous donner un difféomorphisme entre  $M^a$  et  $M^b$ . D'où le :

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $a < b$ . On suppose que  $M^{[a,b]}$  est compact et ne contient pas de points critiques de  $h$ . Alors  $M^b$  se rétracte par déformation sur  $M^a$ .*

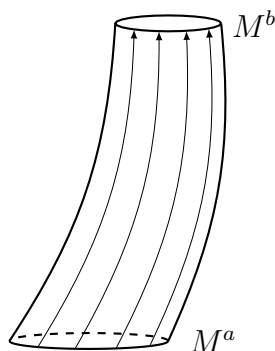


FIGURE 7 – Courbes intégrales de  $X_f$

*Démonstration.* On renormalise  $X_f$  en définissant le champ  $Y$  sur  $M$  tel que :

- $Y = \frac{X_f}{X_f \cdot f}$  sur  $M^{[a,b]}$
- $Y = 0$  en dehors d'un voisinage compact de  $M^{[a,b]}$

(le raccordement se fait à l'aide de partitions de l'unité).

Le flot  $\varphi^t$  de  $Y$  est alors défini pour tout temps. Si  $\varphi^t(p) \in M^{[a,b]}$ , alors :

$$\frac{d}{dt} \left( f(\varphi^t(p)) \right) = (Y \cdot f)(\varphi^t(p)) = \frac{X_f \cdot f}{X_f \cdot f}(\varphi^t(p)) = 1$$

Autrement dit,  $t \mapsto \varphi^t(p)$  monte à vitesse constante ;  $\varphi^{b-a}$  est alors un difféomorphisme qui transporte  $M^a$  sur  $M^b$ .

On obtient notre rétraction par déformation en posant, pour  $t \in [0, 1]$  :

- $r_t(p) = p$  si  $p \in M^a$ .
- $r_t(p) = \varphi^{t(a-f(p))}(p)$  sinon.

□

Voyons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on traverse un point critique.

## 2.5 Cas 2 : traversée d'un point critique

On a vu dans le cas du tore que, en terme de type d'homotopie, le passage d'un point critique d'indice  $\lambda$  se traduisait par l'ajout d'une cellule de dimension  $\lambda$ . Le théorème suivant confirme cette observation :

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $p$  un point critique de  $f$  d'indice  $\lambda$ , avec  $f(p) = c$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$  soit compact et ne contienne pas d'autre point critique que  $p$ . Alors  $M^{c+\varepsilon}$  a le type d'homotopie de  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ , c'est-à-dire de  $M^{c-\varepsilon}$  auquel on attache une  $\lambda$ -cellule.*

(la preuve expliquera comment est réalisé l'attachement).

*Démonstration.* D'après le lemme de Morse, il existe un système de coordonnées tel que, sur un voisinage  $U$  de  $p$  :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Choisissons  $\varepsilon$  tel que l'image de  $U$  par  $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  contienne la boule  $\{(x_1, \dots, x_n), \sum x_i^2 \leq 2\varepsilon\}$ . La figure 8 représente la situation vue du dessus : il faut imaginer ce schéma courbé dans l'espace ; si l'on se déplace

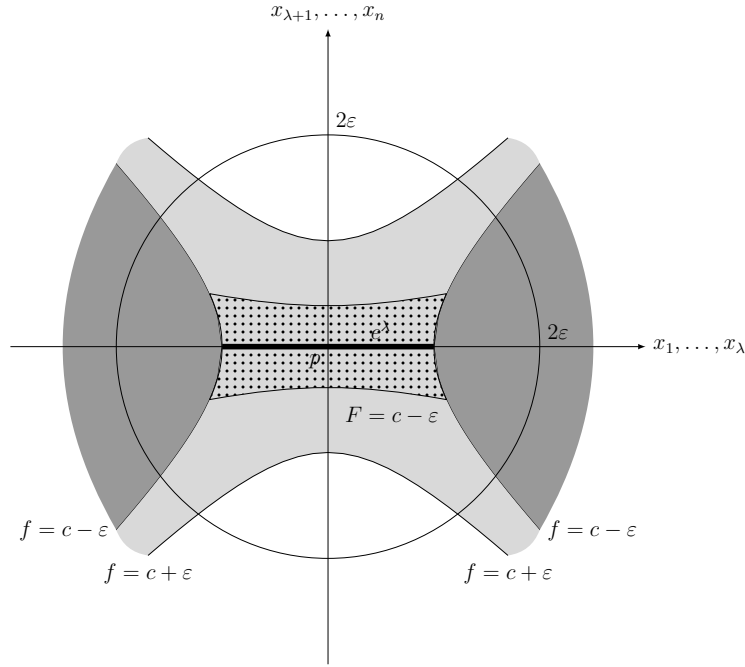


FIGURE 8 – Voisinage de  $p$ . En gris sombre :  $M^{c-\varepsilon}$ . Gris clair :  $M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$ . Zone pointillée :  $H$ .

le long de l'axe  $(x_1, \dots, x_\lambda)$ , on descend; le long de l'axe  $(x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ , on monte.

Considérons l'ensemble  $e^\lambda = \{x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$  (en gras sur la figure) : il est difféomorphe à une  $\lambda$ -cellule, et naturellement rattaché à  $M^{c-\varepsilon}$  par son bord (l'ensemble  $\partial e^\lambda = \{x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 = \varepsilon\}$ ).

Nous allons alors procéder en deux étapes :

1. On se donne une nouvelle fonction de Morse  $F$  sur  $M$  qui est telle que  $F^{-1}]-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$  et  $F^{-1}]-\infty, c - \varepsilon] = M^{c-\varepsilon} \cup H$ , où  $H$  correspond à la partie pointillée sur la figure 8. En sorte, on décale la partie centrale du schéma vers le bas.

$F$  n'a pas de point critique dans  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , on peut donc appliquer le théorème précédent pour montrer que  $M^{c+\varepsilon}$  se rétracte par déformation en  $M^{c-\varepsilon} \cup H$ .

2. Par un argument direct, on montre que  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  se rétracte par déformation en  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ .

**Première étape :**  $M^{c+\varepsilon}$  se rétracte sur  $M^{c-\varepsilon} \cup H$

Soit  $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction  $C^\infty$  telle que :

$$\begin{aligned} \mu(0) &> \varepsilon \\ \mu(r) &= 0 \quad \text{si } r > 2\varepsilon \\ -1 < \mu'(r) &\leq 0 \quad \text{pour tout } r \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, on définit deux fonctions  $\xi, \eta : U \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \xi &= x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \\ \eta &= x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

On définit alors  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta)$$

et  $F$  coïncide avec  $f$  en dehors de l'ellipsoïde  $\{\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon\}$ . Alors :

1.  $F^{-1}] - \infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

En effet, en dehors de l'ellipsoïde  $\{\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon\}$   $F$  coïncide avec  $f$  ; à l'intérieur, on a :

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon$$

□

2.  $F$  n'a pas de point critique dans la région  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$

On vérifie en effet par le calcul que les points critiques de  $F$  sont ceux de  $f$ , qui n'a pas d'autre point critique que  $p$  sur  $M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$ . Or

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

d'où le résultat.

De plus,  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$  qui est compact, donc  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  aussi est compact. En appliquant le théorème précédent à  $F$ , on en conclut que  $M^{c+\varepsilon}$  se rétracte par déformation sur  $F^{-1}] - \infty, c - \varepsilon] = M^{c-\varepsilon} \cup H$ , où  $H$  est la région correspondant aux inégalités :

$$\begin{cases} F \leq c - \varepsilon \\ f \geq c - \varepsilon \end{cases}$$

**Deuxième étape :**  $M^{c+\varepsilon} \cup H$  se rétracte sur  $M^{c+\varepsilon} \cup e^\lambda$ .

On définit directement une rétraction  $(r_t)_{t \in [0,1]}$  qui pousse  $H$  le long des lignes verticales :

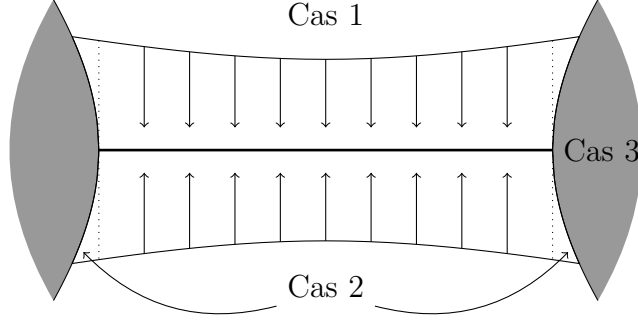


FIGURE 9 – Rétraction  $M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

– Cas 1 :  $H \cap \{\xi \leq \varepsilon\}$  :

$$r_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_\lambda, tx_{\lambda+1}, \dots, tx_n)$$

$r_1$  envoie alors tous les points de  $H \cap \{\xi \leq \varepsilon\}$  sur  $e^\lambda$

– Cas 2 :  $H \cap \{\xi > \varepsilon\}$  :

$$r_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_\lambda, s_t x_{\lambda+1}, \dots, s_t x_n)$$

À  $(x_1, \dots, x_n)$  fixés,  $t \mapsto s_t(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction affine, ajustée de telle façon que  $r_1$  envoie tous les points de  $H \cap \{\xi > \varepsilon\}$  sur la frontière de  $M^{c-\varepsilon}$  :

$$s_t = t + (1-t) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}}$$

– Cas 3 :  $M^{c-\varepsilon}$  :  $r_t = id$  pour tout  $t$ .

$(r_t)$  est alors une rétraction par déformation de  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  sur  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ , ce qui conclut la preuve. □

*Remarque.* Cette preuve se généralise facilement au cas où  $f^{-1}\{c\}$  contient plusieurs points critiques : dans ce cas, ils sont en nombre fini ( $f^{-1}\{c\}$  est compact en tant que fermé de  $M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$ , et les points critiques de  $f$  sont isolés) : appelons-les  $p_1, \dots, p_k$ . En chaque  $p_i$ , on a un système de coordonnées  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$  donné par le lemme de Morse. Il suffit alors de prendre  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que les boules  $\{\sum_j x_{i,j}^2 \leq 2\varepsilon\}$  ne s'intersectent pas et l'on peut refaire la preuve précédente :

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_k} e^{\lambda_k}$$

où les  $\varphi_i$  sont les applications de recollement  $\partial e^{\lambda_i} \rightarrow \partial M^{c-\varepsilon}$  qu'on obtient naturellement dans la preuve.

## 2.6 Globalisation

Passons au théorème fondamental de la théorie de Morse :

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $f$  une fonction de Morse sur  $M$  telle que chaque  $M^a$  soit compact. Alors  $M$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe, qui comporte autant de cellules de dimension  $\lambda$  que  $f$  a de points critiques d'indice  $\lambda$ .*

Pour montrer cela, on souhaite raisonner par récurrence sur les valeurs critiques de  $f$  : supposons que  $M^{c-\varepsilon}$  ait le même type d'homotopie qu'un CW-complexe  $K$  ; on sait d'après le théorème précédent que  $M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  ; on aimerait donc pouvoir conclure que  $M^{c+\varepsilon} \simeq K \cup e^\lambda$ . Ainsi, on pourrait parcourir la variété du bas vers le haut, en ajoutant une cellule au CW-complexe à chaque fois que l'on passe une valeur critique.

Pour cela, énonçons sans les prouver deux lemmes généraux concernant un espace topologique  $X$  auquel on attache une unique cellule  $e^\lambda$  (on pourra trouver une démonstration dans [6]).

**Lemme 2.6.2.** *Soient  $\varphi_0, \varphi_1 : \partial e^\lambda \rightarrow X$  deux applications homotopes. Alors l'identité sur  $X$  s'étend en une équivalence homotopique de  $X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$  dans  $X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$ .*

**Lemme 2.6.3.** *Soit  $\varphi : \partial e^\lambda \rightarrow X$  une application de recollement. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence homotopique, alors  $f$  s'étend en une équivalence homotopique  $F : X \cup_\varphi e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f\varphi} e^\lambda$ .*

Ainsi équipés, nous pouvons passer à la preuve.

*Démonstration.* Soient  $c_0 < c_1 < \dots$  les valeurs critiques de  $f$ . Pour tout  $a$ ,  $M^a$  est compact donc ne contient qu'un nombre fini de points critiques de  $f$  ; par conséquent, les ensembles  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cap M^a$  sont tous finis. On en déduit que  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  n'a pas de point d'accumulation.

On raisonne alors par récurrence. Supposons que pour tout  $a \in ]c_i, c_{i+1}[$ , on a  $M^a \simeq K_i$  avec  $K_i$  un CW-complexe. D'après le théorème 2.5.1, il existe  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $M^{c_{i+1}+\varepsilon} \simeq M^{c_{i+1}-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_k} e^{\lambda_k}$ .

Traitons le cas  $k = 1$ , *i.e.*  $M^{c_{i+1}+\varepsilon} \simeq M^{c_{i+1}-\varepsilon} \cup_\varphi e^\lambda$ . L'hypothèse de récurrence donne une équivalence homotopique  $h : M^{c_{i+1}-\varepsilon} \rightarrow K_i$ . D'après le lemme 2.6.3,  $M^{c_{i+1}+\varepsilon} \simeq K_i \cup_{h\varphi} e^\lambda$ .

Pour que  $K_i \cup_{h\varphi} e^\lambda$  soit un CW-complexe, il faut que  $e^\lambda$  soit rattachée uniquement à des cellules de dimension strictement inférieure à  $\lambda$  dans  $K_i$ . *A priori*, le recollement  $h\varphi$  ne vérifie pas cette condition, mais il est homotope à un autre recollement  $\psi$  de  $e^\lambda$  sur le  $(\lambda - 1)$ -squelette de  $K_i$  (c'est une

conséquence du théorème d'*approximation cellulaire*, on pourra se référer à [6] pour plus de détails).  $K_i \cup_\psi e^\lambda$  est alors un CW-complexe qui a le même type d'homotopie que  $M^{c_{i+1}+\varepsilon}$  grâce au lemme 2.6.2.

Enfin, le théorème 2.4.1 montre que  $M^a \simeq K_i \cup_\psi e^\lambda$  pour tout  $a \in ]c_{i+1}, c_{i+2}[$ , ce qui achève la récurrence.

On obtient donc une suite d'équivalences homotopiques :

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & K_3 & \subset & \dots \end{array}$$

Si  $f$  n'a qu'un nombre fini de points critiques, ils sont tous contenus dans un  $M^{a_i}$ . Par un argument similaire à celui du théorème 2.4.1,  $M$  se rétracte par déformation sur  $M^{a_i}$ , et donc  $M \simeq K_i$ .

Sinon, un argument de limite inductive permet de conclure (cf. [6]).

□

Puisque  $M$  a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe  $K$ , nous pouvons alors appliquer la méthode de l'homologie cellulaire (voir partie 1.8) pour déterminer l'homologie de  $M$ .

Une conséquence directe de la théorie de Morse est le théorème suivant :

**Théorème 2.6.4** (Inégalités de Morse). *Soit  $M$  une variété compacte, et  $f$  une fonction de Morse sur  $M$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{N}$ , on note  $b_\lambda$  le nombre de points critiques de  $f$  d'indice  $\lambda$ . Alors :*

$$\text{rang}(H_\lambda(M; \mathbb{Z})) \leq b_\lambda$$

*Démonstration.*  $M$  a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe  $K$  qui possède exactement  $b_\lambda$  cellules de dimension  $\lambda$ .  $H_\lambda(K; \mathbb{Z})$  est un quotient d'un sous-groupe de  $C_\lambda(K)$ , lui-même groupe abélien libre de rang  $b_\lambda$ , donc :

$$\text{rang}(H_\lambda(K; \mathbb{Z})) \leq b_\lambda$$

Par équivalence homotopique,  $H_\lambda(M; \mathbb{Z}) = H_\lambda(K; \mathbb{Z})$ , ce qui complète la preuve. □



## 3 Théorème de Lefschetz

### 3.1 L'espace projectif $\mathbb{P}^n$

Avant de démontrer le théorème de Lefschetz, faisons quelques observations sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$ .

**Définition.** On appelle *espace projectif* l'ensemble des droites de  $\mathbb{C}^{n+1}$  :

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$$

$\mathbb{P}^n$  est muni de coordonnées dites *homogènes* en désignant par  $[z_0 : \dots : z_n]$  la droite complexe passant par  $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ .

Soit l'ouvert  $U_i = \{[z_0 : \dots : z_n], z_i \neq 0\}$ . L'application

$$U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \\ [z_0 : \dots : z_n] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

est une application bianalytique, ce qui donne à  $\mathbb{P}^n$  une structure de variété analytique de dimension  $n$ . Notons qu'il existe une surjection continue de la sphère unité de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dans  $\mathbb{P}^n$ , ce qui fait de  $\mathbb{P}^n$  un espace compact.

On peut partitionner  $\mathbb{P}^n$  en  $U_0 \sqcup \{[0 : z_1 : \dots : z_n]\}$ ; le terme de gauche est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ , celui de droite est l'ensemble des droites de  $\mathbb{C}^n$ . On obtient donc la décomposition :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$

Topologiquement, on obtient  $\mathbb{P}^n$  en ajoutant à  $\mathbb{C}^n$  « un hyperplan à l'infini » ; par exemple,  $\mathbb{P}^1$  est la sphère de Riemann. Ceci permet d'obtenir la structure de CW-complexe de  $\mathbb{P}^n$  :

$$\mathbb{P}^n = e^{2n} \cup e^{2(n-1)} \cup \dots \cup e^0$$

On en déduit la cohomologie de  $\mathbb{P}^n$  :

$$H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est pair, } i \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.2 Variétés algébriques

**Définition.**  $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$  est une variété algébrique *affine* s'il existe  $f_1, \dots, f_k$  dans  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tels que

$$V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}, f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Si les  $f_i$  sont des polynômes homogènes de degrés  $d_i$ , on a

$$f_i(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^{d_i} f_i(z_0, \dots, z_n)$$

cela a donc un sens de dire que  $f_i$  s'annule sur les droites de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

**Définition.**  $V \subset \mathbb{P}^n$  est une variété algébrique *projective* s'il existe  $f_1, \dots, f_k$  des polynômes homogènes de  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tels que

$$V = \{[z_0 : \dots : z_n], f_1([z]) = \dots = f_k([z]) = 0\}$$

Une variété algébrique affine (respectivement projective) est dite *lisse* si elle a également une structure de sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^n$  (respectivement  $\mathbb{P}^n$ ). Par la suite, et même si ce n'est pas explicitement précisé, toutes les variétés considérées seront lisses.

*Remarque.* Si  $V \in \mathbb{C}^n$  est une variété affine (lisse), les applications coordonnées  $z_i : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  sont holomorphes. Si  $\dim(V) > 0$ , tout point de  $V$  est contenu dans un ouvert de carte; par le principe du maximum, les  $z_i$  ne peuvent donc pas atteindre leur maximum sur  $V$ . Par conséquent, *une variété affine de dimension  $> 0$  ne peut pas être compacte*. Par contre, puisque  $\mathbb{P}^n$  est compact, une variété projective est toujours compacte.

### 3.3 Plongement de Veronese

**Définition.** On dit que  $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$  est une *hypersurface* si  $\Sigma$  est le lieu des zéros d'un unique polynôme homogène.

**Définition.** L'espace  $H \subset \mathbb{P}^n$  est un *hyperplan* s'il est le lieu des zéros d'une forme linéaire non nulle sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

On a vu en 3.1 que  $\mathbb{P}^n$  privé d'un hyperplan est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ . Si  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{P}^n$  et  $V \subset \mathbb{P}^n$  est une variété projective,  $V - H$  est alors une variété affine.

Plus généralement, on a la

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{P}^n$ . Alors  $\mathbb{P}^n - \Sigma$  est une variété affine.*

On peut se ramener au cas où l'hypersurface est en fait un hyperplan. Supposons  $\Sigma$  donnée par un polynôme homogène de degré  $d$ . Introduisons alors  $F_0, \dots, F_N$  la base canonique des monômes de degré  $d$  :

$$F_i = X_0^{d_{i,0}} \dots X_n^{d_{i,n}} \quad ; \quad d_{i,0} + \dots + d_{i,n} = d$$

On définit le *plongement de Veronese* par :

$$j : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N \\ [z_0 : \dots : z_n] \mapsto [F_0(z) : \dots : F_N(z)]$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette application est effectivement un plongement.

Si  $[y_0 : \dots : y_N]$  sont les coordonnées homogènes sur  $\mathbb{P}^N$  et que :

$$\Sigma = \{a_1 F_1 + \dots + a_N F_N = 0\}$$

alors :

$$j(\Sigma) = \{a_1 y_1 + \dots + a_N y_N = 0\}$$

(« on remplace les monômes par des inconnues »)

Le plongement de Veronese fait donc de  $j(\Sigma)$  un hyperplan de  $\mathbb{P}^N$ . Ainsi,  $j(\mathbb{P}^n - \Sigma)$  est une sous-variété de  $\mathbb{P}^N - j(\Sigma)$ , qui est lui-même isomorphe à  $\mathbb{C}^N$  par la remarque précédente : on a donc obtenu un plongement de  $\mathbb{P}^n - \Sigma$  comme variété affine de  $\mathbb{C}^N$ .

### 3.4 Fonction distance

Dans la partie 2, nous avons étudié les résultats relatifs à la théorie de Morse sans même se préoccuper de l'existence des fonctions de Morse. Nous allons voir que si  $M$  est une sous-variété d'un espace euclidien, la fonction distance à un point fixe (au carré) est presque toujours une fonction de Morse.

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $M \subset \mathbb{R}^N$  une sous-variété fermée de dimension  $n$ . Pour  $p \in \mathbb{R}^n$ , on introduit la fonction :*

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R} \\ q \mapsto \|q - p\|^2$$

*Alors, pour presque tout  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $L_p$  est une fonction de Morse sur  $M$  telle que les  $M^a \subset M$  sont compacts pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Donnons-nous  $(x_1, \dots, x_n)$  des coordonnées locales sur  $M$ , et  $q : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  un plongement. Alors :

$$\frac{\partial L_p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \|q(x_1, \dots, x_n) - p\|^2 = 2 \left\langle q - p \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right. \right\rangle$$

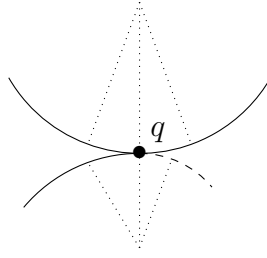


FIGURE 10 – Un point selle comporte deux points focaux

Le point  $q$  est donc critique si et seulement si  $p - q$  est normal à  $M$ . Il n'est dégénéré que si  $p$  est ce qu'on appelle un *point focal* de  $M$  en  $q$  : intuitivement, ce sont les points de  $\mathbb{R}^N$  en lequel les normales à  $M$  sur un voisinage de  $q$  s'intersectent.

On peut donner une définition des points focaux comme suit : introduisons  $N = \{(q, v) \in M \times \mathbb{R}^N, \langle q|v \rangle = 0\}$  le fibré normal à  $M$ , et  $E : N \rightarrow \mathbb{R}^N$  définie par  $E(q, v) = q + v$ . Les points focaux de  $M$  (en  $q$ ) sont les  $e = E(q, v)$ , avec  $(q, v)$  un point critique de  $E$ .

D'après un théorème de Sard, l'image par  $E$  de ses points critiques (autrement dit l'ensemble des points focaux de  $M$ ) est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^N$ . Par conséquent, pour presque tout  $p$ ,  $L_p$  n'admet que des points critiques non-dégénérés.

La compacité des  $M^a$  est évidente. □

D'après le théorème de Whitney, toute variété se plonge comme un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^N$  pour  $N$  assez grand ; on obtient donc le

**Corollaire 3.4.2.** *Toute variété  $M$  admet une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $a$ ,  $M^a$  est compact.*

### 3.5 Théorème d'Andreotti-Frankel

Nous allons maintenant utiliser la théorie de Morse pour obtenir des résultats topologiques sur les variétés complexes. Notre but est de prouver le

**Théorème 3.5.1** (Andreotti-Frankel). *Soit  $M \subset \mathbb{C}^N$  une variété affine de dimension complexe  $n$ . Alors*

$$H_i(M; \mathbb{Z}) = H^i(M; \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } i > n$$

Autrement dit, une variété affine a moitié moins d'homologie que ce à quoi on pourrait s'attendre. Ceci est une conséquence du théorème plus fort suivant :

**Théorème 3.5.2.** *Soit  $M$  une variété complexe de dimension réelle  $2n$ , plongée analytiquement comme sous-ensemble fermé de  $\mathbb{C}^N$ . Alors  $M$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension  $n$ .*

Soit  $M$  une telle variété ; donnons-nous  $p \in \mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$  tel que la fonction  $L_p$  définie en 3.4 soit une fonction de Morse sur  $M$ . Le théorème découle alors directement de la

**Proposition 3.5.3.** *Les points critiques de  $L_p$  sont d'indice inférieur ou égal à  $n$ .*

*Démonstration.* [6] présente une jolie démonstration faisant intervenir les points focaux de  $M$  ; nous allons faire ici un calcul plus direct.

Soit  $q$  un point critique de  $L_p$ . Si  $q = p$ , c'est un minimum non-dégénéré de  $L_p$  qui est donc d'indice 0.

Sinon, on peut supposer que  $q = 0$  et que  $M$  est localement le graphe d'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{N-n}$  vérifiant  $df_0 = 0$ .  $q$  est un point critique, donc  $p - q$  est normal à  $M$  en  $q$ . En appliquant une homothétie appropriée, et quitte à échanger quelques coordonnées, on peut alors supposer que  $p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (seule la  $(n+1)$ -ième coordonnée est non-nulle). Alors :

$$\begin{aligned} L_p(z) &= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 + |f_1(z) - 1|^2 + |f_2(z)|^2 + \dots + |f_{N-n}(z)|^2 \\ &= (1 - 2 \cdot \operatorname{Re}(f_1(z))) + \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-n} |f_i(z)|^2 \end{aligned}$$

Puisque  $df_0 = 0$ , on a  $f_i(z) = Q_i(z) + o(z^2)$  avec  $Q_i$  une forme quadratique complexe. La hessienne de  $L_p$  en 0 s'écrit alors

$$\begin{aligned} H_0(L_p) &= -2 \cdot H_0\left(\operatorname{Re}(Q_1(z))\right) + H_0\left(\sum |z_i|^2\right) \\ &= -2 \cdot \left[\operatorname{Re}(Q_1)\right] + 2 \cdot \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^{2N}} \end{aligned}$$

où  $\left[\operatorname{Re}(Q_1)\right]$  dénote la matrice de la forme quadratique  $\operatorname{Re}(Q_1) : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Les valeurs propres négatives de  $H_0(L_p)$  ne peuvent provenir que de  $\left[\operatorname{Re}(Q_1)\right]$ . La proposition est alors une conséquence du lemme suivant.  $\square$

**Lemme 3.5.4.** Soit  $Q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une forme quadratique complexe. La forme quadratique réelle  $\operatorname{Re}(Q) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  a alors au plus  $n$  valeurs propres positives et  $n$  valeurs propres négatives.

*Démonstration.* Posons  $Q(z_1, \dots, z_n) = \sum a_{hj} z_h z_j$ . Alors :

$$\left(\operatorname{Re}(Q)\right)(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \operatorname{Re} \left( \sum a_{hj} (x_h + iy_h)(x_j + iy_j) \right)$$

L'identité  $Q(iz_1, \dots, iz_n) = -Q(z_1, \dots, z_n)$  montre que le changement de variable orthogonal  $(X, Y) \mapsto (Y, -X)$  transforme  $\operatorname{Re}(Q)$  en  $-\operatorname{Re}(Q)$ . Si  $(X, Y)$  est un vecteur propre de  $[\operatorname{Re}(Q)]$  associé à la valeur propre  $\mu$ ,  $(Y, -X)$  est un vecteur propre associé à  $-\mu$ . La forme quadratique  $\operatorname{Re}(Q)$  a donc autant de valeurs propres positives que de valeurs propres négatives.  $\square$

Avec la proposition 3.5.3, ce lemme permet donc de montrer le théorème d'Andreotti et Frankel, qui va lui-même impliquer le théorème de Lefschetz.

### 3.6 Le théorème de Lefschetz

Soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une variété projective de dimension  $n$  et  $H \subset \mathbb{P}^N$  un hyperplan. On rappelle l'énoncé du théorème :

**Théorème 3.6.1** (Lefschetz). *Le morphisme induit par l'inclusion :*

$$H_i(V \cap H; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(V; \mathbb{Z})$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq n - 2$ , et est surjectif pour  $i = n - 1$ .*

*Démonstration.* En utilisant la suite exacte longue des paires vue en 1.5, il suffit de montrer que  $H_i(V, V \cap H; \mathbb{Z}) = 0$  pour  $i < n$ . Avec la proposition 1.7.3, on peut se ramener au calcul de la cohomologie de  $V - H$  :

$$H_i(V, V \cap H; \mathbb{Z}) \simeq H^{2n-i}(V - H; \mathbb{Z})$$

Mais on a remarqué en 3.3 que  $V - H$  est une variété affine ; on peut donc utiliser le théorème d'Andreotti-Frankel pour conclure.  $\square$

On peut utiliser la même démonstration pour obtenir un résultat similaire sur les groupes de cohomologie :

**Théorème 3.6.2** (Lefschetz, 2<sup>e</sup> version). *Le morphisme induit par la restriction*

$$H^i(V; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(V \cap H; \mathbb{Z})$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq n - 2$ , et est injectif pour  $i = n - 1$ .*

## 4 Exemples et applications

### 4.1 Homologie d'une hypersurface

Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{P}^n$ . Grâce au plongement de Veronese (cf. 3.3), on peut voir  $\mathbb{P}^n$  comme sous-variété de  $\mathbb{P}^N$  pour un certain  $N$ , et  $\Sigma$  comme hyperplan de ce même  $\mathbb{P}^N$ . Avec le théorème de Lefschetz, on obtient alors d'une part :

$$H_i(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq H_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \quad \text{pour } i < n - 1$$

D'autre part :

$$H^i(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \quad \text{pour } i < n - 1$$

Par dualité de Poincaré, cette seconde identité se réécrit :

$$H_i(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq H^{2(n-1)-i}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \quad \text{pour } i > n - 1$$

Avec l'étude de  $\mathbb{P}^n$  faite en 3.1, on connaît donc tous les groupes d'homologie de  $\Sigma$ , à l'exception de celui du milieu.

$$H_i(\Sigma; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est pair, } i \leq 2(n-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (i \neq n-1)$$

En revanche, tout ce que l'on sait de l'homologie moitié  $H_{n-1}(\Sigma; \mathbb{Z})$  est qu'elle est « plus grosse » que  $H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ ; elle est souvent très difficile à calculer en pratique.

*Exemple.* Soit  $\Sigma \subset \mathbb{P}^2$  une courbe algébrique, donnée par un polynôme homogène de degré  $d$ . Par dualité de Poincaré, nous avons :

$$H_0(\Sigma; \mathbb{Z}) = H_2(\Sigma; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

L'information supplémentaire «  $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$  surjectif » donnée par le théorème de Lefschetz ne nous apporte rien. En fait, si  $g(\Sigma)$  est le genre de  $\Sigma$ , on a  $\text{rang}(H_1(\Sigma; \mathbb{Z})) = 2g(V)$ . Or le genre d'une courbe algébrique est donné par la formule :

$$g(\Sigma) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

qui peut être arbitrairement grand.

Ainsi, même si presque tous les  $H_i(\Sigma; \mathbb{Z})$  sont plus petit que  $\mathbb{Z}$ , le groupe d'homologie milieu  $H_{n-1}(\Sigma; \mathbb{Z})$  est potentiellement énorme.

## 4.2 Cas des intersections complètes

**Définition.** On appelle *intersection complète* une variété projective (lisse)  $V$  de dimension  $m$  pouvant s'écrire sous la forme

$$V = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-m}$$

où les  $\Sigma_i$  sont des hypersurfaces.

En général, on a toujours  $\dim(\Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-m}) \geq m$ ; en pratique, il est souvent difficile de savoir si  $V$  est ou non une intersection complète. Cependant, en appliquant plusieurs fois le théorème de Lefschetz, on peut facilement généraliser le résultat obtenu en 4.1 pour obtenir un critère intéressant :

**Proposition 4.2.1.** *Si  $V$  est une intersection complète de dimension  $m$ , alors :*

$$H_i(V; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est pair, } i \leq 2m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (i \neq m)$$

Ceci donne une contrainte assez forte sur l'homologie d'une intersection complète.

## 4.3 Groupes de Picard

L'un des intérêt du théorème de Lefschetz est de relier entre eux les propriétés essentiellement algébriques d'une variété à sa structure topologique. Nous allons en donner ici une illustration intéressante.

Si  $V$  est une variété algébrique, on peut lui associer son *groupe de Picard*  $\text{Pic}(V)$  constitué par les classes d'isomorphismes de fibrés en droites algébriques sur  $V$ . (voir [7] pour plus de détails); connaître ce groupe fournit des informations intéressantes sur  $V$ .

La notion de groupe de Picard est purement algébrique, alors que le théorème de Lefschetz s'intéresse aux propriétés topologiques des variétés. Néanmoins, le théorème de Lefschetz permet d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 4.3.1** (Lefschetz-Grothendieck). *Si  $V \subset \mathbb{P}^n$  est une variété projective telle que  $\dim(V) \geq 4$  et  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{P}^n$ . Alors :*

$$\text{Pic}(V) \simeq \text{Pic}(V \cap H)$$

En général, il est très difficile de déterminer les groupes de Picard d'une variété algébrique. Cependant, le groupe de Picard de  $\mathbb{P}^n$  est connu :

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$$

Grâce au théorème de Lefschetz, on connaît donc le groupe de Picard des hypersurfaces, et plus généralement des intersections complètes de dimension suffisamment grande.



## 4.4 Intérêt en géométrie algébrique

La définition que nous avons donnée d'une variété algébrique adopte un point de vue naïf. En géométrie algébrique, la définition moderne d'une variété algébrique est plus abstraite.

Une variété algébrique (abstraite) admet un certain nombre de plongements « concrets » possibles ; elle est dite projective si elle peut se plonger dans  $\mathbb{P}^n$ . L'avantage de cette définition est qu'elle permet de définir un certain nombre de propriétés des variétés algébriques comme étant intrinsèques, *i.e.* ne dépendant pas du plongement choisi. L'un des intérêts du théorème de Lefschetz est qu'il permet de déterminer une propriété intrinsèque de la variété, son homologie, à partir d'un plongement particulier dans  $\mathbb{P}^n$ .

En donnant une contrainte forte sur l'homologie des variétés projectives, le théorème de Lefschetz aide également à répondre à la question suivante : étant donnée une variété projective  $V$ , à quoi ressemblent les plongements effectifs de  $V$  ? Par exemple, est-il possible de réaliser  $V$  comme une intersection complète dans un certain  $\mathbb{P}^n$  ? En général, la réponse est négative : une variété projective générique ne peut pas se représenter de manière « simple ».

## Références

- [1] Aldo ANDREOTTI et Theodore FRANKEL : The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Ann. of Math. (2)*, 69:713–717, 1959.
- [2] Phillip GRIFFITHS et Joseph HARRIS : *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [3] Allen HATCHER : *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [4] Robert LAZARSFELD : *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.
- [5] Yukio MATSUMOTO : *An introduction to Morse theory*, volume 208 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [6] J. MILNOR : *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. *Annals of Mathematics Studies*, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [7] Claire VOISIN : *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 de *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.