

# Itération du théorème de Pappus et groupe modulaire

Louis Nebout      Esther Elbaz

21 octobre 2008

## Résumé

Dans cet exposé nous étudierons l'itération du théorème de Pappus. Pour cela nous commencerons par quelques notions de géométrie projectives indispensables pour la suite, et qui nous permettront d'énoncer le théorème de Pappus. Ensuite nous définirons des objets sur lesquels nous pourrons appliquer le théorème de Pappus, que nous appellerons boîtes marquées. Nous appliquerons le théorème de Pappus à ces boîtes marquées par l'intermédiaire d'un groupe  $G$  d'opérations de boîtes, isomorphe au groupe modulaire. Cela nous permettra d'étudier l'itération du théorème de Pappus en examinant la structure de l'orbite d'une boîte marquée sous l'action de  $G$ , que nous décrirons à l'aide d'un graphe, isomorphe au graphe de Faray. Ce graphe nous permettra de montrer que, dans un sens à définir, "plus on applique le théorème de Pappus, plus on obtient des boîtes marquées petites" et de définir une courbe obtenue par itération du théorème de Pappus : la courbe de Pappus.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le théorème de Pappus</b>	<b>2</b>
1.1	Rappels de géométrie projective . . . . .	2
1.2	Théorème de Pappus . . . . .	4
<b>2</b>	<b>L'espace des boîtes marquées</b>	<b>5</b>
2.1	Généralités . . . . .	5
2.2	Intérieur convexe d'une boîte marquée . . . . .	8
2.3	Opérations de boîtes marquées . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Une nouvelle apparition du groupe modulaire</b>	<b>11</b>
3.1	Le groupe $G$ . . . . .	11
3.2	Le groupe modulaire . . . . .	11
3.3	Isomorphisme entre $G$ et $\Gamma$ . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Orbite d'une boîte marquée</b>	<b>17</b>
4.1	Graphe d'incidence . . . . .	17
4.2	Graphe de Faray . . . . .	17
4.3	Actions de $\Gamma$ sur l'orbite . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Courbe de Pappus</b>	<b>22</b>
5.1	Définitions . . . . .	22
5.2	Lemme de profondeur . . . . .	24
5.3	Courbe de Pappus . . . . .	27

# 1 Le théorème de Pappus

## 1.1 Rappels de géométrie projective

Pour plus de précisions sur ce sujet, nous recommandons [3].

**Définition .** L'espace projectif réel de dimension  $n$ , noté  $P_n(\mathbb{R})$ , est l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Un sous espace projectif de  $P_n(\mathbb{R})$  de dimension  $m$  est le projeté d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension  $m+1$ . Un sous espace projectif de  $P_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n-1$  (resp. 2, resp. 3) est appelé hyperplan projectif (resp. droite projective, resp. plan projectif). Trois points de  $P_n(\mathbb{R})$  seront dit alignés s'ils appartiennent à une même droite projective. Deux points  $a$  et  $b$  distincts de  $P_n(\mathbb{R})$  définissent une droite projective  $ab$  et deux segments projectifs  $[ab] : ab - \{a, b\}$  possède deux composantes connexes  $S_1$  et  $S_2$ , et les deux segments  $[ab]$  sont  $S_1 \cup \{a, b\}$  et  $S_2 \cup \{a, b\}$ .

**Définition .** Soit  $H$  un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ne passant pas par l'origine et soit  $H'$  l'hyperplan directeur de  $H$ .  $H'$  se projete en un hyperplan projectif  $G$ . Alors  $P_n(\mathbb{R}) - G$  est naturellement homéomorphe à  $H$  : à tout point  $p$  de  $P_n(\mathbb{R}) - G$  correspond une droite de  $\mathbb{R}^{n+1}$  non incluse dans  $H'$ , qui coupe donc  $H$  en un point, que l'on prend comme image de  $p$ . Cet homéomorphisme est appelé carte affine. On dit que l'hyperplan projectif  $G$  est l'hyperplan à l'infini de cette carte affine, et ses points sont appelés points à l'infini.

**Définition .** Une application projective entre deux espaces projectifs réels est le passage au quotient d'une application linéaire injective entre les deux espaces vectoriels réels correspondants.

**Définition .** Soit  $E$  un espace projectif réel de dimension  $n$ , projeté de l'espace vectoriel  $V$ . Alors un  $n+2$ -uplet de points de  $E$  est un *repère projectif* de  $E$  si les  $n+1$  premiers points de ce  $n+2$ -uplet peuvent être obtenus par projection d'une base de  $V$ .

**Proposition 1.** Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces projectifs réels de dimension  $n$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_{n+2})$  et  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n+2})$  des repères projectifs de  $E$  et  $E'$ . Alors il existe une unique application projective de  $E$  dans  $E'$  envoyant le premier repère sur le second.

Nous aurons besoin dans la plupart des démonstrations géométriques de la notion de birapport de quatre points alignés.

On commence par associer à chaque point  $p$  de  $P_1(\mathbb{R})$  un point de  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  de la façon suivante :  $p$  est repéré par des systèmes de coordonnées homogènes  $(u : v)$  (cela veut dire que  $p$  correspond à la droite  $\lambda(u, v)$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de  $\mathbb{R}^2$ ), si  $u$  est non nul on associe à  $p$  le point  $\frac{v}{u}$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  et sinon on lui associe le point  $\infty$ . Cette application est en réalité un homéomorphisme, permettant de munir  $\overline{\mathbb{R}}$  d'une structure de droite projective. Maintenant, d'après 1, on sait que si on se donne trois points distincts sur une droite projective réelle, il existe une unique application projective de cette droite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , envoyant ces trois points sur  $\infty$ , 0 et 1.

**Définition .** Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre points d'une droite projective  $D$ , les trois premiers étant distincts. Soit  $h$  l'unique application projective de  $D$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  envoyant  $(a, b, c)$  sur  $(\infty, 0, 1)$ . On appelle *birapport* des points  $a, b, c$  et  $d$ , et on notera  $[a, b, c, d]$  l'élément de  $h(D)$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 2.** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites projectives. Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre points de  $D$  et  $a', b', c'$  et  $d'$  quatre points de  $D'$ . On suppose que  $a, b$  et  $c$  (resp.  $a', b'$  et  $c'$ ) sont distincts. Pour qu'il existe une transformation projective qui envoie  $(a, b, c, d)$  sur  $(a', b', c', d')$ , il faut et il suffit que les birapports  $[a, b, c, d]$  et  $[a', b', c', d']$  soient égaux.

En particulier le birapport est invariant par transformation projective.

*Démonstration.* Soit  $h$  (resp.  $h'$ ) l'unique application projective de  $D$  (resp.  $D'$ ) dans  $\overline{\mathbb{R}}$  envoyant  $(a, b, c)$  (resp.  $(a', b', c')$ ) sur  $(\infty, 0, 1)$  et soit  $u$  l'unique application projective de  $D$  dans  $D'$  envoyant  $(a, b, c)$  sur  $(a', b', c')$  (qui existe d'après la proposition 1). On a  $h(m) = h'(u(m))$  pour  $m$  valant  $a, b$  ou  $c$ , donc pour tout  $m$  dans  $D$ , en utilisant l'unicité dans la proposition 1 et par définition  $[a, b, c, d] = h(d)$  et  $[a', b', c', d'] = h'(d')$ .

Maintenant, si  $u(d) = d'$  l'égalité précédente donne  $h(d) = h'(d')$ , c'est l'égalité des birapports; et réciproquement si les birapports sont égaux,  $h'(d') = h(d) = h'(u(d))$  et  $u(d) = d'$  par injectivité de  $h'$ .  $\square$

**Proposition 3.** *Si  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre points de  $\overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a, b$  et  $c$  sont deux à deux distincts, alors  $[a, b, c, d] = \frac{(b-d)(a-c)}{(a-d)(b-c)}$ .*

*Démonstration.* Soit  $h$  une transformation projective envoyant la droite  $\overline{\mathbb{R}}$  sur elle-même (c'est-à-dire une application de la forme  $f \circ h \circ f^{-1}$  où  $h$  est une application projective de  $P_1(\mathbb{R})$  dans lui-même et  $f$  l'homéomorphisme entre  $P_1(\mathbb{R})$  et  $\overline{\mathbb{R}}$  défini précédemment). Soit  $m$  un point de  $P_1(\mathbb{R})$  de coordonnées homogènes  $(u : v)$ , alors les coordonnées homogènes  $(u' : v')$  de  $h(m)$  vérifient des relations de la forme  $u' = au + bv$  et  $v' = cu + dv$ , pour des réels  $a, b, c$  et  $d$ , ne dépendant pas de  $m$ , tels que  $ad - bc \neq 0$  (car l'application linéaire correspondant à l'application projective est injective). On obtient, dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , la relation suivante :  $\frac{v'}{u'} = \frac{a\frac{v}{u} + b}{c\frac{v}{u} + d}$ , et donc  $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ , pour tout  $t$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Cela montre que les transformations projectives de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans lui-même sont des homographies.

On en déduit que la transformation projective  $h$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans lui-même qui envoie  $(a, b, c)$  sur  $(\infty, 0, 1)$  est une homographie, comme elle admet  $a$  pour pôle et  $b$  pour zéro, elle est de la forme  $h(x) = \frac{\lambda(b-x)}{a-x}$ , pour un certain  $\lambda$  dont la valeur est déterminée par le fait que  $h(c) = 1$ . On obtient  $\lambda = \frac{a-c}{b-c}$  puis  $h(d) = [a, b, c, d] = \frac{(b-d)(a-c)}{(a-d)(b-c)}$ .  $\square$

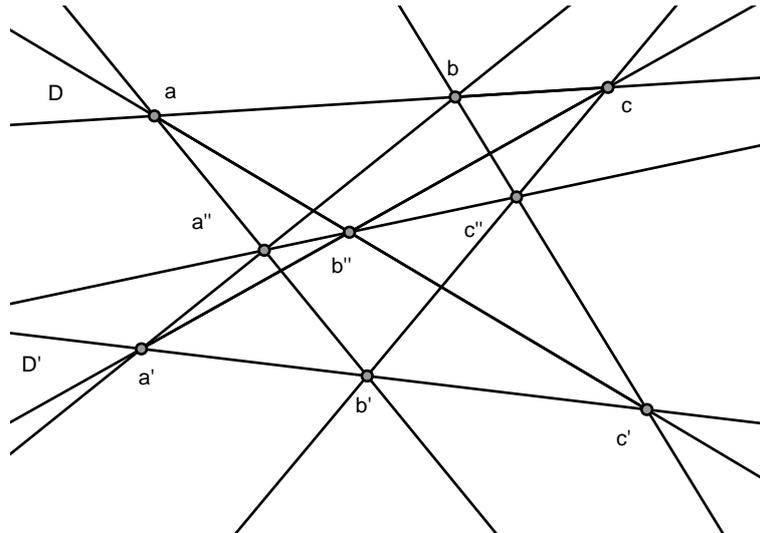
Dans toute la suite de l'exposé nous nous placerons dans le plan projectif  $P_2(\mathbb{R})$ , que nous noterons  $\mathbb{P}$  et nous dirons droite au lieu de droite projective. Nous appellerons *transformation projective* les applications projectives de  $\mathbb{P}$  dans lui-même. Si on prend deux quadruplets de points non alignés de  $\mathbb{P}$ , il existe une unique transformation projective envoyant le premier quadruplet sur le second.

**Définition .** On note  $\mathbb{P}^*$  l'ensemble des droites de  $\mathbb{P}$ . Les applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  dans  $(\mathbb{R}^3)^*$  passent au quotient et donnent des applications de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{P}^*$  que nous appellerons des *dualités*, les dualités induites par des produits scalaires (c'est à dire associées à une application linéaire qui à un point  $x$  associe la forme linéaire produit scalaire par  $x$ , pour un certain produit scalaire) sont appelées des polarités. Une dualité envoie des points alignés sur des droites concourantes. À chaque dualité  $\Delta$ , on associe une application duale  $\Delta^*$  de  $\mathbb{P}^*$  dans  $\mathbb{P}$  définie par  $\Delta^*(pq) = \Delta(p) \cap \Delta(q)$  (la définition est correcte : elle ne dépend pas du choix de  $p$  et  $q$ ). On dira qu'une application est une *symétrie projective* si c'est une transformation projective ou une dualité.

## 1.2 Théorème de Pappus

Il est maintenant temps d'énoncer le théorème de Pappus, celui que nous itérerons par la suite.

**Théorème 4.** Soient  $D$  et  $D'$  deux droites distinctes. Soient  $a, b, c$  trois points sur  $D$  et  $a', b', c'$  trois points sur  $D'$ , tous distincts, et tels que quatre points quelconques parmi ces six ne soient jamais alignés. Alors les trois points  $a'' = ab' \cap ba'$ ,  $b'' = ac' \cap ca'$  et  $c'' = bc' \cap cb'$  sont alignés.



Le théorème reste vrai si on supprime la condition de non alignement de quatre points parmi les six (la preuve est identique), mais ce n'est pas nécessaire pour la suite.

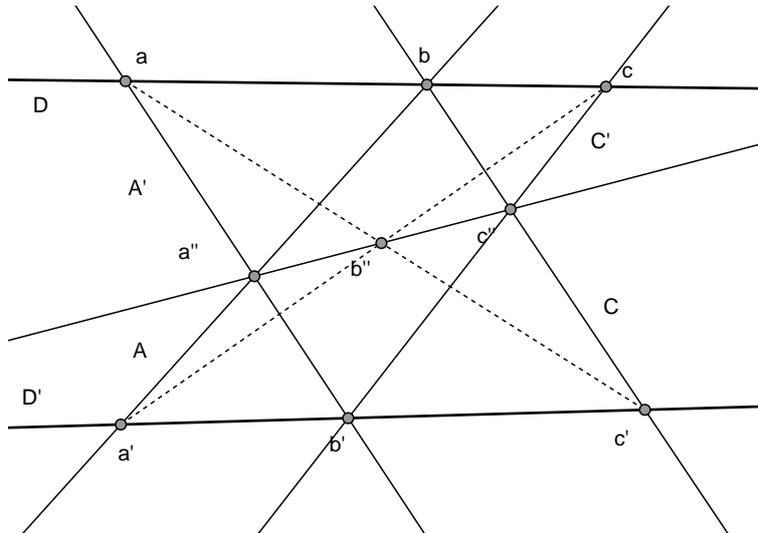
*Démonstration.* On commence par traiter le cas où le point  $a''$  n'est pas sur la droite  $cc'$ .

On fixe une carte affine et on se ramène par transformation projective au cas où  $a''$  et  $u = D \cap D'$  ont pour coordonnées affines dans cette carte respectivement  $(0, 0)$ , et  $(1, 1)$ , et où  $c$  (resp.  $c'$ ) est le point à l'infini appartenant à la droite d'ordonnée (resp. d'abscisse) nulle (c'est possible d'après la proposition 1 et notre hypothèse sur le point  $a''$ ).



conditions de convexité. L'identification est faite car échanger entre eux les points  $a$  et  $c$ , puis les points  $a'$  et  $c'$  ne change rien quand on applique le théorème de Pappus (avec les notations du théorème de Pappus).

**Définition .** On se donne un sextuplet de points  $\Omega = (a, c, a', c', b, b')$  vérifiant les conditions précédentes, on définit les droites  $A_\Omega = ba'$ ,  $C_\Omega = bc'$ ,  $A'_\Omega = ab'$ ,  $C'_\Omega = cb'$ ,  $D_\Omega = ac$ ,  $D'_\Omega = a'c'$ .



La quatrième condition sur le sextuplet  $(a, c, a', c', b, b')$  force ces six droites à être distinctes. Choisir  $(c, a, c', a', b, b')$  au lieu de  $(a, c, a', c', b, b')$  pour  $\Omega$  échange entre elles les deux droites  $A_\Omega$  et  $C_\Omega$ , et les deux droites  $A'_\Omega$  et  $C'_\Omega$ , en pratique cela n'aura aucune influence sur la suite : aucun des objets que nous définiront à partir de ces droites ne seront modifiés par ces échanges. Cela nous permettra, encore par abus de notation, d'associer à la boîte marquée  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  les six droites  $A_\Omega$ ,  $C_\Omega$ ,  $A'_\Omega$ ,  $C'_\Omega$ ,  $D_\Omega$ , et  $D'_\Omega$ , que nous renommerons donc  $A_\Theta$ ,  $C_\Theta$ ,  $A'_\Theta$ ,  $C'_\Theta$ ,  $D_\Theta$ , et  $D'_\Theta$ , voir même  $A$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $C'$ ,  $D$ , et  $D'$  lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

**Définition .** Le triplet  $(D, b, \{a, c\})$  est appelée le *haut* de la boîte marquée, le triplet  $(D', b', \{a', c'\})$  le *bas* de la boîte marquée. Les droites  $D$  et  $D'$  sont appelées *droite haute* et *droite basse* de la boîte marquée. Les points  $b$  et  $b'$  sont appelés *point haut* et *point bas* de la boîte marquée.

Nous avons défini le haut d'une boîte marquée par  $(D, b, \{a, c\})$  au lieu de  $(D, b, a, c)$ , qui a l'air plus naturel, car sinon la définition dépendrait du choix du sextuplet choisi comme représentant de notre boîte marquée.

Nous allons maintenant définir une action de l'ensemble des symétries projective sur les boîtes marquées.

**Définition .** Soit  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  dans  $\mathcal{B}$ . Si  $T$  est une transformation projective, on définit :  $T(\Theta) = (T(a), T(c), T(a'), T(c'), T(b), T(b'))$ .

Si  $\Delta$  est une dualité, on définit :  $\Delta(\Theta) = (\Delta^*(A_\Theta), \Delta^*(C_\Theta), \Delta^*(C'_\Theta), \Delta^*(A'_\Theta), \Delta^*(D_\Theta), \Delta^*(D'_\Theta))$ .

Nous allons maintenant essayer de décrire les boîtes marquées à transformation projective près. L'idée naturelle est de passer par les birapports, nous avons donc envie de définir une fonction  $f$ , allant de  $\mathcal{B}$  dans  $(\mathbb{R})^2$  par  $f(a, c, a', c', b, b') = ([ac \cap a'c', a, c, b], [ac \cap a'c', a', c', b'])$  (les conditions de convexité impliquent que cette fonction va en réalité dans  $]0, 1[^2 : ]0, 1[$  est la composante connexe de  $\mathbb{R}/\{0, 1\}$  ne contenant pas  $\infty$ ), malheureusement c'est impossible car cette définition n'est pas compatible avec la relation d'équivalence. En effet si on avait choisi  $(c, a, c', a', b, b')$  comme représentant de notre boîte marquée, on aurait obtenu  $f(c, a, c', a', b, b') = ([ac \cap a'c', c, a, b], [ac \cap a'c', c', a', b']) = (1 - [ac \cap a'c', a, c, b], 1 - [ac \cap a'c', a', c', b'])$  (par une application directe de la proposition 3). Pour contourner ce problème il suffit de définir notre fonction  $f$  comme allant de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble  $]0, 1[^2$ , quotienté par la relation d'équivalence engendrée par la relation  $\approx$ , définie par  $(x, y) \approx (1 - x, 1 - y)$ . On remarque que cette application est continue, car le birapport l'est.

**Proposition 5.** *Une boîte marquée est caractérisée, à transformation projective près, par son image par  $f$ .*

*Démonstration.* Soient  $\Theta_1 = (a_1, c_1, a'_1, c'_1, b_1, b'_1)$  et  $\Theta_2 = (a_2, c_2, a'_2, c'_2, b_2, b'_2)$  dans  $\mathcal{B}$ .

Supposons que ces boîtes marquées soient images l'une de l'autre par une transformation projective  $\Phi$ . Alors, comme  $\Phi(a_1) = a_2$  et  $\Phi(c_1) = c_2$ , on a  $\Phi((a_1c_1)) = (a_2c_2)$  et de même  $\Phi((a'_1c'_1)) = (a'_2c'_2)$ , et donc  $\Phi((a_1c_1) \cap (a'_1c'_1)) = (a_2c_2) \cap (a'_2c'_2)$ , et la proposition 2 montre que  $f(\Theta_1) = \Theta_2$ .

Réciproquement si  $f(\Theta_1) = \Theta_2$ , on commence, si nécessaire, par changer nos représentants de  $\Theta_1$  et de  $\Theta_2$  afin que l'égalité  $([a_1c_1 \cap a'_1c'_1, a_1, c_1, b_1], [a_1c_1 \cap a'_1c'_1, a'_1, c'_1, b'_1]) = ([a_2c_2 \cap a'_2c'_2, a_2, c_2, b_2], [a_2c_2 \cap a'_2c'_2, a'_2, c'_2, b'_2])$  ait lieu dans  $]0, 1[^2$  (et non dans  $\mathbb{E}$ ). On choisit  $\Phi$  la transformation projective envoyant  $(a_1, c_1, a'_1, c'_1)$  sur  $(a_2, c_2, a'_2, c'_2)$  (elle existe par la proposition 1, qui peut s'appliquer grâce à nos hypothèses de non alignement). Alors  $\Phi((a_1c_1) \cap (a'_1c'_1)) = (a_2c_2) \cap (a'_2c'_2)$ , et la restriction de  $\Phi$  à  $D_{\Theta_1}$  est donc l'unique application projective de  $D_{\Theta_1}$  dans  $D_{\Theta_2}$  envoyant  $(a_1, c_1, a_1c_1 \cap a'_1c'_1)$  sur  $(a_2, c_2, a_2c_2 \cap a'_2c'_2)$ . Mais la proposition 2 dit qu'il existe une application projective de  $D_{\Theta_1}$  dans  $D_{\Theta_2}$  envoyant  $(a_1, c_1, a_1c_1 \cap a'_1c'_1, b_1)$  sur  $(a_2, c_2, a_2c_2 \cap a'_2c'_2, b_2)$ , par unicité c'est forcément  $\Phi$ , et donc  $\Phi(b_1) = b_2$ . On montre de la même manière que  $\Phi(b'_1) = b'_2$ , cela prouve que  $\Phi(\Theta_1) = \Theta_2$ .  $\square$

**Remarque 6.** *L'application  $f$  passe donc au quotient, et donne une application  $\bar{f}$  de  $\mathcal{B}/PGL_3(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{E}$ , injective et continue. On peut aller plus loin : l'espace  $\mathcal{B}/PGL_3(\mathbb{R})$ , muni de sa topologie quotient, est homéomorphe à  $\mathcal{E}$  (qui est lui-même homéomorphe au disque unité complexe  $\mathcal{D}$ ).*

*Démonstration.* Tout d'abord, il est facile de voir que  $\bar{f}$  est une bijection : on se fixe une carte affine, et on considère la boîte  $((0, 1), (1, 1), (0, 0), (0, 1), (s, 1), (t, 0))$ , où les coordonnées données sont affines et  $s$  et  $t$  sont dans  $]0, 1[$ . Alors l'image par  $\bar{f}$  de la classe de cette boîte marquée est  $(s, t)$ .

Montrons maintenant que la réciproque de  $\bar{f}$  est continue, il suffit pour cela de montrer que les applications  $f_1$  et  $f_2$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par  $f_1(a, c, a', c', b, b') = [ac \cap a'c', a, c, b]$  et  $f_2(a, c, a', c', b, b') = [ac \cap a'c', a', c', b']$  sont ouvertes. Pour cela on se fixe un ouvert  $U$  de  $\mathcal{B}$ , que l'on peut écrire comme union d'ensembles de la forme  $\{(a, c, a', c', u, u'), (a, c, a', c') \in (\mathbb{P})^4, u \in U_1, u' \in U_2\}$  avec  $U_1$  un ouvert de  $ac$  et  $U_2$  un ouvert de  $a'c'$ . La proposition 3 montre que le birapport, vu comme fonction d'une variable (on fixe les trois premiers points, et on fait varier le quatrième),

est un homéomorphisme de la droite d'origine sur  $\overline{\mathbb{R}}$ . Cela montre que les images de chacun de nos ouverts particuliers par  $f_1$  et  $f_2$  sont ouvertes, et donc que les images de  $U$  sont ouvertes.

Il ne manque plus qu'un détail : montrer que  $\mathcal{E}$  est homéomorphe à  $\mathcal{D}$ . Pour cela, on remarque d'abord que  $]0, 1[$  est homéomorphe à  $\mathcal{D}$  et que  $\mathcal{E}$  est homéomorphe à l'ensemble  $\mathcal{D}'$  que l'on définit comme  $\mathcal{D}$ , quotienté par la relation d'équivalence engendrée par la relation  $\approx$ , définie par  $z \approx -z$ . Maintenant à chaque point  $re^{i\theta}$  de  $\mathcal{D}$  on associe l'élément  $\{re^{i\frac{\theta}{2}}, -re^{i\frac{\theta}{2}}\}$  de  $\mathcal{D}'$  (et qui envoie 0 sur  $\{0\}$ ), et l'on voit immédiatement que cette application est un homéomorphisme.  $\square$

## 2.2 Intérieur convexe d'une boîte marquée

Nous aurons besoin dans la suite d'une notion d'inclusion entre boîtes marquées, et pour cela il faut d'abord définir l'intérieur d'une boîte marquée. Malheureusement les définitions classiques d'intérieur convexe ne fonctionnent pas dans  $\mathbb{P}$ .

Nous allons maintenant essayer de définir l'intérieur d'un quadrilatère  $abcd$  (non dégénéré) de  $\mathbb{P}$ . Soit donc  $abcd$  un quadrilatère de  $\mathbb{P}$ . On commence par choisir une carte affine, que l'on utilisera dans toute cette partie. On sait d'après la proposition 1 qu'il existe une transformation projective  $\Phi$  telle que les images des points  $a, b, c$  et  $d$  aient pour coordonnées affines dans notre carte respectivement  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ . Nous avons envie de définir l'intérieur de  $abcd$  comme l'image par  $\Phi^{-1}$  de l'intérieur du carré unité de notre carte affine.

Cette définition est correcte, mais a beaucoup d'inconvénients : elle ne possède pas d'interprétation géométrique simple, et il n'est pas totalement évident à première vue qu'elle ne dépende pas du choix de la carte affine, ni du choix de l'ordre cyclique des points  $a, b, c$  et  $d$ . C'est pour cela que nous allons donner une seconde définition, équivalente à la première.

**Définition .** Le *bord* d'un quadrilatère  $abcd$  (non dégénéré) de  $\mathbb{P}$  est la courbe fermée de  $\mathbb{P}$  composée des segments  $[ab]$ ,  $[bc]$ ,  $[cd]$  et  $[da]$ , choisis de la façon suivante : on choisit les segments  $[ab]$  et  $[cd]$  ne contenant pas  $ab \cap cd$ , et les segments  $[ad]$  et  $[bc]$  ne contenant pas  $ad \cap bc$ .

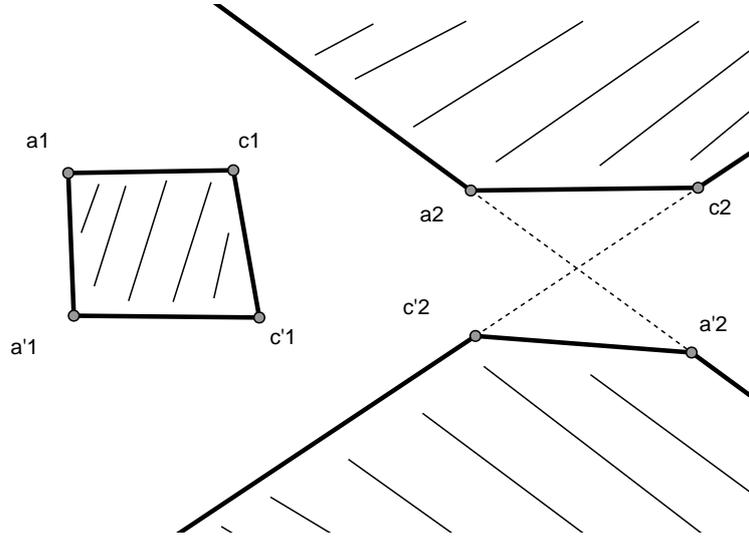
**Proposition 7.** *Le bord d'un quadrilatère  $abcd$  (non dégénéré) sépare  $\mathbb{P}$  en deux composantes connexes, dont une ne contient ni  $ab \cap cd$  ni  $ad \cap bc$ .*

*Démonstration.* Nous allons utiliser notre carte affine et notre transformation projective  $\Phi$  telle que les images  $a', b', c'$  et  $d'$  des points  $a, b, c$  et  $d$  aient pour coordonnées affines dans notre carte respectivement  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ . L'image par  $\Phi$  du bord de  $abcd$  est le bord de  $a'b'c'd'$ , qui est le bord du carré unité au sens affine usuel. On peut définir une application  $\delta$  du plan affine dans  $\overline{\mathbb{R}}$  envoyant un point sur le maximum de ces distances, en abscisse et en ordonnée, au point de coordonnées  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , et prolonger cette application à  $\mathbb{P}$  tout entier en envoyant un point à l'infini de notre carte affine sur  $\infty$ .  $\delta$  est continue et le bord de  $a'b'c'd'$ , étant égal à  $d^{-1}(\frac{1}{2})$ , sépare  $\mathbb{P}$  en les composantes connexes  $C_1 = d^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$  et  $C_2 = d^{-1}([\frac{1}{2}, \infty[)$ . Le bord de  $abcd$  sépare donc  $\mathbb{P}$  en deux composantes connexes :  $\Phi^{-1}(C_1)$  et  $\Phi^{-1}(C_2)$ . De plus la composante  $\Phi^{-1}(C_1)$  ne contient ni  $ab \cap cd$ , ni  $ad \cap bc$  (car les images par  $\Phi$  de ces deux points sont à l'infini, donc envoyées sur  $\infty$  par  $d$ ).  $\square$

Cela nous permet la définition suivante (qui ne dépend pas de l'ordre cyclique des points  $a, b, c$  et  $d$ ).

**Définition .** L'*intérieur convexe* du quadrilatère  $abcd$  (non dégénéré) est la composante connexe de  $\mathbb{P} - \text{bord}abcd$  ne contenant ni  $ab \cap cd$  ni  $ad \cap bc$ .

**Définition .** L'intérieur convexe de  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  appartenant à  $\mathcal{B}$  est l'intérieur convexe du quadrilatère  $acc'a'$ , on le notera par la suite  $I(\Theta)$ .



**Remarque 8.** L'action des transformations projectives sur  $\mathcal{B}$  préserve les intérieurs convexes au sens suivant : pour toute transformation projective  $T$  et toute boîte marquée  $\Theta$ ,  $I(T(\Theta)) = T(I(\Theta))$  (il suffit d'examiner en détail la définition : on remarque que tous les objets utilisés pour définir l'intérieur convexe, c'est-à-dire les intersections de droites et les composantes connexes, sont préservées par transformation projective).

### 2.3 Opérations de boîtes marquées

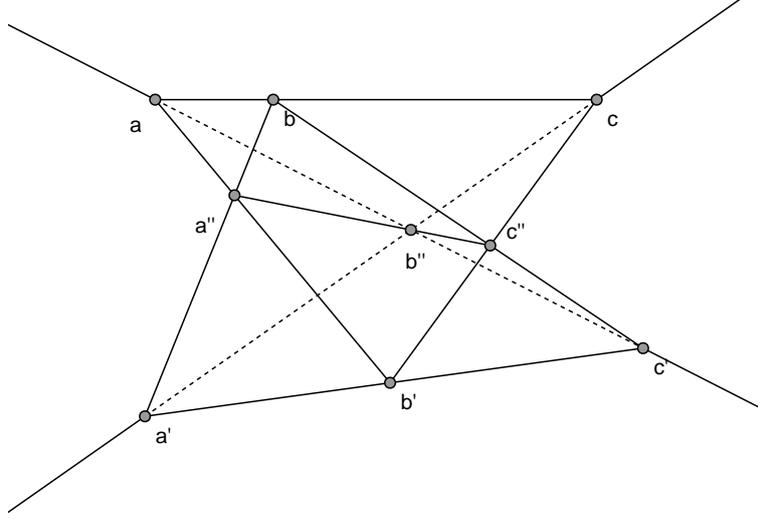
Il est maintenant temps de définir comment appliquer le théorème de Pappus aux boîtes marquées.

**Définition .** On définit ici quatre applications allant de  $\mathcal{B}$  dans lui-même :  $1$ ,  $i$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Soit  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  dans  $\mathcal{B}$ . On pose  $a'' = A \cap A'$ ,  $c'' = C \cap C'$  et  $b'' = ac' \cap ca'$ . On définit :

- $1(\Theta) = \Theta$
- $i(\Theta) = (a', c', c, a, b', b)$
- $\tau_1(\Theta) = (a, c, a'', c'', b, b'')$
- $\tau_2(\Theta) = (a'', c'', a', c', b', b'')$ .

Nous appellerons ces quatre applications des *opérations de boîtes marquées*.

Appliquer  $\tau_1$  à une boîte marquée revient à lui appliquer le théorème de Pappus et à remplacer sa droite inférieure par la nouvelle droite obtenue, lui appliquer  $\tau_2$  revient à lui appliquer le théorème de Pappus et à remplacer sa droite supérieure par la nouvelle droite. Le rôle de  $i$  est plus compliqué à comprendre, il sera éclairci par le lemme 11.



**Proposition 9.** *Les opérations de boîtes marquées commutent avec les symétries projectives.*

*Démonstration.* Le calcul est immédiat pour les transformations projectives (car une transformation projective préserve les intersections de droites), et pour montrer la commutativité de  $i$  avec les dualités.

Il reste à montrer que les dualités commutent avec  $\tau_1$  (le cas  $\tau_2$  est symétrique). Soit donc  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  une boîte marquée et  $\Delta$  une dualité. Pour simplifier les notations, nous noterons  $X^*$  à la place de  $\Delta^*(X)$  pour toute droite  $X$  de  $\mathbb{P}$ . Nous avons

$$\Delta \circ \tau_1(\Theta) = (A^*, C^*, (ca')^*, (ac')^*, D^*, (a''c'')^*)$$

et

$$\tau_1 \circ \Delta(\Theta) = (A^*, C^*, A^*D'^* \cap D^*C'^*, C^*D'^* \cap D^*A'^*, D^*, A^*A'^* \cap C^*C'^*).$$

On remarque maintenant que si  $X$  et  $X'$  sont deux droites distinctes,  $X^*X'^* = \Delta(X \cap X')$ . En effet, en notant  $\{p\} = X \cap X'$ ,  $x$  un point de  $X$  différent de  $p$  et  $x'$  un point de  $X'$  différent de  $p$ , on a  $X^* = (xp)^* = \Delta(x) \cap \Delta(p)$  et de même  $X'^* = \Delta(x') \cap \Delta(p)$  et comme  $\Delta(p)$ ,  $\Delta(x)$  et  $\Delta(x')$  sont des droites deux à deux distinctes (car les points le sont), on a bien le résultat voulu.

Cela permet d'écrire  $A^*D'^* \cap D^*C'^* = \Delta(A \cap D') \cap \Delta(D \cap C') = \Delta(a') \cap \Delta(c) = (ca')^*$  et de même  $C^*D'^* \cap D^*A'^* = (ac')^*$  et enfin  $A^*A'^* \cap C^*C'^* = (a''c'')^*$ .  $\square$

**Remarque 10.** *Soit  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  une boîte marquée. Alors  $I(\tau_1(\Theta))$  et  $I(\tau_2(\Theta))$  sont inclus strictement dans  $I(\Theta)$  (plus précisément : le point bas de  $\Theta$  est dans  $I(\Theta)$  mais pas dans  $I(\tau_1(\Theta))$ , et le point haut de  $\Theta$  est dans  $I(\Theta)$  mais pas dans  $I(\tau_2(\Theta))$ ). Pour cela il suffit de choisir une carte affine, de prendre  $\Phi$  la transformation projective envoyant les points  $a, c, c'$  et  $a'$  respectivement sur  $(0, 1), (1, 1), (1, 0)$  et  $(0, 0)$  (coordonnées affines). Il est immédiat (en utilisant les hypothèses de convexité) que  $I(\tau_1(\Phi(\Theta)))$  et  $I(\tau_2(\Phi(\Theta)))$  sont inclus strictement dans  $I(\Phi(\Theta))$  (le carré unité), puis on applique la remarque 8. On remarque de la même manière que  $I(i(\Theta))$  est presque disjoint de  $I(\Theta)$  (ils ne sont pas disjoints, mais leurs intérieurs, au sens usuel du terme, le sont).*

### 3 Une nouvelle apparition du groupe modulaire

Nous allons définir dans cette partie un groupe  $G$  dont l'action sur  $\mathcal{B}$  reviendra à itérer le théorème de Pappus. Un résultat remarquable est que ce groupe est en fait isomorphe au groupe modulaire, un groupe bien connu en mathématiques, intervenant dans de nombreux domaines (théorie des nombres, algèbre, géométrie). C'est ce que nous montrerons dans cette partie, pour cela nous passerons par l'intermédiaire de la théorie des présentations de groupes, et nous montrerons que le groupe  $G$  et le groupe modulaire admettent la même présentation.

#### 3.1 Le groupe $G$

Nous définissons et étudions dans cette partie le groupe  $G$ , qui nous permettra plus tard d'itérer le théorème de Pappus sur nos boîtes marquées.

**Lemme 11.** *Les applications  $i$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de  $\mathcal{B}$  dans lui-même vérifient les relations de composition suivantes :  $i^2 = 1$  ;  $\tau_1 i \tau_2 = i$  ;  $\tau_2 i \tau_1 = i$  ;  $\tau_1 i \tau_1 = \tau_2$  ;  $\tau_2 i \tau_2 = \tau_1$ .*

*Démonstration.* Montrons les troisième et quatrième égalités (la première est évidente et les seconde et cinquième découlent des troisième et quatrième par symétrie). Soit  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  une boîte marquée. Les calculs donnent (en notant de la même manière un point de  $\mathbb{P}$  et le singleton qu'il définit) :

$$i\tau_1(\Theta) = (A \cap A', C \cap C', c, a, ac' \cap ca', b),$$

$$\tau_1 i \tau_1(\Theta) = (A \cap A', C \cap C', ca' \cap A, ac' \cap C, ac' \cap ca', ((A \cap A')a) \cap ((C \cap C')c)),$$

$$\tau_2 i \tau_1(\Theta) = (ac' \cap C, ca' \cap A, c, a, ((A \cap A')a) \cap ((C \cap C')c), b).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer sur la figure que  $ac' \cap C = c'$  ;  $ca' \cap A = a'$  ;  $((A \cap A')a) \cap ((C \cap C')c) = A' \cap C' = b'$ . □

**Définition .** On appelle  $G$  le monoïde engendré par  $i$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

**Proposition 12.** *Le monoïde  $G$  est en fait un groupe, et  $i$  et  $\tau_1$  engendrent le groupe  $G$ .*

*Démonstration.* Conséquence directe de 11. □

**Lemme 13.** *Le sous-monoïde de  $G$  engendré par  $\tau_1$  et  $\tau_1 i \tau_1$  est libre et ne contient pas  $i$ .*

*Démonstration.* On se fixe une boîte marquée  $\Theta$  quelconque, et on prend un élément  $g$  de  $G$  s'écrivant comme produit non vide de  $\tau_1$  et de  $\tau_1 i \tau_1 = \tau_2$ . La remarque 10 permet de montrer, par récurrence sur le nombre de facteurs du produit, que  $I(g(\Theta))$  est inclus strictement dans  $I(\Theta)$ , et en particulier  $g$  ne peut valoir ni 1, ni  $i$ . □

#### 3.2 Le groupe modulaire

Nous définissons dans cette partie le groupe modulaire  $\Gamma$ , et étudions certaines de ses propriétés. Nous nous sommes appuyés sur [4] pour cette partie.

**Définition .** On appelle *groupe modulaire* le groupe  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm Id\}$ . Dans toute la suite, on fera l'abus de notation suivant : on notera  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  au lieu de  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$  pour les éléments de  $\Gamma$ .

**Proposition 14.** Soit  $\mathbb{H}$  le demi-plan supérieur ouvert de  $\mathbb{C}$ . Le groupe  $\Gamma$  agit fidèlement sur  $\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*Démonstration.* Soit  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\Gamma$ . Nous avons, pour tout  $z \in \tilde{\mathbb{H}}$ ,

$$gz = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{az\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}.$$

Donc  $\text{Im}(gz) = \frac{(ad-bc)\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ .

Soit  $g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  dans  $\Gamma$ . Nous avons, pour tout  $z \in \tilde{\mathbb{H}}$ ,

$$(gg')z = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}$$

et

$$g(g'(z)) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')} = (gg')z$$

Enfin l'action est fidèle car si  $z = \frac{az+b}{cz+d}$ , pour tout  $z \in \tilde{\mathbb{H}}$ , alors  $cz^2 + (d-a)z + b = 0$  pour tout  $z \in \tilde{\mathbb{H}}$ , ce qui implique que  $c = b = 0$  et  $a = d$ , donc  $g = \{\pm Id\}$ .  $\square$

On note  $D$  l'ensemble des points de  $\tilde{\mathbb{H}}$  vérifiant  $|z| \geq 1$  et  $|\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ . On pose  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ils sont dans  $\Gamma$  et vérifient  $S^2 = (ST)^3 = 1$ . La partie  $D$  de  $\tilde{\mathbb{H}}$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{\mathbb{H}}$  au sens suivant :

**Lemme 15.** Pour tout  $z \in H$ , il existe  $g \in \Gamma$  tel que  $gz$  appartienne à  $D$ . Deux points distincts,  $z$  et  $z'$  de l'intérieur  $D$  ne peuvent être congrus modulo  $\Gamma$  que si  $\text{Re}(z) = \pm \frac{1}{2}$  et  $\text{Re}(z') = \pm \frac{1}{2}$  ou bien si  $|z| = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma_0$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $S$  et  $T$ . Montrons que pour tout  $z \in H$ , il existe  $g \in \Gamma_0$  tel que  $gz$  appartienne à  $D$ . Soit donc  $z \in \tilde{\mathbb{H}}$  et  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . On sait que  $\text{Im}(gz) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ . Or il n'existe qu'un nombre fini de couples d'entiers  $(c, d)$  tels que  $|cz+d|^2 \leq 1$ . On en déduit donc qu'il existe un élément  $g' \in \Gamma_0$  maximisant  $\text{Im}(g'z)$ . Il existe ensuite  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|\text{Re}(T^n g'(z))| \leq \frac{1}{2}$  mais alors forcément  $T^n g'(z) \in D$  car sinon  $|T^n g'(z)| < 1$  et alors  $\text{Im}(ST^n g'(z)) = \text{Im}\left(\frac{-1}{T^n g'(z)}\right) = \frac{\text{Im}(T^n g'(z))}{|T^n g'(z)|} > \text{Im}(T^n g'(z))$ , ce qui contredit la définition de  $g'$ .

Nous renvoyons à [4] pour la preuve du deuxième point.  $\square$

**Corollaire 16.** *Le groupe  $\Gamma$  est engendré par  $S$  et  $T$ .*

*Démonstration.* Soient  $z \in \overset{\circ}{D}$  et  $g \in \Gamma$ . Le lemme nous donne  $g_0 \in \Gamma_0$  tel que  $g_0gz$  soit dans  $D$ . Mais comme  $z$  est dans  $\overset{\circ}{D}$ , le lemme nous dit que  $g_0gz = z$ , et donc que  $g = g_0^{-1}$ , puisque les éléments de  $\Gamma$  agissent bijectivement sur  $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ . Donc  $g \in \Gamma_0$ , puis  $\Gamma = \Gamma_0$ .  $\square$

**Lemme 17.** *Le sous-monoïde de  $\Gamma$  engendré par  $T$  ou  $TST$  est libre et ne contient pas  $S$ .*

*Démonstration.* Nous avons  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $TST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On démontre ensuite, par récurrence sur le nombre de facteurs dans un produit non vide de  $T$  et de  $TST$ , que si on prend un représentant dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  du produit obtenu :

- tous ses coefficients sont de même signe ;
- la valeur absolue de la somme de ces coefficients est plus grande que 3.

En effet, quand on multiplie par  $T$  ou par  $TST$  une matrice vérifiant ces deux propriétés, la matrice obtenue les vérifie encore, ce qui permet la propagation de la récurrence. On en déduit qu'un produit de ce type ne peut valoir ni  $\text{Id}$ , ni  $S$ .  $\square$

### 3.3 Isomorphisme entre $G$ et $\Gamma$

Nous allons définir le groupe libre  $F(X)$  de base un ensemble donné  $X$  qui est intuitivement le groupe engendré par l'ensemble  $X$  tel que les seules relations entre les éléments de  $F(X)$  soient celles impliquées par les axiomes de groupe.

Soit  $X$  un ensemble, soit  $X^{-1}$  un ensemble en bijection avec  $X$  et disjoint de  $X$  ; si  $a$  est un élément de  $X$ , on note  $a^{-1}$  l'élément de  $X^{-1}$ , image de  $a$  par la bijection de  $X$  dans  $X^{-1}$ . Soit  $A = X \cup X^{-1}$  et  $A^*$  le monoïde libre d'alphabet  $A$  (l'ensemble des mots d'alphabet  $A$ ).

**Définition .** Un mot de  $A^*$  est dit *réduit* s'il ne contient pas de sous-mots de la forme  $xx^{-1}$  ou  $x^{-1}x$ , où  $x \in X$ . Une *réduction* consiste à supprimer un des sous-mots du type  $xx^{-1}$  ou  $x^{-1}x$  d'un mot de  $A^*$ . Un mot  $u$  de  $A^*$  sera appelé une *forme réduite* d'un mot  $v$  de  $A^*$  si  $u$  est réduit et peut s'obtenir à partir de  $v$  par des réductions successives.

**Proposition 18.** *Soit  $v$  un mot de  $A^*$ , il existe une unique forme réduite de ce mot.*

*Démonstration.* Tout d'abord il existe une forme réduite de  $v$ , en effet une réduction diminue strictement la longueur du mot de départ, et donc, si on réduit  $v$  tant que c'est possible, il arrive un moment où l'on ne peut plus faire de réduction : le mot obtenu est alors réduit.

Pour montrer l'unicité, on procède par récurrence sur la longueur du mot  $v$  de  $A^*$ . Si le mot est réduit, il n'y a rien à prouver. Soit  $a \in A$ , avec la convention que si  $a = x^{-1}$  où  $x \in X$ , alors  $a^{-1} = x$ . Supposons que  $aa^{-1}$  est un sous-mot du mot  $u$ , on écrit donc  $v = gaa^{-1}d$  où  $g$  et  $d$  sont aussi des mots. On va montrer que toute forme réduite de  $v$  peut-être obtenue en supprimant d'abord  $aa^{-1}$ , puis en effectuant des réductions sur le mot  $gd$  obtenu, ce qui nous permettra de conclure car notre hypothèse de récurrence nous dit que  $gd$  n'a qu'une forme réduite.

Soit donc  $u$  une forme réduite du mot  $v = gaa^{-1}d$ , obtenue par une suite de réductions donnée. Deux cas sont possibles :

- une des étapes de la réduction de  $v$  à  $u$  consiste à supprimer le sous-mot  $aa^{-1}$  initial ; mais alors, si on effectue la même suite de réductions, mais en déplaçant la suppression du sous-mot  $aa^{-1}$  au début, on aboutit au même mot réduit  $u$ .

- le facteur  $aa^{-1}$  a été détruit lors d'une opération du type  $(a^{-1}a)a^{-1} \rightarrow a^{-1}$  ou  $a(a^{-1}a) \rightarrow a$ . Mais le mot qu'on obtient ainsi est le même que si, à la place de cette réduction supprimant le sous-mot  $a^{-1}a$ , on avait réduit le mot en supprimant l'occurrence initiale  $aa^{-1}$ , donc on est ramené au premier cas et on peut conclure.  $\square$

**Définition .** On note  $[u]$  la forme réduite du mot  $u$  de  $A^*$ .

**Proposition 19.** Soient  $u, u', v, v'$  des mots de  $A^*$ . Si  $[u] = [u']$  et  $[v] = [v']$ , alors  $[uv] = [u'v']$ .

*Démonstration.* On part du mot  $uv$ , et on effectue des réductions la façon suivante : on commence par effectuer les réductions correspondant à une suite de réductions transformant  $u$  en  $[u]$ , cela transforme  $uv$  en  $[u]v$ , puis, de la même manière, on effectue les réductions correspondant à une suite de réductions transformant  $v$  en  $[v]$ , on obtient ainsi le mot  $[u][v]$ , et cela prouve que  $[uv] = [[u][v]]$ . La même méthode prouve que  $[u'v'] = [[u'][v']]$  et donc, puisque  $[u] = [u']$  et  $[v] = [v']$ , que  $[uv] = [u'v']$ .  $\square$

**Définition .** Soit  $F(X)$  l'ensemble des mots réduits de  $A^*$ . Soient  $u$  et  $v$  deux mots de  $A^*$ , on définit le produit des mots réduits  $[u]$  et  $[v]$  par :  $[u] * [v] = [uv]$ . Cette définition a bien un sens d'après la proposition 19.

**Proposition 20.**  $(F(X), *)$  est un groupe, appelé le groupe libre de base  $X$ .

*Démonstration.* Associativité : soient  $u, v$  et  $w$  des mots de  $A^*$ .

$$([u] * [v]) * [w] = [uv] * [w] = [(uv)w] = [u(vw)] = [u] * [vw] = [u] * ([v] * [w]).$$

Il est clair que le mot vide  $\epsilon$  est l'élément neutre de  $F(X)$ .

Soit  $u = a_1a_2\dots a_n \in A^*$  et  $v = a_n^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}$ . On a :  $[u]*[v] = [uv] = [a_1a_2\dots a_na_n^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}] = \epsilon$  et donc l'inverse d'un mot réduit  $a_1a_2\dots a_n$  de  $F(X)$  est le mot réduit  $a_n^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}$ .  $\square$

Le groupe libre de  $F(X)$  de base  $X$  vérifie la propriété universelle suivante :

**Proposition 21.** Pour tout groupe  $G$ , et toute application  $f$  de  $X$  dans  $G$ , il existe un unique morphisme de groupe  $\bar{f}$  de  $F(X)$  dans  $G$  prolongeant  $f$ .

*Démonstration.* On prolonge  $f$  à  $A$  par  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ , pour  $x \in X$ , puis à  $A^*$  par  $f(a_1a_2\dots a_n) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n)$ , où les  $a_i$  sont dans  $A$ . On définit  $\bar{f}$  sur  $F(X)$  en associant à un mot réduit son image par  $f$ . On remarque maintenant que  $f(u) = f([u])$ , car une opération de réduction ne change pas l'image d'un mot par  $f$  :  $f(gxx^{-1}d) = f(g)f(x)f(x)^{-1}f(d) = f(gd)$  pour tous  $g$  et  $d$  dans  $A^*$  et tout  $x$  dans  $A$ . On obtient bien ainsi un morphisme de groupes car, pour tout  $u$  et  $v$  dans  $F(X)$ ,  $\bar{f}([u] * [v]) = \bar{f}([uv]) = f([uv]) = f(uv) = f(u)f(v) = \bar{f}[u]\bar{f}[v]$ . Il est bien sûr unique car un morphisme de groupe  $g$  de  $F(X)$  dans  $G$  prolongeant  $f$  vérifie forcément  $g(a_1a_2\dots a_n) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n)$ , pour tout mot réduit  $a_1a_2\dots a_n$  (où les  $a_i$  sont dans  $A$ ).  $\square$

Tout groupe  $G$  est isomorphe à un quotient d'un groupe libre : soit  $X$  un sous-ensemble de  $G$  engendrant  $G$  en tant que groupe (par exemple  $X = G$ ). On dispose alors d'un morphisme de groupe de  $F(X)$  dans  $G$  prolongeant l'inclusion (d'après la propriété 21), qui est surjectif puisque  $X$  engendre  $G$ . Les éléments du noyau  $N$  de ce morphisme sont appelés des relations. On se donne une partie  $R$  de  $N$  telle que le sous-groupe distingué de  $F(X)$  engendré par  $R$  soit égal à  $N$  : on dit que  $G = \langle X | R \rangle$  est une présentation du groupe  $G$ , définie par les générateurs  $X$  et les relations  $R$ . Un groupe peut admettre de nombreuses présentations. On fera par la suite l'abus de notation de noter  $u$  à la place de  $[u]$ .

**Lemme 22.** Soit  $H$  un groupe admettant  $H = \langle x, y | x^2 = 1, (xy)^3 = 1 \rangle$  comme présentation (cette notation veut dire que  $H = F(\{x, y\}) / \langle \{x^2, (xy)^3\} \rangle$ ). Soit  $H_0$  le sous-monoïde de  $H$  engendré par  $y$  et  $xyx$ . Alors  $H_0$  est un monoïde libre et  $H = H_0 \cup xH_0 \cup H_0x \cup (xH_0x - \{1\})$ .

**Remarque 23.** Nous montrerons un peu plus tard que cette union est en réalité presque disjointe (un seul élément de  $H$  appartient à plusieurs de ces ensembles :  $x$ , qui est dans  $xH_0$  et dans  $H_0x$ ), c'est l'objet de la remarque 26.

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $H_0$  est libre. Pour cela, on utilise la proposition 21 qui nous donne un morphisme  $\phi$  de  $F(\{x, y\})$  dans  $\Gamma$  tel que  $\phi(x) = S$  et  $\phi(y) = T$ . Ce morphisme passe au quotient et nous donne un morphisme  $\bar{\phi}$  de  $H$  dans  $\Gamma$ . On sait d'après 17 que le sous-monoïde de  $\Gamma$  engendré par  $T$  et  $TST$  est libre, comme  $\bar{\phi}(y) = T$  et  $\bar{\phi}(yxy) = TST$  cela nous donne le résultat.

Soit  $\bar{w} \in H$ . On écrit  $w$  comme un produit de  $x$ , de  $y$ , de  $x^{-1}$  et de  $y^{-1}$  (on voit ces mots comme des éléments de  $H$ ) puis on modifie notre écriture de  $w$  en remplaçant les  $x^{-1}$  par des  $x$  et les  $y^{-1}$  par des  $xyxyx$ , et en supprimant les occurrences de  $x^2$  (c'est possible d'après les relations). Cela nous donne une expression de la forme

$$w = x^{a_0} y^{a_1} x y^{a_2} x \dots x y^{a_n} x^{a_{n+1}}$$

où  $a_0$  et  $a_{n+1}$  valent 0 ou 1 (avec  $(a_0, a_{n+1}) \neq (1, 1)$  si  $n = 0$ ) et les autres  $a_i$  sont strictement positifs.

Maintenant, si l'un des  $a_i$ , pour  $i$  dans  $\{2, \dots, n-1\}$ , vaut 1, cela veut dire qu'il y a une occurrence de  $xyxy$  dans notre écriture de  $w$ , on la remplace par  $x$  (toujours en utilisant nos relations), puis on supprime les éventuelles occurrences de  $x^2$  obtenues dans le mot. On itère ce processus, et comme la longueur du mot décroît strictement, on termine au bout d'un moment. Cela nous donne une relation de la forme précédente mais où les  $a_i$  pour  $i$  dans  $\{2, \dots, n-1\}$  sont supérieurs à 2. On peut la réécrire sous la forme :

$$\bar{w} = x^{a_0} y^{a_1-1} (yxy) y^{a_2-2} (yxy) \dots (yxy) y^{a_n-1} x^{a_{n+1}}$$

Ce qui prouve le résultat : si  $(a_0, a_{n+1}) = (0, 0)$  alors  $w \in H_0$ , si  $(a_0, a_{n+1}) = (1, 0)$  alors  $w \in xH_0$ , si  $(a_0, a_{n+1}) = (0, 1)$  alors  $w \in H_0x$  et si  $(a_0, a_{n+1}) = (1, 1)$  alors  $w \in xH_0x$ , on vient de montrer que  $H = H_0 \cup xH_0 \cup H_0x \cup (xH_0x - \{1\})$ .

□

**Théorème 24.** Un groupe  $G$  engendré par deux éléments  $x$  et  $y$  vérifiant  $x^2 = 1$  et  $(xy)^3 = 1$ , tel que le sous-monoïde  $M$  engendré par  $y$  et  $xyx$  soit libre (en tant que monoïde), et ne contienne pas  $x$ , admet  $H = \langle x, y | x^2 = 1, (xy)^3 = 1 \rangle$  comme présentation.

*Démonstration.* La proposition 21 nous donne un morphisme de groupes  $f$  de  $F(\{x, y\})$  dans  $G$  tel que  $f(x) = x$  et  $f(y) = y$ . Les relations  $x^2 = 1$  et  $(xy)^3 = 1$  permettent de passer au quotient et nous donnent un morphisme de groupes  $\bar{f}$  de  $\langle x, y | x^2 = 1, (xy)^3 = 1 \rangle$  dans  $G$  vérifiant toujours  $\bar{f}(x) = x$  et  $\bar{f}(y) = y$ . Comme  $f$  est surjectif (car  $x$  et  $y$  engendrent  $G$ ),  $\bar{f}$  l'est aussi. Montrons maintenant que  $\bar{f}$  est injectif.

Soit donc  $w \in \langle x, y | x^2 = 1, (xy)^3 = 1 \rangle$ . Soit  $H_0$  le sous-monoïde libre de  $H$  engendré par  $y$  et  $xyx$ , on a  $H = H_0 \cup xH_0 \cup H_0x \cup (xH_0x - \{1\})$  (c'est le lemme 22). Les hypothèses donnent que  $f$  induit un isomorphisme de monoïdes entre  $H_0$  et  $M$ . On distingue les cas :

- si  $w \in H_0$ , alors, comme  $f$  induit un isomorphisme de monoïdes entre  $H_0$  et  $M$ ,  $f(w) = 1 \Leftrightarrow w = 1$ ,
- si  $w \in xH_0$ , alors  $f(w) \in xM$  donc  $f(w) \neq 1$  puisque  $x = x^{-1}$  n'est pas dans  $M$  par hypothèse,
- si  $w \in H_0x$ , par le même raisonnement  $f(w) \neq 1$ ,
- si  $w \in (xH_0x - \{1\})$ , alors  $f(w) \in xMx$ , on écrit  $w = xhx$  avec  $h \in H_0$ , on a alors  $f(w) = xf(h)x$  et  $f(w) = 1 \Leftrightarrow f(h) = x^2 = 1 \Leftrightarrow h = 1 \Leftrightarrow w = 1$ , ce qui est impossible.

En regroupant les cas, on a bien montré que  $f(w) = 1 \Leftrightarrow w = 1$ . □

**Corollaire 25.** *Les groupes  $G$  et  $\Gamma$  admettent  $\langle x, y : x^2 = 1 \ (xy)^3 = 1 \rangle$  comme présentation, donc  $G$  et  $\Gamma$  sont isomorphes, et on peut choisir l'isomorphisme de façon à ce qu'il envoie  $i$  et  $\tau_1$  respectivement sur  $S$  et sur  $T$ .*

*Démonstration.* Conséquence directe des lemmes 17 et 13, et du théorème 24. □

**Remarque 26.** *Nous pouvons maintenant prouver la remarque 23*

*Démonstration.* Le corollaire 25 nous permet de travailler sur  $\Gamma$  au lieu de travailler sur  $H$ . On note par  $\Gamma_0$  le sous-monoïde de  $\Gamma$  engendré par  $T$  ou  $TST$ , il s'agit de montrer que les quatre ensemble  $\Gamma_0$ ,  $S\Gamma_0$ ,  $\Gamma'S$  et  $S\Gamma'S - \{\text{Id}\}$  sont disjoints deux à deux. Le lemme 17 permet de remplacer l'ensemble  $\Gamma_0$  par l'ensemble  $\Gamma_0 - \{\text{Id}\}$  car il montre que  $\text{Id}$  n'appartient ni à  $S\Gamma_0$  ni à  $\Gamma'S$ .

Une légère modification de la récurrence de la preuve du lemme 17 montre qu'un représentant dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  d'un élément de  $\Gamma_0 - \{\text{Id}\}$  :

- a tous ces coefficients de même signe,
- a tous ces coefficients diagonaux non nuls,
- possède au moins un coefficient non nul hors de la diagonale.

L'étude de comment sont modifiées ces propriétés par les diverses multiplications par  $S$  va nous donner des propriétés vérifiées par les éléments de nos trois autres ensembles.

Un représentant dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  d'un élément de  $S\Gamma_0 - \{S\}$  :

- a ses coefficients supérieur droit et inférieur gauche non nuls et de signes opposés,
- a au moins un coefficient diagonal non nul,
- vérifie que deux de ses coefficients, situés sur une même ligne, ont même signe.

Un représentant dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  d'un élément de  $\Gamma_0S - \{S\}$  :

- a ses coefficients supérieur droit et inférieur gauche non nuls et de signes opposés,
- a au moins un coefficient diagonal non nul,
- vérifie que deux de ses coefficients, situés sur une même colonne, ont même signe.

Un représentant dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  d'un élément de  $S\Gamma_0S - \{\text{Id}\}$  :

- a ses coefficients diagonaux non nuls et de même signe,
- possède au moins un coefficient non nul hors de la diagonale,
- vérifie que ses coefficients, situés hors de la diagonale, n'ont pas le même signe que ses coefficients diagonaux.

Maintenant, un examen de ces quatre propriétés montre qu'elles s'excluent mutuellement, et donc que les quatre ensembles sont disjoints. □

## 4 Orbite d'une boîte marquée

Il nous faut maintenant étudier les orbites de nos boîtes marquées sous l'action du groupe  $G$ . Pour cela nous commençons par définir, pour chacune de ces orbites, un graphe décrivant cette orbite. On fixe, jusqu'à la fin de l'exposé, une boîte marquée  $\Theta$ .

### 4.1 Graphe d'incidence

**Définition .** On pose  $\Omega = \Omega(\Theta)$  l'orbite de  $\Theta \in \mathcal{B}$  sous l'action de  $G$ .

**Proposition 27.** *Le groupe  $G$  agit librement et transitivement sur  $\Omega$ .*

*Démonstration.* On note  $G_0$  le sous monoïde de  $G$  engendré par  $i$  et  $\tau_1$ , le lemme 22 nous dit que  $G = G_0 \cup iG_0 \cup G_0i \cup (iG_0i - \{1\})$ . Soit  $\Psi \in \Omega$  et  $g \in G$  tels que  $g(\Psi) = \Psi$ . Mais (nous utiliserons de façon répétée, sans la citer, la remarque 10)

- si  $g \in G_0 - \{1\}$ , alors  $I(g(\Psi))$  est inclus strictement dans  $I(\Psi)$ , impossible ;
- si  $g \in iG_0$ , alors on écrit  $g = ig'$  avec  $g' \in G_0$  et  $I(g(\Psi)) = I(ig_0(\Psi))$  a son intérieur (au sens topologique du terme) disjoint de celui de  $I(g_0(\Psi))$ , contenu dans  $I(\Psi)$ , impossible ;
- si  $g \in G_0i$ , alors on écrit  $g = g'i$  avec  $g' \in G_0$  et  $I(g(\Psi))$  est inclus dans  $I(i(\Psi))$ , dont l'intérieur (au sens topologique du terme) est disjoint de celui de  $I(\Psi)$ , impossible ;
- si  $g \in (iG_0i - \{1\})$ , alors on écrit  $g = ig'i$  avec  $g' \in G_0$ , on a alors  $g'i(\Psi) = i(\Psi)$ , et en posant  $\Psi' = i(\Psi)$ , on est ramené au premier cas. □

Pour décrire la structure de  $\Omega$ , on introduit le graphe d'incidence  $H$ .

**Définition .** Le graphe  $H = H(\Omega)$  est le graphe ayant pour arêtes les éléments de  $\Omega$ , pour sommets les hauts et les bas des éléments de  $\Omega$ , tel que chaque arête  $\Psi$  va du haut de  $\Psi$  vers le bas de  $\Psi$ .

**Remarque 28.** *Si  $\Psi$  est une arête de  $H$  allant du sommet  $S$  au sommet  $S'$ , alors il y a une seule autre arête dans  $H$  ayant pour extrémités ces 2 sommets :  $i(\Psi)$ , qui va de  $S'$  à  $S$ .*

*Démonstration.* Lors de la preuve du lemme 27, nous avons en fait montré un résultat plus fort que le lemme 27, c'est-à-dire que, dans une même orbite, il ne peut y avoir deux boîtes marquées ayant le même intérieur (on a montré que si  $g \in G - \{1\}$ ,  $I(\Psi) \neq I(g(\Psi))$ ). On note  $\Psi = (a, c, a', c', b, b')$ ,  $S = (D, b, \{a, c\})$ ,  $S' = (D', b', \{a', c'\})$  et  $\Psi' = (a, c, c', a', b, b') \in \mathcal{B}$ .  $\Psi$  et  $\Psi'$  sont les deux seules boîtes marquées admettant  $S$  comme haut et  $S'$  comme bas. On remarque que  $I(\Psi) = I(i(\Psi'))$  et que  $I(\Psi') = I(i(\Psi))$ . Comme  $i\Psi$  est dans  $\Omega$ ,  $\Psi'$  (qui a le même intérieur) ne peut y être également. Il y a donc bien une seule arête dans  $H$  allant de  $S$  à  $S'$  (et, en appliquant le résultat à  $i(\Psi)$ , une seule arête allant de  $S'$  à  $S$ ). □

### 4.2 Graphe de Faray

**Définition .** Le groupe  $\Gamma$  agit à droite sur  $\tilde{\mathbb{H}}$  par  $g.x = g^{-1}x$ , où  $g \in \Gamma$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On appellera graphe de Faray l'orbite, sous l'action à droite de  $\Gamma$ , de la courbe  $D = \{z, \text{Re}(z) = 0\}$  du demi-plan supérieur  $\tilde{\mathbb{H}}$ , orientée de  $\infty$  vers 0.

Pour pouvoir relier  $H$  au graphe de Faray, il faut d'abord étudier plus en détail les propriétés de ces deux graphes.

**Théorème 29.** Soit  $g.D$ , avec  $g \in \Gamma$ , une arête du graphe de Faray. Alors les arêtes du graphe de Faray ayant même origine que  $g.D$  sont exactement les  $T^n g.D$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Soit  $g \in \Gamma$ . Soit  $g'.D$ , avec  $g' \in \Gamma$ , une arête quelconque du graphe de Faray. Comme  $g'.D = g^{-1}g'^{-1}D$ , et que  $g^{-1}$  agit bijectivement sur  $\mathbb{H}$ , on voit que  $g'.D$  a même origine que  $g.D$  si et seulement si  $g'^{-1}D$  et  $D$  ont même origine, c'est à dire si  $g'\infty = \infty$ . Cela équivaut, en écrivant  $g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , à  $c = 0$ , donc  $g'$  s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ , et alors  $g' = T^n$ .  $\square$

**Théorème 30.** Soit  $g(\Theta)$ , avec  $g \in G$ , une arête du graphe  $H$ . Alors les arêtes de  $H$  ayant même origine que  $g(\Theta)$  sont exactement les  $\tau_1^n g(\Theta)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Soit  $g \in G$ . Il est clair que les  $\tau_1^n g(\Theta)$  ont même origine que  $g(\Theta)$ . On suppose ensuite que l'arête  $g'.(\Theta)$ , avec  $g' \in G$ , a la même origine que  $g(\Theta)$ . Il faut montrer que nécessairement  $g'$  est une puissance de  $\tau_1$ . Pour cela on se sert du lemme 22 pour distinguer les cas.

Si  $g' \in G_0$ , et que ce n'est pas une puissance de  $\tau_1$ , alors on peut écrire  $g' = g''\tau_2\tau_1^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $g'' \in G_0$ . Mais alors la remarque 10 permet de dire que le point haut de  $g(\Theta)$  (qui est aussi celui de  $\tau_1^k g(\Theta)$ ) n'est pas dans  $I(\tau_2\tau_1^k g(\Theta))$ , et n'est donc pas non plus dans  $I(g''\tau_2\tau_1^k g(\Theta))$ . Cela veut dire que  $g(\Theta)$  et  $g'.(\Theta)$  n'ont pas le même point haut, c'est absurde. Dans ce cas,  $g'$  est donc bien une puissance de  $\tau_1$ .

Si  $g' \in iG_0i$ , on écrit  $g' = ig''i$  avec  $g'' \in G_0$ . Dire que  $g(\Theta)$  et  $ig'.(\Theta)$  ont le même point haut revient à dire que  $g''ig(\Theta)$  et  $ig(\Theta)$  ont le même point bas (car le point bas de  $ig(\Theta)$  est le point haut de  $g(\Theta)$ ). Un raisonnement symétrique à celui du cas précédent s'applique alors, et montre que  $g''$  est une puissance de  $\tau_2$ , on écrit  $g'' = \tau_2^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . Enfin,  $g' = i\tau_2^n i = (i\tau_2 i)^n = \tau_1^{-n}$ .

Si  $g' \in iG_0$ , on écrit  $g' = ig''$  avec  $g'' \in G_0$ , et alors le point haut de  $g(\Theta)$  est égal au point bas de  $g''g(\Theta)$ . Cela prouve que  $g''$  n'est pas une puissance de  $\tau_1$  (sinon  $g''g(\Theta)$  aurait ses points haut et bas confondus), et que  $g''$  ne peut pas non plus s'écrire sous la forme  $g'''\tau_2\tau_1^k$  avec  $g''' \in G_0$  et  $k \in \mathbb{N}$ , car le point haut de  $g(\Theta)$  (égal à celui de  $\tau_1^k g(\Theta)$ ) n'appartiendrait pas à  $I(g'''\tau_2\tau_1^k g(\Theta)) = I(g''g(\Theta))$ . Ce cas est donc à exclure.

Enfin, si  $g' \in G_0i$ , on écrit  $g' = g''i$  avec  $g'' \in G_0$ . Mais alors le point haut de  $g''ig(\Theta)$  est égal au point bas de  $ig(\Theta)$ , et le même raisonnement que dans le cas précédent permet d'exclure ce cas.  $\square$

Ces théorèmes de structure permettent de montrer le théorème suivant, qui affirme l'existence d'un morphisme "naturel" entre  $H$  et le graphe de Faray. On notera  $\phi$  l'isomorphisme entre  $G$  et  $\Gamma$  donné par le corollaire 25.

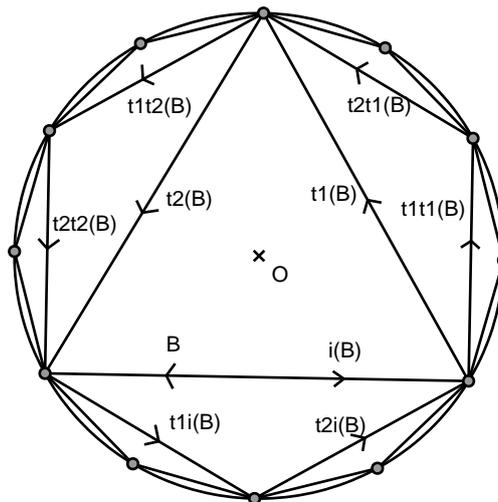
**Théorème 31.** Il existe un isomorphisme  $f$  entre le graphe  $H$  et le graphe de Faray, envoyant l'arête  $g(\Theta)$  sur l'arête  $\phi(g).D$ , pour tout  $g$  dans  $G$ .

*Démonstration.* On définit une application  $f$  allant de l'ensemble des arêtes et des sommets de  $H$  dans celui des arêtes et des sommets du graphe de Faray de la façon suivante.  $f$  envoie l'arête  $g(\Theta)$  sur l'arête  $\phi(g).D$ , pour tout  $g$  dans  $G$ . On définit maintenant  $f$  sur les sommets de  $H$  : on considère un sommet  $s$  de  $H$ , ce sommet est l'origine d'une arête  $g(\Theta)$  de  $H$ , avec  $g \in G$ , et on définit  $f(s)$  comme étant l'origine de l'arête  $\phi(g).D$  (cette définition ne dépend pas du

choix de l'arête  $g(\Theta)$ , en effet, d'après le théorème 30, les arêtes de  $H$  ayant pour origine  $s$  sont les  $\tau_1^n g(\Theta)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $\phi(\tau_1^n g).D = T^n \phi(g).D$ , qui a la même origine que  $\phi(g).D$  d'après le théorème 29).

Il reste à montrer que l'application ainsi définie est bien un isomorphisme de graphes. Tout d'abord, montrons que c'est un morphisme de graphe. En effet considérons une arête  $g(\Theta)$  ( $g \in G$ ) de  $H$  et notons  $o$  son origine et  $e$  son extrémité, la définition implique que  $f(o)$  est l'origine de  $f(g(\Theta))$ . Mais  $e$  est l'origine de  $ig(\Theta)$ , donc  $f(e)$  est l'origine de  $S\phi(g).D$  : c'est l'extrémité de  $f(g(\Theta))$ .  $f$  induit clairement une bijection entre l'ensemble des arêtes de  $H$  et celui des arêtes du graphe de Faray. Enfin,  $f$  induit aussi une bijection entre l'ensemble des sommets de  $H$  et celui des sommets du graphe de Faray. Pour cela il suffit de construire son inverse : soit  $s$  un sommet du graphe de Faray,  $s$  est l'origine d'une arête  $g.D$  ( $g \in \Gamma$ ) du graphe de Faray, et on définit  $\hat{f}(s)$  comme étant l'origine de  $\phi^{-1}(g)(\Theta)$  (cette définition ne dépend pas du choix de l'arête  $g.D$ , en effet, d'après le théorème 29, les arêtes du graphe de Faray ayant pour origine  $s$  sont les  $T^n g.D$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $\phi^{-1}(T^n g).D = \tau_1^n \phi^{-1}(g)(\Theta)$ , qui a la même origine que  $\phi^{-1}(g)(\Theta)$  d'après le théorème 30). Il est clair que la restriction de  $f$  à l'ensemble des sommets de  $H$  et  $\hat{f}$  sont inverses l'une de l'autre, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Dans toute la suite nous identifierons le graphe  $H$  avec le graphe de Faray. On peut par composition avec un difféomorphisme bien choisi de  $\tilde{\mathbb{H}}$  dans le disque unité représenter le graphe de Faray par la figure suivante :



### 4.3 Actions de $\Gamma$ sur l'orbite

Cette vision de  $H$  permet d'avoir une interprétation géométrique simple de l'action naturelle de  $G$  sur notre graphe (que l'on admettra) :

- $i$  agit en renversant l'orientation des arêtes ;
- $\tau_1$  agit sur une arête en la faisant tourner d'un cran, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour de son origine ;
- $\tau_1$  agit sur une arête en la faisant tourner d'un cran, dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, autour de son extrémité.

Cette vision géométrique de  $H$  permet également de mettre en évidence une seconde action du groupe modulaire sur le graphe :

**Définition .** On considère la rotation de centre le centre du disque unité et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ , que l'on notera  $r$ , et la symétrie hyperbolique de centre le milieu  $m$  de l'arête  $\Theta$  (cette symétrie associe à un point  $p$  du cercle l'autre point du cercle sur la corde  $mp$ , et à une corde  $pq$  la corde passant par les symétriques des points  $p$  et  $q$ ), que l'on notera  $s$ . Ces deux opérations engendrent un groupe  $M$  dont on admettra qu'il est isomorphe au groupe modulaire. Si  $m \in M$  et  $\Psi \in \Omega$  on note  $m.\Psi$  l'image de  $\Psi$  par l'action de  $m$ .

**Remarque 32.** Cette nouvelle action de  $\Gamma$  sur  $H$  commute avec la première.

*Démonstration.* Il est évident que l'action de  $r$  commute avec celle de  $i$  et celle de  $\tau_1$ , et que celle de  $s$  commute avec celle de  $i$ . Il reste donc à vérifier que les actions de  $s$  et de  $\tau_1$  commutent.

On considère une corde orientée  $pq$  du cercle unité. Elle partage le disque en deux portions, dont une est située à droite de la corde. Cette portion du disque contient un des deux arcs de cercle  $pq$ , on pose  $c(pq)$  comme étant le milieu de cet arc. Cette définition est préservée par  $s$  : on a  $c(s(p)s(q)) = s(c(pq))$ . Cette définition permet de préciser l'action de  $\tau_1$  sur une arête  $pq$  du graphe :  $\tau_1(pq)$  est l'arête du graphe correspondant à la corde  $pc(pq)$ . Ainsi  $s.\tau_1(pq) = s(p)s(c(pq)) = s(p)c(s(p)s(q)) = \tau_1(s(p)s(q)) = \tau_1(s(pq))$ , c'est la commutativité recherchée.  $\square$

L'interprétation de l'action de  $M$  sur  $\Omega$  en terme de boîtes marquées est donnée par le résultat suivant :

**Théorème 33.** Dans cet énoncé, on identifie les symétries projectives et les applications de  $\mathbb{B}$  dans lui-même qu'elles induisent, ce qui permet de munir d'une structure de groupe l'ensemble des symétries projectives. Il existe un unique morphisme de groupes  $\pi$  entre  $M$  et l'ensemble des symétries projectives, naturel au sens que, si  $m \in M$  et  $g \in G$ ,  $m.g(\Theta) = \pi(m)(g(\Theta))$ .

**Lemme 34.** Pour toute boîte marquée  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$ , il existe une unique transformation projective  $\Phi$  vérifiant  $\Phi(i(\Theta)) = \tau_1(\Theta)$ ,  $\Phi(\tau_1(\Theta)) = \tau_2(\Theta)$  et  $\Phi(\tau_2(\Theta)) = i(\Theta)$ .

*Démonstration.* On pose  $\tau_1(\Theta) = (a, c, a'', c'', b, b'')$ , on a aussi  $i(\Theta) = (a', c', c, a, b', b)$  et  $\tau_2(\Theta) = (a'', c'', a', c', b'', b')$ . On va commencer par prouver l'existence (l'unicité étant évidente d'après la proposition 1) d'une transformation projective  $\Phi$  envoyant  $i(\Theta)$  sur  $\tau_1(\Theta)$ , ce qui est équivalent aux deux égalités entre birapports  $[ac \cap a'c', a', c', b'] = [ac \cap a''c'', a, c, b]$  et  $[ac \cap a'c', c, a, b] = [ac \cap a''c'', a'', c'', b'']$  dans  $\mathbb{E}$ , d'après la proposition 5. Pour cela, on commence par se fixer une carte affine et à se ramener au cas où  $acc'a'$  est le carré unité de cette carte affine, par transformation projective, ce qui ne change pas les birapports. Les points  $(a, b, c, a', b', c')$  ont alors pour coordonnées affines  $((0, 1), (\alpha, 1), (1, 1), (0, 0), (\beta, 0), (1, 0))$  (avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$ ), ce qui permet de calculer (en utilisant la proposition 3)  $[ac \cap a'c', a', c', b'] = \beta$ , et  $[ac \cap a'c', c, a, b] = 1 - \alpha$ .

Le calcul montre ensuite que  $a''$  et  $c''$  ont pour coordonnées  $(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta})$  et  $(\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta})$  (les coordonnées de  $b''$  sont bien sûr  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ), puis on calcule l'abscisse de  $ac \cap a''c''$  : elle vaut  $\frac{\alpha-\alpha\beta}{\alpha-\beta}$  (et son ordonnée vaut 1). Donc

$$[ac \cap a''c'', a, c, b] = \frac{-\beta(x_{ac \cap a''c''} - 1)}{-1(x_{ac \cap a''c''} - \beta)} = \frac{\alpha(\beta(1-\alpha))}{\alpha(1-\alpha)} = \alpha.$$

et enfin

$$[ac \cap a''c'', a'', c'', b''] = \frac{(\frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{1}{2})(1 - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta})}{(1 - \frac{1}{2})(\frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta})} = \frac{(2\beta - \alpha - \beta)(1-\alpha)}{2\beta - \alpha - \beta} = 1 - \alpha.$$

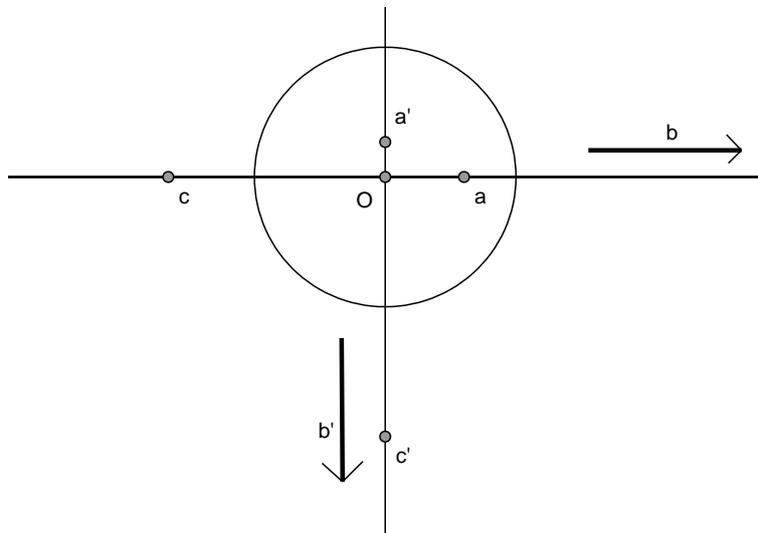
Il reste à montrer que  $\Phi$  convient. On sait qu'elle vérifie  $\Phi(a') = a$ ,  $\Phi(c') = c$ ,  $\Phi(c) = a''$ ,  $\Phi(a) = c''$ ,  $\Phi(b') = b$  et  $\Phi(b) = b''$ . Donc

$$\Phi(a'') = \Phi(ab' \cap ba') = \Phi(a)\Phi(b') \cap \Phi(b)\Phi(a') = c''b \cap b''a = bc' \cap ac' = c'$$

et le même type de calcul montre que  $\Phi(c'') = a'$  et  $\Phi(b'') = b'$ . On a donc  $\Phi(\tau_1(\Theta)) = (c'', a'', c', a', b'', b') = \tau_2(\Theta)$  et  $\Phi(\tau_2(\Theta)) = i(\Theta)$ .  $\square$

**Lemme 35.** *Pour toute boîte marquée  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$ , il existe une unique polarité  $\Delta$  vérifiant  $\Delta(\Theta) = i(\Theta)$  et  $\Delta(i(\Theta)) = \Theta$ .*

*Démonstration.* On fixe une carte affine, on va d'abord montrer qu'il existe une transformation projective  $\Phi$  envoyant la boîte marquée  $\Theta$  dans la configuration suivante :  $a$  et  $c$  sont sur l'axe des abscisses,  $a'$  et  $c'$  sont sur l'axe des ordonnées,  $b$  et  $b'$  sont à l'infini et  $Oa \cdot Oc = Oa' \cdot Oc' = 1$ .



Pour cela, on envoie par transformation projective les points  $a, c, a'$  et  $c'$  respectivement sur les points de coordonnées affines  $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$  (en utilisant la proposition 1). Alors  $b$  est envoyé sur un point d'abscisse  $t$ , éventuellement infinie. Le birapport  $[c, O, a, b]$  vaut alors  $\frac{2t}{t+1}$  (qui est strictement supérieur à 1 puisque, par hypothèses de convexité,  $|t| > 1$ ). On peut donc poser  $p = \sqrt{\frac{1}{[c, O, a, b] - 1}}$ . De même on pose  $q = \sqrt{\frac{1}{[c', O, a', b'] - 1}}$ . Maintenant on applique une seconde transformation projective envoyant les points  $(a, c, a', c')$  sur les points de coordonnées affines  $((p, 0), (\frac{-1}{p}, 0), (0, q), (0, \frac{-1}{q}))$  (en utilisant à nouveau la proposition 1).  $O$  est un point fixe de cette transformation (car  $0 = ac \cap a'c'$ ). On peut donc écrire, en utilisant la proposition 2, et en notant  $x$  la nouvelle abscisse du point  $b$ ,  $[c, O, a, b] = \frac{x(p + \frac{1}{p})}{p(x + \frac{1}{p})} = \frac{[c, O, a, b]x}{x + \sqrt{[c, O, a, b] - 1}}$ . On en tire  $x = x + \sqrt{[c, O, a, b] - 1}$  et donc nécessairement  $x = \infty$ . On montre de la même manière que l'ordonnée que  $b'$  est envoyée à l'infini, et on s'est ramené dans la configuration voulue.

On relève  $\Phi$  en un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  par  $(u, v) = \langle \Phi(u) | \Phi(v) \rangle$  où  $\langle | \rangle$  désigne le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^3$ . Montrons que la polarité  $\Delta$  associée à ce produit scalaire convient. Après application de  $\Phi$ , les points  $a, c, a', c', b$  et  $b'$  ont pour

coordonnées homogènes respectives  $(p : 0 : 1)$ ,  $(\frac{-1}{p} : 0 : 1)$ ,  $(0 : q : 1)$ ,  $(0 : \frac{-1}{q} : 1)$ ,  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$ . On remarque que  $\langle (0, q, 1) | (0, \frac{-1}{q}, 1) \rangle = \langle (0, q, 1) | (1, 0, 0) \rangle = \langle (0, \frac{-1}{q}, 1) | (1, 0, 0) \rangle = 0$  et on en déduit que  $A^* = \Delta(ba') = \Delta(b) \cap \Delta(a') = a'c' \cap bc' = c'$ . De même on montre que  $C^* = a'$ ,  $A'^* = c$ ,  $C'^* = a$ ,  $D^* = b'$  et  $D'^* = b$ . Et on a bien  $\Delta(\Theta) = (A^*, C^*, C'^*, A'^*, D^*, D'^*) = (c', a', a, c, b', b) = i(\Theta)$  et  $\Delta(i(\Theta)) = (C'^*, A'^*, C^*, A^*, D'^*, D^*) = \Theta$ .

L'unicité est simple. En effet une telle application est définie sur le repère projectif  $(a, c, a', c')$ , ce qui impose l'unicité de l'application linéaire de  $(R)^3$  dans  $((R)^3)^*$  correspondant à la dualité.  $\square$

*Démonstration.* La preuve du théorème est facile une fois que l'on a les deux lemmes.  $\pi$  vérifie nécessairement  $\pi(r)(i(\Theta)) = \tau_1(\Theta)$ ,  $\pi(r)(\tau_1(\Theta)) = \tau_2(\Theta)$ ,  $\pi(r)(\tau_2(\Theta)) = i(\Theta)$ ,  $\pi(s)(\Theta) = i(\Theta)$  et  $\pi(s)(i(\Theta)) = \Theta$ . Il vérifie donc, en prenant  $\Phi$  et  $\Delta$  les symétries projectives des lemmes 34 et 35,  $\pi(r) = \Phi$  et  $\pi(s) = \Delta$ . Cela détermine entièrement  $\pi$  puisque  $r$  et  $s$  engendrent  $M$ , et prouve donc l'unicité. Pour montrer qu'un tel  $\pi$  convient, il faut montrer que, si  $m \in M$  et  $g \in G$ ,  $m.g(\Theta) = \pi(m)(g(\Theta))$ . Il suffit même de montrer ce résultat pour  $m = r$  et  $m = s$ , puisque  $r$  et  $s$  engendrent le groupe  $M$ . Cela découle de la proposition 9 et de la remarque 32, qui impliquent que, pour tout  $g \in G$ ,  $s.g(\Theta) = g(s.\Theta) = g(i(\Theta)) = g(\Delta(\Theta)) = \Delta(g(\Theta))$  et que  $r.g(\Theta) = g(r.\Theta) = g(i\tau_1(\Theta)) = g(i(\Phi(i(\Theta)))) = g(\Phi(i^2(\Theta))) = \Phi(g(\Theta))$ .  $\square$

**Corollaire 36.** *Toute boîte marquée de  $\Omega$  peut s'envoyer par transformation projective sur  $\Theta$  ou sur  $i(\Theta)$ .*

*Démonstration.* On écrit  $\Psi = w(\Theta)$  où  $w \in G$  est représenté par un mot  $a_1a_2\dots a_n$  où les  $a_i$  sont dans  $\{i, \tau_1, \tau_2\}$ . On note  $\Phi$  la transformation projective donnée par le lemme 34. On pose

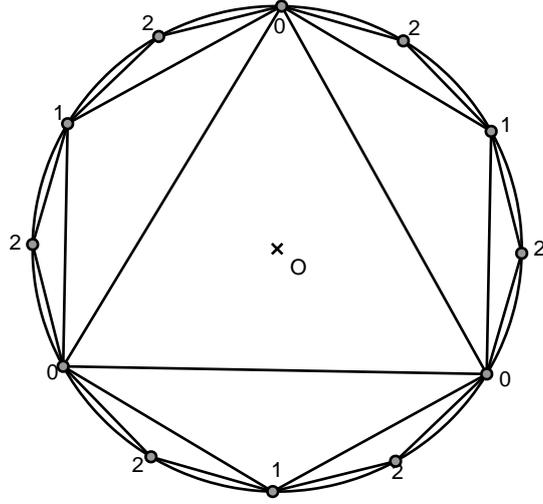
$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = i \\ 2 & \text{si } a_i = \tau_1 \\ 1 & \text{si } a_i = \tau_2 \end{cases}$$

Alors, si on pose  $b$  égal à la somme des  $b_i$ , on a, en utilisant la propriété 9,  $\Phi^b(\Psi) = \Phi^b(a_1a_2\dots a_n(\Theta)) = \Phi^{b_1}a_1\Phi^{b_2}a_2\dots\Phi^{b_n}a_n(\Theta) = i^n(\Theta)$ .  $\square$

## 5 Courbe de Pappus

### 5.1 Définitions

**Définition .** Si  $v$  est un sommet de  $H$ , on définit la *profondeur* de  $v$  comme étant le nombre minimal d'arêtes qui doivent être traversées par un chemin allant du centre du disque à  $v$ . Si  $e$  est une arête de  $H$ , on définit sa *profondeur mineure* notée  $md(e)$  (resp. sa *profondeur majeure* notée  $Md(e)$ ) comme le minimum (resp. maximum) des profondeurs des extrémités de  $e$ .



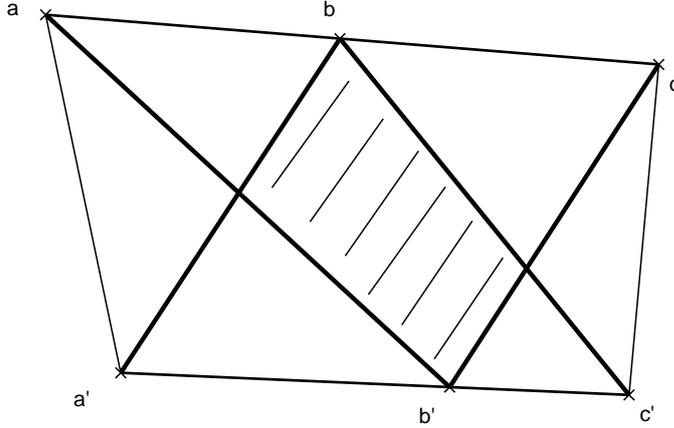
Il est nécessaire de distinguer ces deux notions pour la raison suivante : pour toute entier  $N$ , il existe une infinité de boîtes marquées de profondeur mineure inférieure à  $N$  (par exemple tous les  $\tau_1^m(\Theta)$  ont pour profondeur mineure 0), mais il n'y a qu'un nombre fini de boîtes marquées de profondeur majeure inférieure à  $N$  (puisque il n'y a qu'un nombre fini de sommets du graphe à une profondeur donnée).

**Définition .** On munit la sphère unité  $\mathbb{S}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  de la distance sphérique usuelle  $d$ , cela nous permet de définir une distance  $\rho$  sur  $\mathbb{P} \approx \mathbb{S}_2/\pm 1$  par, si  $p$  et  $q$  sont dans  $\mathbb{P}$  et si  $p'$  et  $q'$  sont des antécédents de ces deux points dans  $\mathbb{S}_2$ , alors  $\rho(p, q) = \inf \{d(p', q'), d(p', -q')\}$ .

Pour toute boîte marquée  $\Theta = (a, c, a', c', b, b')$  on définit :

- $\text{Diam}(\Psi)$  le diamètre de  $I(\Psi)$ , on l'appellera le *diamètre* de  $\Psi$  ;
- $\text{diam}(\Psi)$  le diamètre de l'intérieur convexe du quadrilatère  $b(bc' \cap cb')b'(ab' \cap ba')$ , on l'appellera le *petit diamètre* de  $\Psi$ .

On a toujours  $\text{diam}(\Psi) \leq \text{Diam}(\Psi)$ .



## 5.2 Lemme de profondeur

**Lemme 37.** Soit  $\epsilon \geq 0$ . Soit  $\Theta$  une boîte marquée et  $\Omega (= \Omega(\Theta))$  son orbite sous l'action de  $G$ . Alors il existe une constante  $N(\Theta, \epsilon)$  telle que, en notant  $G_0$  le sous-monoïde de  $G$  engendré par  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , pour tout  $w \in G_0 \cup G_0 i$  :

1.  $md(w(\Theta)) \geq N \Rightarrow \text{Diam}(w(\Theta)) \geq \epsilon$  ;
2.  $Md(w(\Theta)) \geq N \Rightarrow \text{diam}(w(\Theta)) \geq \epsilon$ .

**Remarque 38.** Il est indispensable de considérer  $G_0 \cup G_0 i$  et non pas  $G$  tout entier, en effet ce n'est pas parce qu'une boîte marquée a un petit intérieur que son image par  $i$  a un petit intérieur. Ce n'est pas grave car on obtient "presque" tout l'orbite, au sens suivant : pour toute boîte marquée  $\Psi \in \Omega$ , alors soit  $\Psi \in G_0 \cup G_0 i(\Theta)$ , soit  $i(\Psi) \in G_0 \cup G_0 i(\Theta)$  (vu sur le graphe de l'orbite, cela veut dire que s'il y a une arête entre les sommets  $s$  et  $s'$ , alors  $G_0 \cup G_0 i(\Theta)$  contient soit l'arête  $ss'$ , soit l'arête  $s's$ ).

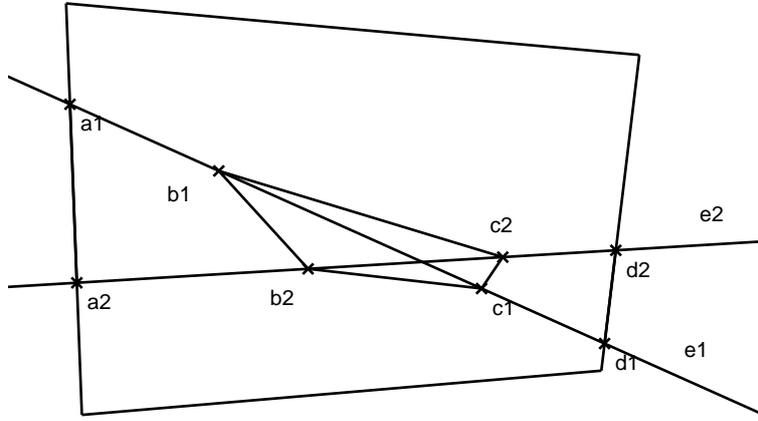
Nous allons prouver ce résultat par l'absurde, pour cela nous allons supposer l'existence d'un sous-ensemble  $E$  de  $G_0 \cup G_0 i$  tel que la profondeur mineure (resp. majeure) des boîtes marquées  $g(\Theta)$  (avec  $g \in E$ ) ne soit pas bornée, mais tel que les diamètres (resp. petits diamètres) des boîtes marquées  $g(\Theta)$  (avec  $g \in E$ ) soient minorés par un  $\epsilon > 0$ . Nous aurons besoin pour aboutir à une contradiction de deux lemmes traitant les cas d'ensembles  $E$  particuliers. Dans toute la suite on écrira les éléments de  $G_0 \cup G_0 i$  comme des produits de  $\tau_1$  et de  $\tau_2$  (avec éventuellement un  $i$  à droite du produit), cette écriture est unique par liberté du monoïde  $G_0$  (lemme 22) et car  $G_0$  et  $G_0 i$  sont disjoints (remarque 23).

**Lemme 39.** Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $E$  un sous-ensemble de  $G_0 \cup G_0 i$ , tel que l'ensemble des nombres d'occurrences de  $\tau_1 \tau_2$  dans les mots représentant les éléments de  $E$  n'est pas borné, on appellera un tel ensemble un ensemble de type 1. Alors il existe  $w \in E$  tel que  $\text{Diam}(w(\Theta)) < \epsilon$ .

*Démonstration.* On suppose que  $E \cap G_0$  est de type 1 (l'autre cas, où  $E \cap G_0 i$  est de type 1, s'en déduit en remplaçant  $\Theta$  par  $i(\Theta)$ ). On se fixe une carte affine, et on se ramène par une transformation projective  $\Phi$  au cas où  $\Theta$  est le carré unité de cette carte affine, en envoyant les quatre premiers points de  $\Theta$  sur les points de coordonnées affines respectives  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$

et  $(1, 0)$ . On fixe  $\Psi \in G_0(\Theta)$ .  $\Phi^{-1}$  est continue, soit donc  $\epsilon'$  tel que  $\forall p, q \in \mathbb{P}, \rho(p, q) < \epsilon' \Rightarrow \rho(\Phi^{-1}(p), \Phi^{-1}(q)) < \epsilon$ . On va prouver l'existence d'une constante  $\eta < 1$  indépendante de  $\Psi$  telle que  $\text{Diam}(\Phi(\tau_1\tau_2(\Psi))) \leq \text{Diam}(\Phi(\Psi))$ , ce qui nous permettra de conclure car appliquer  $\tau_1$  et  $\tau_2$  fait décroître l'intérieur convexe, et donc le diamètre, et ainsi  $\text{Diam}(\Phi(w(\Theta)))$ , où  $w \in G_0$  est un mot contenant  $N$  fois la séquence  $\tau_1\tau_2$ , sera inférieur à  $\eta^N \text{Diam}(\Phi(\Theta))$  qui tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini; on pourra donc trouver  $w \in E$  tel que  $\text{Diam}(\Phi(w(\Theta))) < \epsilon'$ , et ce  $w$  conviendra.

On pose  $\Phi(\Psi) = (a, c, a', c', b, b')$  (tous ces points sont dans le carré unité de notre plan affine, notre distance  $\rho$  est équivalente dans ce carré à la distance euclidienne usuelle  $d$  que nous utiliserons dans la suite de cette preuve),  $\Phi(\tau_1\tau_2(\Psi)) = (b_1, c_2, b_2, c_1, e, f)$ ,  $e_1 = c_1b_1$ ,  $e_2 = c_2b_2$ ,  $a_1 = e_1 \cap aa'$ ,  $a_2 = e_2 \cap aa'$ ,  $d_1 = e_1 \cap cc'$  et  $d_2 = e_2 \cap cc'$ . Une vérification géométrique que nous admettrons montre que ces 4 points sont dans  $I(\Psi)$ . Alors  $\text{Diam}(\Phi(\tau_1\tau_2(\Psi)))$  vaut soit  $d(b_1, c_1)$  soit  $d(b_2, c_2)$ , supposons qu'il soit égal à  $d(b_1, c_1)$ , quitte à renuméroter les points.



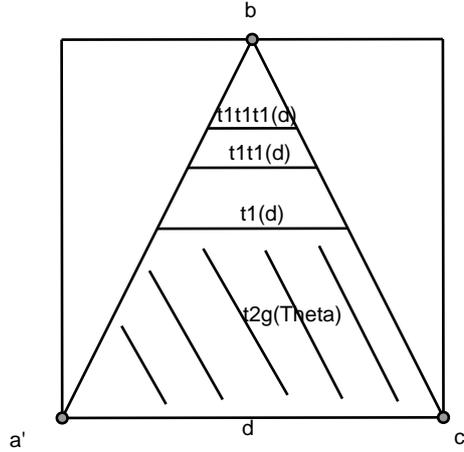
Le birapport  $[a_1, b_1, c_1, d_1](\Psi)$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs quand  $\Psi$  varie. Ces différentes valeurs possibles viennent de la renumérotation et du fait que toutes les boîtes marquées  $\Psi$  (de  $\Omega$ ) s'envoient sur  $\Theta$  ou sur  $i(\Theta)$  par transformation projective. Supposons par l'absurde que l'on ne puisse pas trouver un tel  $\eta$ , on peut alors construire une suite de quadruplets de points du carré unité  $(a_{1,n}, b_{1,n}, c_{1,n}, d_{1,n})$  alignés dans cet ordre tels que  $[a_{1,n}, b_{1,n}, c_{1,n}, d_{1,n}]$  ne prenne qu'un nombre fini de valeurs, que  $\forall n \in \mathbb{N}, d(a_{1,n}, d_{1,n}) < \sqrt{2}$  (le diamètre du carré unité), et telle que  $\frac{\rho(b_{1,n}, c_{1,n})}{\rho(a_{1,n}, d_{1,n})}$  tende vers 1. On en tire une suite de quadruplets de réels  $(a_n, b_n, c_n, d_n)$  telle que  $[a_n, b_n, c_n, d_n] := \frac{(b_n - d_n)(a_n - c_n)}{(a_n - d_n)(b_n - c_n)}$  ne prenne qu'un nombre fini de valeurs, que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n < b_n < c_n < d_n < 1$ , que  $d_n - a_n < 1$ , et telle que  $\frac{c_n - b_n}{a_n - d_n}$  tende vers 1, mais c'est impossible; en effet on peut alors en extraire une sous-suite telle que  $a_n$  et  $d_n$  convergent vers  $a$  et  $d$  respectivement mais alors la convergence de  $\frac{c_n - b_n}{a_n - d_n}$  implique que  $b_n$  et  $c_n$  convergent vers  $a$  et  $d$ , et donc que  $[a_n, b_n, c_n, d_n]$  puisse prendre la valeur 1 (car il convergerait vers 1 tout en ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs), ce qui est absurde (en effet si on pose  $a = 0, d = 1, 0 < c < 1$  une simple étude de fonction montre que  $[a, b, c, d] := \frac{c(1-b)}{c-b}$  ne prend jamais la valeur 1 pour  $0 < b < c$ ).  $\square$

**Lemme 40.** Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $E$  un sous-ensemble de  $G_0 \cup G_0i$ , de la forme  $\{w\tau_2\tau_1^n w', (w, n, w') \in E'\}$  ou  $\{w\tau_1\tau_2^n w', (w, n, w') \in E'\}$ , où  $E' \subset (G_0 \times \mathbb{N} \times G_0 \cup G_0i)$  est tel que la deuxième composante des éléments de  $E'$  est non bornée et que la troisième ne puisse prendre qu'un nombre fini de valeurs, on appellera un tel ensemble un ensemble de type 2 (resp. de la forme  $\{w\tau_1^n w', (w, n, w') \in E'\}$  ou  $\{w\tau_2^n w', (w, n, w') \in E'\}$ , où  $E' \subset (G_0 \times \mathbb{N} \times G_0 \cup G_0i)$  est tel que la deuxième composante des éléments de  $E'$  est non bornée et que la troisième ne puisse prendre qu'un nombre fini de valeurs, on appellera un tel ensemble un ensemble de type 3). Alors il existe  $w \in E$  tel que  $\text{Diam}(w(\Theta)) < \epsilon$  (resp. il existe  $w \in E$  tel que  $\text{diam}(w(\Theta)) < \epsilon$ ).

*Démonstration.* Soit  $E$  un ensemble de type 2 (resp. type 3). On peut supposer que  $E$  est de la forme  $\{w\tau_2\tau_1^n w', (w, n, w') \in E'\}$  (resp.  $\{w\tau_1^n w', (w, n, w') \in E'\}$ ), le cas  $\tau_1\tau_2^n$  (resp.  $\tau_2^n$ ) étant symétrique. On peut même supposer que  $E$  est de la forme  $\{w'\tau_2\tau_1^n g, (w', n) \in E'\}$  pour un  $g \in G_0 \cup G_0i$  fixé (resp.  $\{w'\tau_1^n g, (w', n) \in E'\}$ ), où  $E' \subset (G \times \mathbb{N})$  est tel que la deuxième composante des éléments de  $E'$  est non bornée. On se fixe une carte affine, on note  $g(\Theta) = (a, c, a', c', b, b')$  et on se ramène par transformation projective  $\Phi$  au cas où  $a, c, a', c'$  ont pour coordonnées affines respectives  $(0, 1), (1, 1), (0, 0)$  et  $(1, 0)$ .  $\Phi^{-1}$  est continue, soit donc  $\epsilon'$  tel que  $\forall p, q \in \mathbb{P}, \rho(p, q) < \epsilon' \Rightarrow \rho(\Phi^{-1}(p), \Phi^{-1}(q)) < \epsilon$ . Il faut maintenant étudier ce qui se passe quand on applique  $\tau_2\tau_1^n$  (resp.  $\tau_1^n$ ) au carré unité.

Le lemme 34 nous donne une transformation projective  $T$  envoyant  $g(\Theta)$  sur  $\tau_1^2(g(\Theta))$ . Elle envoie de même  $\tau_1^{2k}(g(\Theta))$  sur  $\tau_1^{2k+2}(g(\Theta))$  pour tout cas entier positif, d'après la commutativité des actions de  $G$  et des transformations projectives sur  $\mathbb{B}$ . Cette transformation projective envoie le carré unité dans lui-même et fixe les points  $a, b$  et  $c$ , et fixe donc chaque point de la droite haute de  $g(\Theta)$ . Elle ne peut donc avoir d'autres points fixes, car sinon ce serait l'application constante.

Maintenant on remarque que  $\tau_2\tau_1^{2k}(g(\Theta)) = T^k(\tau_2(g(\Theta)))$  (et que  $\tau_1^{2k}(g(\Theta)) = T^k(g(\Theta))$ ), et que les deux droites  $ba'$  et  $bc'$  sont fixées par  $T$ . Comme l'image par  $T$  du carré unité est incluse dans le triangle (affine)  $a'bc'$ , tous les  $T^k(\tau_2(g(\Theta)))$  le sont aussi. La compacité du carré unité, le fait que  $T$  n'admette qu'un seul point fixe,  $b$ , dans le triangle  $a'bc'$  et les propriétés d'inclusion entre intérieurs convexes impliquent maintenant que  $I(T^k(\tau_2(g(\Theta))))$  converge vers le point  $b$ , et donc que l'on peut trouver des éléments de  $E$  de diamètre arbitrairement petit, ce qui prouve le cas où  $E$  est de type 2. On vient de plus de prouver que  $T^k([a'c'])$ , où  $[a'c']$  est le segment inférieur de notre carré unité, converge vers le point  $b$ , cela montre que le petit diamètre des boîtes marquées  $T^k(g(\Theta))$  converge vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, ce qui prouve le cas où  $E$  est de type 3 (par contre il est clair que  $\text{Diam } T^k(g(\Theta))$  ne peut pas converger vers 0 puisqu'il est supérieur à  $\rho(a', c')$ ).



□

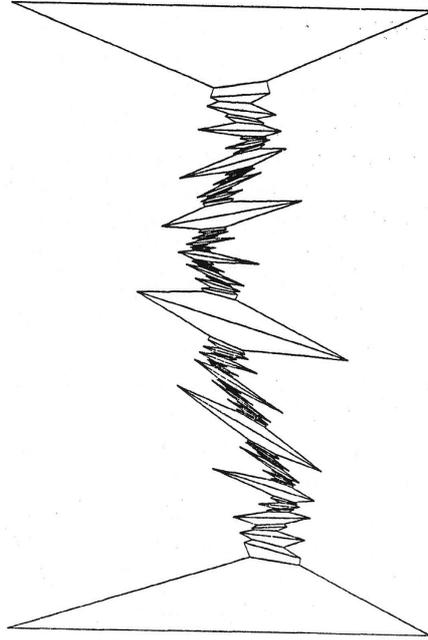
*Démonstration.* Il est maintenant tant de prouver le lemme de profondeur lui-même. Soit donc un sous-ensemble  $E$  de  $G_0 \cup G_0i$  tel que la profondeur mineure (resp. majeure) des boîtes marquées  $g(\Theta)$  (avec  $g \in E$ ) ne soit pas bornée, mais tel que les diamètres (resp. petits diamètres) des boîtes marquées  $g(\Theta)$  (avec  $g \in E$ ) soient minorés par un  $\epsilon > 0$ . On peut appliquer le lemme 39 qui nous dit que  $E$  ne peut pas être de type 1, c'est-à-dire que l'ensemble des nombres d'occurrences de  $\tau_1\tau_2$  dans les mots représentant les éléments de  $E$  est borné, disons par  $K$ .

Alors ces mots peuvent se mettre sous la forme  $w = \tau_1^{\alpha_{2K+1}}\tau_2^{\alpha_{2K}}\tau_1^{\alpha_{2K-1}}\dots\tau_2^{\alpha_2}\tau_1^{\alpha_1}$ , avec la condition que si l'un des  $\alpha_i$ ,  $i \geq 2$  est nul alors tous les  $\alpha_j$ ,  $j > i$  sont nuls. On choisit  $k$  le plus petit entier tel que  $\{\alpha_k(w), w \in E\}$  est infini, un tel  $k$  existe car  $E$  est infini. On voit déjà que  $E$  est nécessairement un ensemble de type 3, et donc d'après le lemme 40 qu'il contient un élément  $w$  tel que  $\text{diam}(w(\Theta)) < \epsilon$ . Cela montre le deuxième point du lemme de profondeur.

Mais si on suppose de plus que la profondeur mineure des mots de  $E$  n'est pas bornée, on peut alors montrer que  $E$  est de type 2 : l'hypothèse sur la profondeur des mots de  $E$  implique que l'ensemble des  $w \in E$  tels que  $\alpha_{k+1}(w)$  est non nul est infini. Le lemme 40 prouve alors que  $E$  contient un élément  $w$  tel que  $\text{Diam}(w(\Theta)) < \epsilon$ . Cela termine la preuve. □

### 5.3 Courbe de Pappus

Quand on calcule informatiquement ce que l'on obtient en itérant le théorème de Pappus, on obtient ce genre de figure. On a l'impression que cette itération produit une courbe passant par les points hauts et bas des éléments de l'orbite de notre boîte marquée. Le lemme de profondeur permet d'énoncer et de préciser ce genre de résultats.



**Définition .** On définit une application  $f$  de l'ensemble des sommets de  $H$  (inclus dans  $\mathbb{S}_1$ ) dans le plan projectif : à un sommet  $(D, p, E)$  (ou  $D$  est une droite,  $p$  un point et  $E$  un ensemble contenant deux points) on associe le point  $p$  correspondant.

**Théorème 41.** *On peut prolonger continûment cette application  $f$  à  $\mathbb{S}_1$  tout entier. On appellera  $\bar{f}$  l'application obtenue.*

*Démonstration.* Nous allons construire explicitement  $\bar{f}$ . Pour cela on commence par associer à tout point de  $x \in \mathbb{S}_1$ , n'appartenant pas à l'ensemble des sommets de  $H$ , une suite de boîtes marquées de la façon suivante. On considère une corde orientée  $pq$  du cercle unité. Elle partage le disque en deux portions, dont une est située à droite de la corde. Cette portion du disque contient un des deux arcs de cercle  $pq$ , que l'on notera  $a(pq)$ .  $x$  est dans un des trois arcs de cercle  $a(g(\Theta))$ , avec  $g$  valant  $i$ ,  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ , on pose  $x^1 = g(\Theta)$ . Maintenant, supposons  $x^n$  défini, tel que  $x \in a(x_n)$ , alors  $x$  appartient à un des arcs de cercle  $a(g(x^n))$ , avec  $g$  valant  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ , et l'on pose  $x^{n+1} = g(x^n)$ .

Cette suite de boîtes marquées est décroissante au sens de l'intérieur convexe, et le lemme de profondeur nous dit que le diamètre de ces boîtes tend vers 0, le théorème des fermés emboîtés nous dit ensuite qu'elle converge vers un point, c'est ce point que nous choisirons pour  $\bar{f}(x)$ . Il faut maintenant montrer que l'application  $\bar{f}$  ainsi construite est bien continue.

Soit donc  $\epsilon > 0$ . Soit  $x \in \mathbb{S}_1$ , n'appartenant pas à l'ensemble des sommets de  $H$ , et soit  $x_n$  une suite de  $\mathbb{S}_1$  convergeant vers  $x$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Diam}(x^N) < \epsilon$ . Pour  $n$  plus grand qu'un certain  $N'$ ,  $x_n$  appartient à l'arc  $a(x_N)$ , et en particulier  $(x_n)^N = x^N$ , et donc  $\bar{f}(x)$  et  $\bar{f}(x_n)$  appartiennent tous deux à  $I(x^N)$ , qui est de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .

Il faudrait raffiner le raisonnement si  $x$  est un des sommets de  $H$ . L'idée est que l'on aurait pu définir  $\bar{f}(x)$ , non pas comme la limite de  $(I(x^n))$ , mais comme la limite des "petits intérieurs" (l'ensemble que l'on considère lorsque l'on calcule le petit diamètre) des  $x^n$ . En effet le lemme de profondeur s'applique toujours, les petits intérieurs sont contenus dans les intérieurs et on peut démontrer, de la même façon que pour les intérieurs, des relations d'inclusion entre les petits intérieurs. Ensuite, on considère deux boîtes marquées, dont les arcs qu'elles délimitent sont situés de part et d'autre de  $x$ , et dont les petits diamètres sont inférieurs à  $\epsilon$  (toujours en appliquant le lemme de profondeur). Soit  $x_n$  une suite de  $\mathbb{S}_1$  convergeant vers  $x$ . Il existe un  $N$  tel que tous les  $x_n$ , pour  $n > N$  soient dans un de ces deux arcs et donc pour chaque  $n > N$  il existe  $N'$  tel que  $x_n^{N'}$  soit égal à l'une de nos deux boîtes marquées, appelons là  $\Psi$ . Maintenant,  $\bar{f}(x) = f(x)$  est dans le petit intérieur de  $\Psi$  (c'est soit le point haut, soit le point bas de  $\Psi$ ), tout comme  $\bar{f}(x_n)$  puisque ce point appartient au petit intérieur de  $x_n^{N'}$ , d'après les relations d'inclusion.  $\square$

**Théorème 42.** *L'application  $\bar{f}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{S}_1$  sur son image.*

*Démonstration.* Il faut montrer deux choses : que  $\bar{f}$  est injective et que sa réciproque est continue. Pour l'injectivité, on prend  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{S}_1$ , tels que  $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$ . Supposons que les deux suites  $x^n$  et  $y^n$  sont différentes, notons  $N$  le plus petit  $n$  tel que  $x^{n+1} \neq y^{n+1}$ . On note  $x^{N+1} = g(x^N)$  et  $y^{N+1} = g'(y^N) = g'(x^N)$  avec  $g$  et  $g'$  distincts, valant  $i$ ,  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ . Nous noterons ici  $\text{Int}$  pour l'intérieur au sens topologique du terme, on sait que,  $\bar{f}(x) \in \text{Int}(I(g(x^N)))$ , que  $\bar{f}(y) \in \text{Int}(I(g'(x^N)))$ , et que  $\text{Int}(I(g(x^N)))$  et  $\text{Int}(I(g'(x^N)))$  sont distincts, c'est absurde. Donc les deux suites  $x^n$  et  $y^n$  sont égales, donc  $x = y$ . Il faudrait raffiner le raisonnement si  $x$  ou  $y$  est un des sommets du graphe, nous admettrons que cela est possible.

On considère enfin une suite  $y_n$ , convergeant vers  $y$  dans  $\bar{f}(\mathbb{S}_1)$ . On note  $x_n$  l'antécédent de  $y_n$ , et  $x$  celui de  $y$ , il faut montrer que  $x_n$  converge vers  $x$ . Nous allons juste traiter le cas où  $x$  n'est pas un sommet de  $H$ , l'adaptation de la preuve pour  $x$  quelconque se faisant comme dans la preuve précédente. Soit  $\epsilon > 0$ , et soit  $N$  tel que  $a(x^N)$  ait une longueur plus petite que  $\epsilon$ .  $I(x^N)$  contient un ouvert contenant  $y$ , et pour  $n$  plus grand qu'un certain  $N'$ ,  $y_n$  est dans cet ouvert. On en déduit qu'il existe, pour tout  $n$  plus grand que  $N'$ , un entier  $k$  tel que  $x_n^k$  soit égal à  $x^N$ , et donc que  $x_n$ , qui appartient à l'arc de cercle  $a(x_n)$ , est à une distance de  $x$  inférieure à  $\epsilon$ . Il faudrait là encore raffiner le raisonnement si  $x$  est un sommet du graphe, nous admettrons que cela est possible.  $\square$

## Références

- [1] R.E. SCHWARTZ, *Pappus theorem and the modular group*, Pub. Math. IHES. 78 (1993), 187–206.
- [2] M. BERGER, *Dynamiser la géométrie élémentaire : introduction à des travaux de Richard Schwartz*, Rend. di Matematica, Serie VII, Volume 25, Roma (2005), 127–153.
- [3] P. SAMUEL, *Géométrie projective*, Puf, Paris, 1986.
- [4] J.P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Quatrième édition, Puf, Paris, 1995.

Nous tenons à remercier Frédéric Paulin pour son encadrement, ainsi que Richard Evan Schwartz pour avoir répondu à nos questions à propos de l'article d'origine [1].