À propos de la percolation critique en dimension 2

Pierre Nolin

effectué sous la direction de Wendelin Werner

Table des matières

1 Présentation de la percolation **5**
1.1 Motivations 5
1.2 Notations 5
1.3 Existence d'une transition de phase 6

2 Étude de la percolation au voisinage du point critique **7**
2.1 Quelques quantités caractéristiques 7
2.2 Exposants critiques 7

3 Schéma de la preuve **8**
3.1 Point de départ : la percolation critique 8
3.2 Résumé historique 8
3.3 Principales étapes 9

4 Ouvertures **9**

Je tiens à remercier particulièrement Wendelin Werner pour sa grande disponibilité et ses conseils si avisés.

1 Présentation de la percolation

1.1 Motivations

La *percolation* est un modèle basé sur des considérations issues de la physique statistique, et introduit pour étudier les propriétés de milieux aléatoires. Supposons par exemple que l'on ait une pierre poreuse traversé par d'innombrables canaux microscopiques : une question que l'on peut se poser est de savoir si quand on la plonge dans l'eau, cette pierre est « mouillée » à l'intérieur, *ie* de savoir si l'eau peut atteindre le centre de la pierre en empruntant les porosités.

On postule ainsi une certaine structure microscopique de la pierre (des canaux, ouverts ou non), et on cherche à obtenir des propriétés macroscopiques (il existe un chemin menant au centre de la pierre).

La percolation intervient naturellement dans nombre de situations concrètes : des feux de forêt qui se propagent, de l'eau qui cherche à traverser des grains de café pour atteindre le filtre...

1.2 Notations

Pour commencer, nous devons choisir un graphe sur lequel aura lieu le processus. Pour obtenir des propriétés intéressantes, il faut considérer un graphe infini suffisamment « régulier » (ce problème est abordé dans l'article de I. Benjamini et O. Schramm *Percolation beyond* $\mathbb{Z}^d$*, many questions and a few answers*).

À ce titre, le cas du réseau $\mathbb{Z}^d$ s'avère assez représentatif, et c'est à lui que l'on se réfère le plus souvent. Cependant, il peut être intéressant d'introduire d'autres réseaux, comme le réseau triangulaire dans le plan. La percolation sur ce réseau possède une propriété très forte d'invariance conforme à la limite dont on ne connaît pour l'instant pas d'analogue sur d'autres graphes, et qui permet d'obtenir des résultats très fins.

Usuellement, on distingue deux types de percolation : la *percolation par arêtes*, pour laquelle ce sont les arêtes qui sont déclarées ouvertes ou fermées, et la *percolation par sites*, pour laquelle ce sont les sites. Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cadre de la percolation par sites dans le plan, et nous nous limiterons au cas du réseau triangulaire, car c'est de loin le cas où l'on dispose du plus de propriétés. Cependant, les propriétés « générales » de la percolation (existence d'une transition de phase, unicité de la composante connexe infinie...) restent valables dans beaucoup d'autres situations, par exemple lorsqu'on se place sur $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$).

Fixons maintenant quelques notations : on note $G_T = (V_T, E_T)$ ce graphe, puis on introduit des probabilités sur l'ensemble des configurations, *ie* des familles $\omega = \{\omega(v), v \in V_T\} \in \{0,1\}^{V_T}$. Un site v sera dit ouvert si $\omega(v) = 1$, et fermé sinon.

Définition 1.1. Soit $p \in [0,1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ l'espace de probabilité défini par : $\Omega = \prod_{v \in V_T} \{0,1\}$, $\mathcal{F}$ est la tribu produit (engendrée par les cylindres finis de Ω), et

$$P_p = \prod_{v \in V_T} \mu_v$$

où μ_v est la mesure de Bernoulli sur $\{0,1\}$, donnée par :

$$\mu_v(\omega(v) = 0) = q, \qquad \mu_v(\omega(v) = 1) = p \quad \text{avec } p + q = 1$$

Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ ainsi défini, chaque site a une probabilité p d'être ouvert, et q d'être fermé, indépendamment des autres. Nous utiliserons E_p pour désigner l'espérance sous la probabilité P_p.

Pour simplifier les notations, $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ désignera le parallélogramme de sommets (en notation complexe) $a_i + b_j e^{i\pi/3}$ $(i, j = 1, 2)$. En particulier, nous utiliserons $S(n) = [-n, n] \times [-n, n]$ le losange de sommets $\pm n \pm n e^{i\pi/3}$. De même, nous utiliserons un repère oblique d'origine 0 et d'axes portés par 1 et $e^{i\pi/3}$.

Pour simuler un processus de percolation sur G_T, on peut se donner une famille $(X(v) : v \in V_T)$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0, 1]$; le vecteur aléatoire η_p défini par :

$$\eta_p(v) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X(v) < p \\ 0 & \text{si} \quad X(v) \geq p \end{cases}$$

réalise alors une configuration de Ω, chaque site étant effectivement ouvert avec une probabilité p.

1.3 Existence d'une transition de phase

Une configuration de la percolation étant fixée, nous dirons que x est relié à y, ce que l'on notera $x \rightsquigarrow y$, s'il existe sur le graphe un chemin de x à y qui est ouvert, c'est-à-dire un chemin n'empruntant que des sites ouverts. Nous noterons par la suite $C(x)$ l'ensemble des sites reliés à x, que l'on appellera *composante connexe ouverte* (ou cluster) de x. Les différents sites jouant un rôle identique, nous étudierons plus particulièrement $W = C(0)$.

Nous dirons que x est relié à l'infini ($x \rightsquigarrow \infty$) si le cluster de x est infini, *ie* s'il existe un chemin infini auto-évitant partant de x.

Définition 1.2. On définit la probabilité de percolation par

$$\theta(p) = P_p(|W| = \infty) = P_p(0 \rightsquigarrow \infty)$$

Elle peut également s'exprimer sous la forme

$$\theta(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|W| = n)$$

On a $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$, et θ est une fonction croissante de p. En effet, il suffit d'utiliser le couplage introduit précédemment : si $p_1 \leq p_2$, on a $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$, d'où $P(\eta_{p_1} \in \{|W| = \infty\}) \leq P(\eta_{p_2} \in \{|W| = \infty\})$, c'est-à-dire $P_{p_1}(|W| = \infty) \leq P_{p_2}(|W| = \infty)$.

Le phénomène caractéristique de la percolation est l'existence d'une valeur critique p_c de p pour laquelle on observe une transition de phase :

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad p < p_c \\ > 0 & \text{si} \quad p > p_c \end{cases}$$

p_c est la probabilité critique, elle est définie formellement par :

$$p_c = \sup \{p : \theta(p) = 0\}$$

Par ailleurs, on peut montrer en utilisant une loi du type 0-1 que :

Théorème 1.1. *Supposons le paramètre p fixé. On a l'alternative suivante : soit presque sûrement il y a une composante connexe infinie, soit presque sûrement il n'y en a pas.*

Ainsi, lorsque $p < p_c$ il n'existe pas de cluster infini, et lorsque $p > p_c$, il en existe un. Il y a donc bien un changement radical de comportement au point critique. Notons que la situation à $p = p_c$ reste à déterminer. C'est par exemple encore une question ouverte dans le cas de $\mathbb{Z}^3$.

Enfin, on peut démontrer que lorsqu'il existe, le cluster infini est presque sûrement *unique* : soit il n'y a pas de cluster infini, soit il y en a exactement un.

Dans le cas que nous étudions du graphe triangulaire dans le plan, la situation est bien connue :

Théorème 1.2. *On a ici $p_c = 1/2$, et $\theta(1/2) = 0$ (il n'y a pas percolation au point critique).*

Suivant les notations de Kesten, nous utiliserons $P_{cr} = P_{1/2}$ la probabilité au point critique. Elle jouera un rôle très particulier pour obtenir des propriétés de la percolation au voisinage de p_c.

2 Étude de la percolation au voisinage du point critique

2.1 Quelques quantités caractéristiques

Outre la fonction θ, plusieurs quantités caractéristiques apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à décrire les propriétés à large échelle de la percolation :

$$\theta(p) = P_p(|W| = \infty) = P_p(0 \rightsquigarrow \infty)$$

$$\chi(p) = E_p[|W|; |W| < \infty]$$

$$\xi(p) = \left[\frac{1}{\chi(p)} \sum_y \|y\|^2 P_p(0 \rightsquigarrow y, |W| < \infty)\right]^{1/2}$$

La fonction θ peut-être vue comme la densité du cluster infini. La fonction ξ est elle une longueur caractéristique : une autre longueur plus pratique à manipuler, notée L, sera introduite, et on peut montrer que $\xi(p) \asymp L(p)$.

2.2 Exposants critiques

Notre but est de décrire le comportement des fonctions caractéristiques que nous venons d'introduire au voisinage du point critique $p_c = 1/2$. Un paradigme veut que la plupart des quantités construites soient approximativement des puissances de $|p - p_c|$. Le théorème suivant va en ce sens.

Théorème 2.1 (Exposants critiques). *On a les estimations :*

(i) Lorsque $p \to 1/2^+$,

$$\theta(p) \approx (p - 1/2)^{5/36}$$

(ii) Lorsque $p \to 1/2$,

$$\xi(p) \approx |p - 1/2|^{-4/3}$$

(iii) Lorsque $p \to 1/2$,

$$\chi(p) \approx |p - 1/2|^{-43/18}$$

3 Schéma de la preuve

3.1 Point de départ : la percolation critique

La preuve part de ce qui se passe au point critique, plus précisément de la manière dont décroissent les probabilités à $p = 1/2$ des événements :

$$A_n^1 = \{0 \rightsquigarrow \partial S(n)\}$$
$$A_n^2 = \{0 \rightsquigarrow \partial S(n) \text{ par deux chemins disjoints}\}$$

Il est possible de prouver :

$$(1)\ P_{cr}(A_n^1) \approx n^{-5/48}$$
$$(2)\ P_{cr}(A_n^2) \approx n^{-5/4}$$

3.2 Résumé historique

Un bon résumé de la situation se trouve dans l'article de S. Smirnov et W. Werner, *Critical exponents for two-dimensional percolation.*

C'est H. Kesten dans un article de 1987, *Scaling relations for 2D-percolation*, qui a le premier étudié le comportement de la percolation au voisinage de p_c grâce à son comportement à p_c exactement. Dans cet article, assez touffu et assez dense, il démontre de nombreux résultats montrant le lien entre les relations dites «de scaling» portant sur les exposants caractéristiques de la percolation planaire (sur un graphe «régulier», $\mathbb{Z}^2$, ou le graphe triangulaire par exemple) d'une part, et les propriétés (1) et (2) de la percolation critique d'autre part. Comme tous les résultats reliés étaient des conjectures à l'époque, les hypothèses qu'il privilégie dans son article ne sont pas celles qui nous seraient utiles. Ceci dit, tous les ingrédients nécessaires à la preuve s'y trouvent.

Bien plus tard, un article de S. Smirnov de 2001, *Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, a lancé l'étude de la percolation critique à l'aide de processus continus très généraux appelés SLE et introduits par O. Schramm l'année précédente dans son article *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees.* S. Smirnov montre plus précisément que la percolation par site sur le graphe triangulaire au point critique possède une limite conformément invariante lorsque le pas du réseau tend vers 0.

Les propriétés (1) et (2) ont alors été prouvées grâce à l'étude du SLE par G. Lawler, O. Schramm et W. Werner.

La propriété (1) est prouvée dans *One-arm exponent for 2D critical percolation*, en combinant le calcul d'un exposant caractéristique pour SLE_6 avec la propriété d'invariance conforme à la limite démontrée par Smirnov. La propriété (2) découle d'arguments similaires, avec en plus les propriétés contenues dans une série de trois articles écrits par L. S. et W. intitulés *Values of Brownian intersection exponents, I, II et III.*

Un complément à l'article de Smirnov était néanmoins supposé pour obtenir ces deux propriétés, donnant la limite renormalisée de l'*ensemble* du processus de percolation critique. Ce manque a été comblé récemment par F. Camia et C. M. Newman dans *The full scaling limit of two-dimensional critical percolation.*

La preuve des propriétés (1) et (2) semble donc à ce jour complète. Il reste alors à montrer comment celles-ci permettent d'obtenir des informations sur le comportement de la percolation au voisinage du point critique.

3.3 Principales étapes

L'outil fondamental introduit dans la preuve est une autre longueur caractéristique, notée L. Pour un $\epsilon > 0$ bien choisi, on introduit (il est assez facile de voir que cette définition a un sens) :

$$L(p,\epsilon) = \begin{cases} min\{n, P_p(\text{traverser } [0,n] \times [0,n]) \leq \epsilon\} & \text{si} \quad p < 1/2 \\ min\{n, P_p(\text{traverser } [0,n] \times [0,n]) \geq 1-\epsilon\} & \text{si} \quad p > 1/2 \end{cases}$$

L'étape la plus difficile est la première, qui consiste à montrer que

$$P_p(0 \rightsquigarrow \partial S(L(p))) \asymp P_{cr}(0 \rightsquigarrow \partial S(L(p)))$$

Cela entraîne que

$$L(p) \approx |p - 1/2|^{-4/3}$$

On montre ensuite que

$$\theta(p) \asymp P_p(0 \rightsquigarrow \partial S(L(p))),$$

ce qui fournit l'estimation (i).

On peut alors prouver que l'on a en fait $L(p) \asymp \xi(p)$ (*ie* que L et ξ sont deux longueurs caractéristiques équivalentes), ce qui donne (ii).

Arrivé à ce point, il n'est plus très compliqué en utilisant les résultats intermédiaires de montrer l'estimation (iii).

4 Ouvertures

La question des autres réseaux planaires est encore totalement ouverte, aucun résultat analogue à celui de Smirnov n'est en fait connu à ce jour, même pour le réseau $\mathbb{Z}^2$, qui pourtant paraît le plus naturel au début. Néanmoins, il y a de fortes raisons de croire en l'«universalité» des relations obtenues (c'est-à-dire que les exposants existent et sont les mêmes quel que soit le réseau choisi au départ, pourvu qu'il soit suffisamment régulier).

Nous nous proposons d'utiliser les résultats énoncés pour étudier un *modèle de feux de forêts* introduit par J. Van den Berg et R. Brouwer dans un article de 2004, *Self-destructive percolation.*

Le cadre est le suivant : on considère une percolation par sites sur $\mathbb{Z}^2$, de paramètre $p > p_c$, et on suppose que sous l'effet d'une « catastrophe », tous les sites de la composante connexe infinie (presque sûrement, elle existe et elle est unique) deviennent vides.

Enfin, on effectue une nouvelle percolation, de paramètre noté δ, parmi les sites vides (ceux qui l'ont toujours été et les sites qui étaient dans la composante connexe infinie avant la catastrophe).

On se pose alors la question suivante : existe-t-il des composantes connexes infinies (une ou plusieurs) dans la configuration finale ?

Il est assez facile de montrer que pour chaque valeur de p fixée, une amélioration non négligeable est nécessaire, c'est-à-dire qu'il existe une valeur critique non triviale $\delta_c(p) > 0$ telle que pour tout $\delta < \delta_c$, il n'y ait pas de composante connexe infinie dans le résultat final.

Par contre, on ne sait pas si $\delta_c \searrow 0$ lorsque $p \searrow p_c$, ou alors au contraire si δ_c reste au-dessus d'une valeur minimale nécessaire.

Le principal résultat de l'article relie ce problème au fait qu'une certaine suite (a_n) reste éloignée de 1.

Définition 4.1. Considérons le graphe $G(n)$ constitué des sommets de $\mathbb{Z}^2$ contenus dans la boîte $[0, 3n] \times [0, 2n]$ et des arêtes héritées de la structure de graphe mise sur $\mathbb{Z}^2$.

Introduisons ensuite $L(n) = [0, 3n] \times \{0\}$ et $U(n) = [0, 3n] \times \{2n\}$ les bords bas et haut de cette boîte, et aussi $M(n) = [0, 3n] \times \{n\}$ sa médiane horizontale.

On définit alors $a_n := \mathcal{P}_{p_c,\delta}^{(G,U)}(L \rightsquigarrow M)$ (cette notation signifie qu'on supprime les sommets reliés à $U(n)$, qu'on augmente de δ et qu'enfin on regarde si $L \rightsquigarrow M$).

Conjecture : Il existe $\delta > 0$ tel que la suite $(a_n(\delta))$ est bornée loin de 1 $(*)$.

Théorème 4.1. *Si* $(*)$ *est vraie, alors*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall p > p_c, \theta(p, \delta) = 0$$

Il reste alors à voir si on peut obtenir $(*)$ en utilisant les propriétés de la percolation au voisinage du point critique...

Références

[1] **G. Grimmett,** *Percolation* (1999).

[2] **H. Kesten,** *Percolation theory for mathematicians* (1982).

[3] **H. Kesten,** *Scaling relations for 2D-percolation* (1987).

[4] **H. Kesten,** *A scaling relation at criticality for 2D-percolation* (1987).

[5] **H. Kesten,** *The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation* (1986).

[6] **S. Smirnov, W. Werner,** *Critical exponents for two-dimensional percolation* (2001).

[7] **S. Smirnov,** *Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits* (2001).

[8] **O. Schramm,** *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees* (2000).

[9] **G. Lawler, O. Schramm, W. Werner,** *One-arm exponent for 2D critical percolation* (2001).

[10] **G. Lawler, O. Schramm, W. Werner,** *Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponents* (1999).

[11] **G. Lawler, O. Schramm, W. Werner,** *Values of Brownian intersection exponents II : Plane exponents* (2000).

[12] **G. Lawler, O. Schramm, W. Werner,** *Values of Brownian intersection exponents III : Two sided exponents* (2000).

[13] **F. Camia, C. M. Newman** *The full scaling limit of two-dimensional critical percolation* (2005).

[14] **I. Benjamini, O. Schramm** *Percolation beyond* $\mathbb{Z}^d$*, many questions and a few answers* (1996).

[15] **J. Van den Berg, R. Brouwer** *Self-destructive percolation* (2004).