Variétés dont le fibré cotangent est ample

Olivier Benoist

Mémoire de magistère sous la direction
d'Olivier Debarre

20 janvier 2009

Table des matières

Introduction **2**

1 Variétés projectives lisses **3**
1.1 Généralités 3
1.2 Amplitude 3

2 Quelques propriétés d'hyperbolicité **4**
2.1 Hyperbolicité 4
2.2 Amplitude du fibré cotangent 5

3 Cas des sous-variétés de variétés abéliennes **6**
3.1 Hyperbolicité 6
3.2 Amplitude du fibré cotangent 6

4 Construction de variétés au fibré cotangent ample **7**
4.1 Théorème principal et structure de la démonstration 7
4.2 Théorème de Bertini "en famille" 8
4.3 Fin de la démonstration 9

Références **10**

Introduction

On travaille dans tout ce texte sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Cependant, la plupart des résultats, notamment 2.4, restent valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

On introduit plusieurs propriétés d'"hyperbolicité" pour les variétés projectives lisses. Les liens conjecturaux entre ces différentes propriétés et les exemples connus permettent de mettre en évidence le fait surprenant que les comportements analytiques, algébriques et arithmétiques d'une variété projective sont interdépendants. Pour plus de précisions ou de références sur la notion d'hyperbolicité, consulter [3] ou [8] 6.3.B.

Dans la troisième partie, on s'intéresse au cas particulier des sous-variétés de variétés abéliennes, et on montre que les propriétés mentionnées ci-dessus s'interprètent alors géométriquement de manière très simple.

La quatrième partie est consacrée à la construction d'exemples de variétés dont le fibré cotangent est ample - une condition très forte qui implique les différentes propriétés d'hyperbolicité. On se concentre pour cela, en suivant [2], sur le cas explicite des sous-variétés de variétés abéliennes. Le théorème principal est énoncé en 2.4.

Je tiens à remercier chaleureusement Olivier Debarre pour avoir encadré ce mémoire, et pour ses nombreux conseils.

1 Variétés projectives lisses

1.1 Généralités

On s'intéresse ici aux variétés algébriques projectives, c'est-à-dire au lieu des zéros dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ d'une famille de polynômes homogènes. Une variété projective est dite lisse si c'est une sous-variété différentielle de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Ces objets ont une structure de variété algébrique d'une part, et de variété analytique d'autre part. Le principe GAGA, dû à Serre [10], dit que ces deux points de vue sont équivalents. Par exemple, une sous-variété analytique de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est nécessairement algébrique. De même, un fibré en droites analytique sur une variété projective est nécessairement algébrique. Cette double nature fait qu'on peut utiliser pour étudier ces variétés aussi bien les outils d'analyse complexe à plusieurs variables que les techniques de géométrie algébrique.

Lorsqu'une variété est définie sur un corps de nombres K, c'est-à-dire quand elle est définie par des équations à coefficients dans K, on dispose d'un troisième point de vue. Il s'agit de l'étude des points de la variété à coefficients dans K, dits points rationnels. On peut alors s'intéresser qualitativement à la finitude, ou au contraire à la densité de ces points rationnels.

Les propriétés analytiques, algébriques et éventuellement arithmétiques d'une variété projective sont liées. C'est ce qu'on va essayer de mettre en évidence, en se restreignant à des variétés très particulières vérifiant des propriétés d'hyperbolicité.

Introduisons une classe de variétés projectives qui jouera un rôle important dans ce texte. Les variétés analytiques de la forme $\mathbb{C}^d/\Gamma$ où Γ est un réseau de $\mathbb{C}^d$ s'appellent des tores complexes. Les variétés abéliennes sont les tores complexes qui sont des variétés projectives, i.e. qui peuvent se réaliser comme sous-variété de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Ainsi, les variétés abéliennes de dimension 1 sont exactement les courbes elliptiques. Pour une référence sur les variétés abéliennes complexes, on pourra consulter [1].

1.2 Amplitude

Les variétés qu'on va considérer dans ce texte se distinguent par la positivité de leur fibré cotangent ou de leur fibré canonique (puissance extérieure maximale du fibré cotangent). C'est la raison pour laquelle on fait dans ce paragraphe quelques rappels rapides sur différentes formes de positivité, en particulier autour de la notion d'amplitude. Pour plus de détails, se référer à [7] et [8].

Définition 1.1. Soit X une variété projective. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X est dit ample si une de ses puissances $\mathcal{L}^m$ est engendrée par ses sections globales et si le morphisme vers un espace projectif induit par ces sections est une immersion fermée.

On dit que $\mathcal{L}$ est très ample si l'on peut choisir $m = 1$.

Par exemple, il y a sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un fibré très ample canonique $\mathcal{O}(1)$, dont les sections globales sont exactement les polynômes homogènes de degré 1.

Notation 1.2. Soit X une variété projective, et E un fibré vectoriel sur X. On note $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif des quotients de dimension 1 de E.

Définition 1.3. Soit X une variété projective. Un fibré vectoriel E sur X est dit ample si le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ sur $\mathbb{P}(E)$ est ample.

Définition 1.4. Soit X une variété projective. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X est dit gros si les sections globales d'une de ses puissances $\mathcal{L}^m$ induisent une application rationnelle de X vers un espace projectif qui soit birationnelle sur son image.

Définition 1.5. Une variété projective et intègre X est dite de type général si le fibré canonique d'une (resp. de toute) désingularisation de X est gros.

2 Quelques propriétés d'hyperbolicité

2.1 Hyperbolicité

On introduit ici plusieurs propriétés d'hyperbolicité des variétés projectives lisses, de natures très différentes (algébrique, analytique ou arithmétique). Pour plus de précisions ou de références sur la notion d'hyperbolicité, consulter [3] ou [8], 6.3.B.

Considérons les propriétés suivantes d'une variété projective lisse :

(i) La variété X est Kobayashi-hyperbolique au sens ou toute courbe entière, i.e. toute application holomorphe $\mathbb{C} \to X$ est constante.

(ii) Toute sous-variété de X est de type général.

(iii) Il n'y a pas de morphisme non constant d'une variété abélienne dans X.

Une conjecture due à Lang [6] affirme que ces trois conditions sont équivalentes.

Notons que deux des implications sont faciles. Tout d'abord, l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ est vraie car une variété abélienne A est recouverte par les images des applications entières $\mathbb{C} \to A$.

D'autre part, l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est vraie car l'image Y d'un morphisme non constant d'une variété abélienne vers X ne peut être de type général. En effet, si $\tilde{Y}$ est une désingularisation de Y, les nombreuses sections de $K_{\tilde{Y}}^r, r >> 0$ se tireraient en arrière en des sections de K_A^r, qui est trivial : c'est absurde.

Exemple 2.1. Les courbes qui vérifient ces conditions sont exactement les courbes de genre ≥ 2. En effet, (ii) est évident et (iii) en découle. Quant à (i), c'est une conséquence du fait que le revêtement universel d'une courbe de ≥ 2 est le disque unité, et du théorème de Liouville.

Exemple 2.2. Pacienza a montré dans [9] que (ii), donc (iii) sont vrais pour une hypersurface très générale de $\mathbb{P}^N$ de degré $\geq 2N$.

Ces propriétés ont aussi un pendant arithmétique. Supposons que X est définie sur un corps de nombres K. On conjecture alors que les propriétés (i) à (iii) ci-dessus sont équivalentes à la propriété suivante.

(iv) Pour toute extension finie L de K, X n'a qu'un nombre fini de L-points.

Dans le cas particulier des courbes, c'est le théorème de Faltings.

2.2 Amplitude du fibré cotangent

On va s'intéresser à une classe plus restreinte de variétés : celles dont le fibré cotangent est ample. Cette condition géométrique simple implique les trois premières propriétés discutées dans le paragraphe précédent. Pour la propriété (i), c'est démontré dans [6], pour (ii) dans [8], 6.3.28, et (iii) s'en déduit.

Exemple 2.3. Le fibré cotangent d'une courbe est ample si et seulement si elle est de genre ≥ 2. En effet, fibré cotangent et fibré canonique coïncident.

Il est difficile de construire des exemples non triviaux de telles variétés. On dispose du théorème suivant de Debarre [2], dont on discutera la preuve dans la troisième partie de ce texte. On trouvera dans ce même article [2] des constructions dues à Bogomolov, tandis que [4] contient des résultats analogues.

Théorème 2.4. *Une intersection d'hypersurfaces générales suffisamment amples dans une variété abélienne simple a son fibré cotangent ample si sa dimension n'excède pas la moitié de la dimension de la variété abélienne ambiante.*

Pour des intersections complètes dans l'espace projectif, on dispose de la conjecture analogue suivante de Debarre [2] :

Conjecture 2.5. *Une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ qui est intersection de $c \geq N/2$ hypersurfaces générales de degrés suffisamment grands a un fibré cotangent ample.*

Justifions que la propriété "avoir un fibré cotangent ample" est beaucoup plus forte et restrictive que les propriétés (i) à (iii) ci-dessus. Par exemple, il est immédiat par 2.1 qu'un produit $C_1 \times C_2$ de courbes de genres ≥ 2 vérifie les propriétés (i) à (iii). Cependant, $\Omega_{C_1 \times C_2}|_{C_1 \times \{P\}} \simeq \Omega_{C_1} \oplus \Omega_{C_2,P}$ a un facteur direct trivial, et ne peut donc être ample.

La proposition ci-dessous, qui n'est bien sûr pas vérifiée pour un produit de courbes, illustre les contraintes très fortes qu'impose la condition de fibré cotangent ample :

Proposition 2.6. *Soit X une variété projective lisse dont le fibré cotangent est ample, et Y une variété projective irréductible. Alors il n'existe qu'un nombre fini d'applications rationnelles non constantes de Y dans X.*

3 Cas des sous-variétés de variétés abéliennes

3.1 Hyperbolicité

Pour les sous-variétés de variétés abéliennes, les conditions (i) à (iii) (et (iv), le cas échéant) de 2.1 sont toutes équivalentes à la condition très simple suivante :

(v) La variété X ne contient pas de translatés de sous-variétés abéliennes de dimension > 0 de A.

En effet, on a déjà vu $(i) \Rightarrow (iii)$ et $(ii) \Rightarrow (iii)$, tandis que $(iii) \Rightarrow (v)$ est trivial. Les implications $(v) \Rightarrow (i)$ et $(v) \Rightarrow (ii)$ sont elles respectivement conséquences des deux théorèmes ci-dessous.

Proposition 3.1 (Bloch)**.** *Soit A une variété abélienne complexe. Alors l'adhérence de Zariski de l'image d'une courbe entière $\mathbb{C} \to A$ est un translaté d'une sous-variété abélienne de A.*

Proposition 3.2 (Ueno)**.** *Soit A une variété abélienne complexe. Alors une sous-variété irréductible lisse X de dimension > 0 de A est de type général si et seulement si $\mathrm{Stab}_A(X)$ est fini.*

Finalement, supposons que X est définie sur un corps de nombres K. L'implication $(iv) \Rightarrow (v)$ est vraie car une sous-variété abélienne de A est définie sur une extension finie de K, et a par [5] une infinité de L-points pour une certaine extension finie L de son corps de définition.

La réciproque $(v) \Rightarrow (iv)$ est conséquence du théorème difficile ci-dessous :

Proposition 3.3 (Mordell-Lang)**.** *Soit A une variété abélienne complexe, et X une sous-variété de A, toutes deux définies sur un corps de nombres K. Alors l'adhérence de Zariski des K-points de X est une réunion finie de translatés de sous-variétés abéliennes de A.*

Comme une variété abélienne ne contient qu'un nombre dénombrable de sous-variétés abéliennes, ce critère permet de construire de nombreuses variétés vérifiant les propriétés (i) à (iii) (et (iv), le cas échéant) de 2.1. Par exemple, si $\mathcal{L}$ est un fibré en droite très ample sur une variété abélienne complexe A, le lieu des zéros X d'une section globale très générale de $\mathcal{L}$ vérifie ces conditions.

3.2 Amplitude du fibré cotangent

La propriété "avoir son fibré cotangent ample" possède également une interprétation géométrique très simple pour les sous-variétés de variétés abéliennes. Rappelons que les espaces tangents à A s'identifient tous par translations à $\mathrm{Lie}(A)$.

Proposition 3.4. *Soit A une variété abélienne complexe, et X une sous-variété lisse de A.*

Alors le fibré cotangent Ω_X de X est ample si et seulement si, pour tout $\partial \in \mathrm{Lie}(A)$ non nul, il y a au plus un nombre fini de points de X en lesquels ∂ est tangent à X.

Preuve. On considère la surjection $\Omega_A|_X \twoheadrightarrow \Omega_X$ qui induit une immersion $i : \mathbb{P}(\Omega_X) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega_A|_X) \simeq \mathbb{P}(\Omega_{A,0}) \times X$. On note de plus $p : \mathbb{P}(\Omega_A|_X) \to \mathbb{P}(\Omega_{A,0})$ la projection canonique.

On a $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_A|_X)}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)$. De plus, par fonctorialité du fibré tautologique, $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{A,0})}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_A|_X)}(1)$. La composée $f = p \circ i : \mathbb{P}(\Omega_X) \to \mathbb{P}(\Omega_{A,0})$ vérifie donc $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{A,0})}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)$.

Identifions les fibres de f : soit $d \in \mathbb{P}(\Omega_{A,0})$, et $\partial \in Lie(A)$ représentant d. $f^{-1}(d) = \{d\} \times \{x \in X, \partial \in T_{X,x}\}$. Or si les fibres de f sont finies, f est fini et Ω_X est donc ample.

Réciproquement, si f a une fibre F de dimension > 0, la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)$ à F doit être triviale, et F est contractée par tous les morphismes donnés par les puissances de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1)$. Ω_X ne peut donc être ample. □

Corollaire 3.5. *Conservons les notations de la proposition précédente, et notons $g = \dim(A)$ et $d = \dim(X)$. Alors, pour que Ω_X soit ample, il faut que $2d \leq g$.*

Preuve. On applique le théorème sur la dimension des fibres d'un morphisme appliqué à $f : \mathbb{P}(\Omega_X) \to \mathbb{P}(\Omega_{A,0})$. Pour que ses fibres soient finies, il faut que $2d \leq g$.

□

La troisième partie de ce mémoire est consacrée à une réciproque partielle de ce corollaire : on y construit des sous-variétés de variétés abéliennes simples dont le fibré cotangent est ample.

4 Construction de variétés au fibré cotangent ample

4.1 Théorème principal et structure de la démonstration

Donnons un énoncé précis du théorème de [2] qui nous intéresse, et qui a déjà été mentionné en 2.4. L'objectif de cette partie est d'en esquisser la démonstration. Signalons que la preuve donnée dans [2] est incomplète (le lemme 12 est faux).

Théorème 4.1. *Soit A une variété abélienne complexe simple de dimension g et $g/2 \leq c \leq g$. Soient $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_c$ des fibrés en droites très amples sur A. Alors, si $e_1, \ldots, e_c > g$ et si $s_1, \ldots, s_c$ sont des sections générales de $\mathcal{L}_1^{e_1}, \ldots, \mathcal{L}_c^{e_c}$, la sous-variété de A définie par $s_1 = \ldots = s_c = 0$ a son fibré cotangent ample.*

Introduisons quelques notations. On considère $\partial \in Lie(A)$ comme une dérivation sur le faisceau des fonctions sur A. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur A, $s \in H^0(A, \mathcal{L})$

une section globale de $\mathcal{L}$ et H le lieu de ses zéros. On construit une section $\partial s \in H^0(H, \mathcal{L}|_H)$ comme suit : si U est un ouvert trivialisant $\mathcal{L}$ et $\varphi : \mathcal{O}_U \to \mathcal{L}|_U$ une trivialisation, on pose $\partial s|_{H\cap U} = \varphi(\partial \varphi^{-1}(s))|_{H\cap U}$.

On note $H \cap \partial H$ le lieu des zéros de ∂ dans H. C'est exactement l'ensemble des points de H en lesquels ∂ est tangent à H.

On peut alors reformuler 4.1. D'une part, on utilise la caractérisation 3.4 de l'amplitude. D'autre part, on remarque comme l'amplitude est une condition ouverte, il suffit d'exhiber des sections $s_1, \ldots, s_c$ convenables pour que le théorème soit vrai pour des sections générales. Notons que l'énoncé ci-dessous est légèrement plus général, et que 4.1 correspond au cas $c \geq g/2$.

Théorème 4.2. *Soit A une variété abélienne complexe simple de dimension g, et $0 \leq c \leq g$. Soient $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_c$ des fibrés en droites très amples sur A. Alors, si $e_1, \ldots, e_c > g$, il existe $s_1, \ldots, s_c$ des sections globales non nulles de $\mathcal{L}_1^{e_1}, \ldots, \mathcal{L}_c^{e_c}$ telles que si $H_1, \ldots, H_c$ sont les lieux de leurs zéros, $H_1 \cap \ldots \cap H_c$ soit lisse de codimension c dans A et*

$$\mathrm{codim}_A(H_1 \cap \partial H_1 \cap \ldots \cap H_c \cap \partial H_c) = \max(2c, g) \textit{ pour tout } \partial \in \mathit{Lie}(A).$$

On va démontrer ce théorème par récurrence sur c : le cas $c = 0$ est trivial, et il suffit de se restreindre au cas $c \leq g/2$. L'hypothèse de récurrence nous permet de montrer qu'il existe des sections globales non nulles $s_1, \ldots, s_{c-1}$ de $\mathcal{L}_1^{e_1}, \ldots, \mathcal{L}_{c-1}^{e_{c-1}}$ telles que $H_1 \cap \ldots \cap H_{c-1}$ soit lisse de codimension $c-1$ dans A et que pour tout $\partial \in \mathrm{Lie}(A)$ non nul, en notant $Y_\partial = H_1 \cap \partial H_1 \cap \ldots \cap H_{c-1} \cap \partial H_{c-1}$,

$$\mathrm{codim}_A(Y_\partial) = 2c - 2.$$

Il nous reste à construire s_c.

4.2 Théorème de Bertini "en famille"

Le lieu des zéros H_c de s_c doit au moins vérifier que pour tout $\partial \in \mathit{Lie}(A)$ non nul, $\mathrm{codim}_A(Y_\partial \cap H_c) = 2c - 1$. On va avoir besoin d'un peu plus.

Soient $Y_{\partial,i}$ les composantes irréductibles réduites de Y_∂, $\widetilde{Y_{\partial,i}}$ leurs normalisées et $\pi_i : \widetilde{Y_{\partial,i}} \to A$ les applications naturelles. On va demander à ce que pour tout ∂ non nul et pour tout i, le lieu des zéros de $\pi_i^* s_c$ dans $Y_{\partial,i}$, noté $Z_{\partial,i}$ est intègre de codimension 1 dans $Y_{\partial,i}$.

Comme les $Z_{\partial,i}$ sont paramétrés par une variété de dimension $g - 1$, l'existence de s_c est assurée par le lemme 4.3 ci-dessous qui contrôle le mauvais lieu pour le théorème de Bertini.

Lemme 4.3. *Soit $f : Y \to \mathbb{P}^N$ un morphisme birationnel sur son image, avec Y projective normale. Notons F le fermé de l'espace $\mathcal{H}_e$ des hypersurfaces de degré e de $\mathbb{P}^N$ constitué des H telles que $Y \cap f^*H$ ne soit pas intègre de codimension 1 dans H. Alors* $\mathrm{codim}_{\mathcal{H}_e}(F) \geq e - 1$.

4.3 Fin de la démonstration

Montrons finalement que la section s_c construite au paragraphe précédent convient.

Considérons les suites exactes courtes de faisceaux suivantes, sur A et $\widetilde{Y_{\partial,i}}$ respectivement :

$$0 \to \mathcal{O}_A \xrightarrow{\cdot s_c} \mathcal{L}_c^{e_c} \to \mathcal{L}_c^{e_c}|_{H_c} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\widetilde{Y_{\partial,i}}} \xrightarrow{\cdot \pi_i^* s_c} \pi_i^* \mathcal{L}_c^{e_c} \to \pi_i^* \mathcal{L}_c^{e_c}|_{Z_{\partial,i}} \to 0.$$

On considère les suites longues de cohomologie associées, et, plus précisément, le diagramme ci-dessous, commutatif par fonctorialité des applications de bord.

$$\begin{tikzcd}
H^0(H_c, \mathcal{L}_c^{e_c}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi_i^*"] & H^1(A, \mathcal{O}_A) \arrow[d, "\pi_i^*"] \\
H^0(Z_{\partial,i}, \pi_i^* \mathcal{L}_c^{e_c}) \arrow[r, "\mu"] & H^1(\widetilde{Y_{\partial,i}}, \mathcal{O}_{\widetilde{Y_{\partial,i}}})
\end{tikzcd}$$

L'espace $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ s'identifie à $\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}^0(A))$. L'application $\phi_{\mathcal{L}_c} : A \to \mathrm{Pic}^0(A), a \mapsto t_a^* \mathcal{L}_c \otimes \mathcal{L}_c^{-1}$ permet donc de l'identifier à $\mathrm{Lie}(A)$. Un calcul explicite montre alors que $\lambda(\partial s_c) = \partial$. D'autre part, comme A est simple, $Y_{\partial,i}$ engendre A et l'application $\pi_i^* : H^1(A, \mathcal{O}_A) \to H^1(\widetilde{Y_{\partial,i}}, \mathcal{O}_{\widetilde{Y_{\partial,i}}})$ est injective.

Par conséquent, $\mu(\pi_i^*(\partial s_c)) = \pi_i^* \lambda(\partial s_c) \neq 0$, et $\pi_i^*(\partial s_c) \neq 0$. Comme $Z_{\partial,i}$ est intègre, cela signifie que le lieu des zéros de $\pi_i^*(\partial s_c)$ est de codimension 1 dans $Z_{\partial,i}$. Ainsi, le lieu des zéros de ∂s_c est de codimension 1 dans $Y_\partial \cap H_c$, et donc que, pour tout $\partial \in \mathrm{Lie}(A)$ non nul,

$$\mathrm{codim}_A(Y_\partial \cap H_c \cap \partial H_c) = 2c.$$

Références

[1] C. Birkenhake, H. Lange, *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag (1992).

[2] O. Debarre, *Varieties with ample cotangent bundle*, Comp. Math., **141** (2005), 1445 − 1459.

[3] O. Debarre, *Hyperbolicity*, Colloquium - University of Michigan, www.dma.ens.fr/%7Edebarre/Hyperbolicity.pdf.

[4] O. Debarre, E. Izadi, *Ampleness of intersections of translates of theta divisors in an abelian fourfold*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3477 − 3483.

[5] G. Frey, M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. London Math. Soc., **28**(1974), 112 − 128.

[6] S. Lang, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Symp. Pure Math., **62** (2004), 285 − 360.

[7] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I*, Springer (2004).

[8] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry II*, Springer (2004).

[9] G. Pacienza, *Subvarieties of general type on a general projective hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc., **356** (1997), 2649 − 2661.

[10] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1997), 1 − 42.